This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

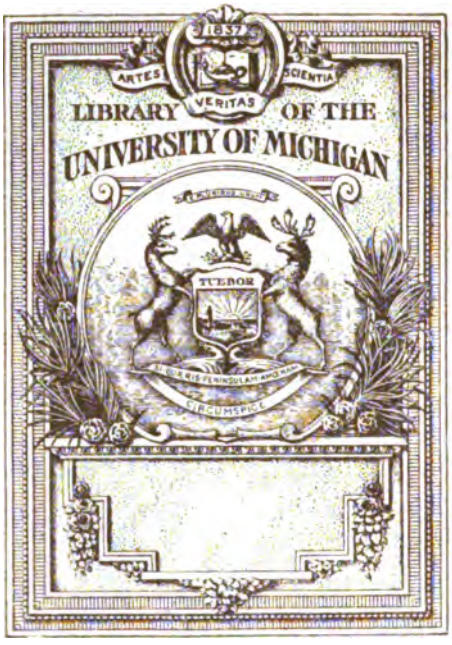
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

B 459230

MAGNETISCHE KRAFTFELDER

von

H. EBERT.



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

QC
753
.E16
1897

2290

Alexander Ziwet

MAGNETISCHE

KRAFTFELDER.

DIE ERSCHEINUNGEN DES MAGNETISMUS,
ELEKTROMAGNETISMUS UND DER INDUKTION

DARGESTELLT

AUF GRUND DES KRAFTLINIEN-BEGRIFFES

VON

H. EBERT,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT KIEL.

MIT 140 ABBILDUNGEN IM TEXT UND AUF DREI TAFELN.

LEIPZIG,
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1897.

Prof. Alex. Zinoff
gt.
1-22-1923

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht, vorbehalten.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

DEM ANDENKEN

VON

HEINRICH HERTZ

GEWIDMET.

415744

Vorwort.

Durch die bahnbrechenden Arbeiten von HEINRICH HERTZ sind die von FARADAY begründeten, von MAXWELL und HELMHOLTZ weiter entwickelten „neueren" Anschauungen über das Wesen der magnetischen, elektrischen und optischen Erscheinungen zu einem gewissen Abschluss gelangt. Sie führen die Herrschaft in dem ganzen Lehrgebäude, um die sie lange mit älteren Theorien gestritten hatten. Und doch sieht man sie in den meisten Darstellungen noch immer vielfach mit den aus den älteren Auffassungen hervorgewachsenen, jetzt rudimentär gewordenen Begriffsbildungen verquickt, oder wohl gar diesen untergeordnet.

Ich habe daher im Vorliegenden den Versuch gewagt, jene Auffassungen auch in die systematischen Darstellungen der genannten Erscheinungsgruppen einzuführen und die Lehre vom Magnetismus und der Elektricität durchweg dem neuesten Stande der theoretischen Erkenntnis entsprechend aus den Fundamenten zu entwickeln. Ähnliche Versuche lagen schon in Menge vor, doch meist nur in Form vereinzelter Aufsätze, welche mehr oder weniger umfangreiche Teilgebiete in der genannten Weise behandeln oder den Gang der Ableitung nur flüchtig skizzieren. Noch fehlte es an einem zusammenfassenden Lehrbuche, welches einerseits die experimentellen Grundlagen dieser neueren Anschauungen in fasslicher Weise etwa in dem Umfange entwickelt, in welchem sie nach des Verfassers Überzeugung thatsächlich in dem Rahmen einer Vorlesung über Experimentalphysik an einer Universität oder technischen Hochschule aufzunehmen sind, und das andererseits auch für die theoretische Vertiefung jener Anschauungen das Verständnis anzubahnen sucht.

Die vorliegende Darstellung ist aus solchen Vorlesungen des Verfassers sowohl über die experimentelle wie die theoretische Behandlung des Gegenstandes hervorgegangen, in denen er reichliche Gelegenheit

hatte, sich von dem hohen didaktischen Werte gerade der neueren Auffassungen und der durch sie gebotenen Methodik zu überzeugen. Drei Begriffe wurden schärfer betont, als dies sonst in Lehrbüchern zu geschehen pflegt: der Kraftlinienbegriff, der Begriff der magnetischen und elektromagnetischen Feldenergie und derjenige der Symmetrie eines von magnetischen Kräften erfüllten Mediums.

Für die neuere Entwickelung der Lehre von der Elektricität und dem Magnetismus ist charakteristisch, dass das Wesentliche der Erscheinungen in den Aussenraum ihrer Träger, in das „Feld" verlegt wird. So sind es bei den Magneten nicht mehr hypothetische, an gewissen Punkten aufgehäufte Fluida, die unvermittelt in die Ferne wirken, sondern Druck- und Zugspannungen im Felde, welche die „Pondera" bewegen. Beim galvanischen Strome fliesst nicht etwas im Leiter, sondern der wichtigste Teil der ganzen Erscheinung spielt sich in dem umgebenden Raume, in dem wir die magnetischen Stromwirkungen bemerken, im „Stromfelde" ab. Daher sind es diese Felder und die durch sie kontinuierlich von Stelle zu Stelle fortschreitenden Kräfte, die „Kraftfelder", welche wir bei den neueren Theorien in dem Vordergrunde des Interesses stehen sehen; ihr Bau, ihre Struktur wird durch die „Kraftlinien" beschrieben.

Durch die Einführung und konsequente Anwendung des Kraftlinienbegriffes kann das ganze Gebiet in einheitlicher und vollkommen systematischer Weise behandelt werden. Die einzelnen Erscheinungsgruppen stehen nicht unvermittelt nebeneinander, wie es der historischen Entwickelung entspricht, sondern sind zu einer Kette innerlich notwendig aus- und aufeinander folgender Thatsachen verbunden. Ferner gewinnen die einzelnen Gesetze sehr an Anschaulichkeit, da man sie meist unmittelbar aus den Kraftlinienbildern ablesen kann. Endlich ist es von Wichtigkeit, schon von vornherein diejenigen Vorstellungen einzuführen, welche sowohl der herrschenden Theorie zu Grunde liegen als auch in der Praxis, der hoch entwickelten Technik, die grösste Rolle spielen, denn nur dadurch bleibt die Kontinuität für den nach der einen oder anderen Seite weiter Lernenden gewahrt. Darum wurde auch die Konstruktion magnetischer und elektromagnetischer Kraftliniendiagramme mit aufgenommen; sie erläutern am besten die Faraday-Maxwellschen Grundideen; ferner haben sich gerade aus ihnen unter den Händen der Führer der elektrotechnischen Grossindustrie Hilfsmittel von einer Tragweite entwickelt, dass gewiss auch der Fernerstehende wenigstens an den Prinzipien dieser elektrischen „Graphostatik" ein Interesse nehmen wird.

Die eben angedeuteten Vorzüge der Kraftliniendarstellung dürften heute kaum mehr von jemand geleugnet werden; ganz besonders freudig ist es zu begrüssen, dass auch aus der Reihe der Fachvertreter an höheren Lehranstalten mit Nachdruck auf die Notwendigkeit und die Möglichkeit hingewiesen wird, den Kraftlinienbegriff schon in den Schulunterricht einzuführen, wovon eine Reihe trefflicher Aufsätze und Programmschriften Zeugnis ablegt. Dass das vorliegende Buch über die Grenze dessen, was etwa in der Schule von den neueren Anschauungen gebracht werden kann, hinausgeht, namentlich in den späteren Kapiteln, lehrt ein Blick schon auf das Inhaltsverzeichnis; indessen wird der geschickte Lehrer selbst leicht das für ihn Brauchbare herausfinden.

Über den Wert von energetischen Betrachtungen streitet man noch; dennoch kann nicht geleugnet werden, dass der Energiebegriff gerade auf elektrodynamischem Gebiete hervorragend wichtig ist. Es lässt sich nicht nur zeigen, dass das wesentlich Unterscheidende der verschiedenen Theorien der elektrischen und magnetischen Feldzustände in der Deutung des Energieinhaltes, den jedes einzelne Raumelement zu dem Gesamtinhalte des Feldes an Energie beiträgt, zu suchen ist, sondern die Vorstellungen der Energielokalisation, der Energiewanderung haben sich hier als besonders fruchtbar erwiesen; die wichtigsten Anwendungen des Gebietes endlich, die Erzeugung von Starkströmen durch Induktion, der Motorenbetrieb, die Kraftübertragung beruhen auf der Umwandlung mechanischer Energieformen in elektromagnetische Feldenergie und umgekehrt.

Bei der Verwendung der elektrischen Energie in allen Formen und zu allen Zwecken spielen die beiden durch *Ampères* einerseits, durch *Volts* andererseits gemessenen Faktoren der Energie die grösste Rolle; diesen Faktoren und ihrer Transformation ist daher besondere Aufmerksamkeit geschenkt worden. Namentlich in den späteren mehr theoretisch-mathematischen Kapiteln ist der Energiebegriff mit Vorteil stets in den Vordergrund gestellt worden; mit Rücksicht hierauf hätte das Buch vielleicht sogar „Magnetische Energiefelder" betitelt werden können.

Die Symmetrieeigenschaften der von magnetischen Wirkungen durchsetzten Feldmedien entscheiden über die Brauchbarkeit oder Unbrauchbarkeit einer mechanischen Hypothese oder eines Bildes, welches zur Erläuterung der magnetischen Zwangszustände herangezogen werden soll. Sie zeigen besonders wie die Weiterentwickelung der Faraday-Maxwellschen Anschauungen naturgemäss zu der namentlich von Helmholtz und Hertz vertretene Cykelntheorie führt, d. h. wie längs der Magnetkraftlinien Vorgänge anzunehmen sind, welche kinematisch

aufgefasst einer Drehbewegung entsprechen (achsialer oder cyklischer Charakter der Magnetkraftlinien), eine Auffassung, die sich neuerdings wieder, z. B. bei den Versuchen von ZEEMANN über den Einfluss des Magnetismus auf Spektralerscheinungen, als überaus fruchtbar erwiesen hat. —

Der I. Abschnitt des Buches ist den Kraftfeldern von Dauermagneten gewidmet; er hat eine mehr vorbereitende Aufgabe; an den einfachsten Beispielen sollen die neuen und im Verlaufe des weiteren Ausbaues nötigen Begriffe erläutert werden. Mathematische Entwickelungen sind hier fast noch ganz vermieden, das Experiment ist in den Vordergrund gestellt. Abweichend von dem gewöhnlichen Gange der Darstellung werden die grundlegenden Begriffe des magnetischen Kraftfeldes und der Kraftlinien nicht erst bei Besprechung der künstlichen Magnetformen, sondern schon bei dem natürlichen Magneten eingeführt. Bei der den II. Abschnitt ausmachenden Lehre von dem galvanischen Strome sind die Feldeigenschaften vorangestellt, wodurch sich unmittelbar die Lehre vom Elektromagnetismus und von der Elektrodynamik ergiebt.

Der III. Abschnitt behandelt die Erscheinungen der Induktion, wobei wiederum die qualitativen Erscheinungen vor den quantitativen diskutiert werden. Im Anschluss an die Einführung der Energiefaktoren werden die wichtigsten Typen der Generatoren und Transformatoren elektrischer Energie, durch Modelle erläutert, besprochen; auch der mehrphasigen Wechselströme, der Drehströme, sowie der elektrischen Kraftübertragung wurde dabei, wenn auch naturgemäss nur in äusserster Kürze, gedacht. An der Hand der HELMHOLTZschen Cykelntheorie konnten die Begriffe der Selbstinduktion und der wechselseitigen Induktion sowie die Erscheinungen der Transformation elektromagnetischer Feldenergie in Wärme (Widerstand) und des Stromverlaufes in Gleichstrom- und Wechselstromkreisen veranschaulicht werden.

Der IV. Abschnitt ist den Vorgängen im freien elektromagnetischen Kraftfelde gewidmet. Er behandelt die Wanderung und Ansammlung der Feldenergie bei geschlossenen und ungeschlossenen Strömen (Kondensatoren, Kapacitätsbegriff), ferner die elektrischen Schwingungen, und giebt eine Ableitung der MAXWELLschen Theorie und zwar möglichst direkt aus den dieser zu Grunde liegenden Erfahrungsthatsachen und spezielleren Anschauungen. Die in die HERTZsche Form übergeführten Gleichungssysteme werden dann dazu benutzt, die Gleichungen für die wichtigsten elektro-optischen Erscheinungen herzuleiten.

Bei der ursprünglichen Anlage des Buches bestand die Absicht, an dieser Stelle auch auf die Bedingungen einzugehen, unter denen die MAXWELLsche Theorie das Auftreten von elektrischen Longitudinal-

wellen gestatten würde, weil man auf diesen Punkt in neuerer Zeit wieder vielfach zurückgekommen ist bei den Versuchen, die Natur der von RÖNTGEN entdeckten Strahlen zu erklären. Es hätte indessen zu diesem Zwecke weiter ausgeholt und unter anderem auf die Leuchtvorgänge in gasverdünnten Räumen zurückgegriffen werden müssen. Da jedoch der Umfang des Buches eine gewisse Grenze nicht überschreiten sollte, so musste von einem Eingehen auf diese theoretisch recht interessante Frage doch schliesslich Abstand genommen werden. Dafür sind die Untersuchungen, welche uns HEINRICH HERTZ wie sein Vermächtnis in seinem posthumen Werke „Prinzipien der Mechanik" hinterlassen hat, in den letzten Kapiteln ausführlicher dargestellt worden, da sie augenblicklich in gewissem Sinne den Gipfel in der Entwickelung der theoretischen Anschauungen über unser Erscheinungsgebiet überhaupt darstellen. Diese wichtigen letzten Konsequenzen der FARADAY-MAXWELLschen Begriffswelt sind nur andeutungsweise von dem zu früh Dahingeschiedenen noch kurz vor seinem Ende seinen „Prinzipien" eingefügt worden; ihre Bedeutung scheint noch nicht genügend erkannt zu sein. HERTZ knüpft an Arbeiten von HELMHOLTZ an. Ich möchte ihm hierin folgen, aber seine letzten Errungenschaften in der Erkenntnis der elektrischen Erscheinungen losgelöst von dem Systeme seiner Mechanik in ihrer individuellen Bedeutung darzustellen versuchen. —

Viele der in dem vorliegenden Buche beschriebenen Apparat- und Modellanordnungen sind neu, und wenn dieselben auch zum Teil sehr einfach sind, so haben sie sich doch zur Erläuterung der in den neuen Theorien fundamentalen Begriffe und Gesetze bei meinen Vorlesungen in Erlangen, Leipzig und Kiel sehr bewährt.

Bei der Herstellung der Clichés für die Kraftlinienbilder wurde ich durch Herrn HANS BOAS, bei der Lesung der Korrektur von Herrn cand. rer. nat. LUDWIG RELLSTAB in Kiel in dankenswerter Weise unterstützt.

Zu ganz besonderem Danke bin ich der Verlagshandlung verpflichtet, welche keine Mittel gescheut hat, die recht schwierige Reproduktion der Kraftlinienbilder und Felddiagramme sowohl, wie auch die äussere Ausstattung des Buches zu einer möglichst vollkommenen zu machen.

Kiel, im Mai 1897.

Hermann Ebert.

(as Teil I)

NB. The first and second Abschnitt (pp. 1–224) appeared in 1896; the rest in 1897 as Teil II.

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt.

Seite

Erscheinungen des Magnetismus 1

1. Kapitel. Der Magnet und das magnetische Feld 3

A) Der einfache natürliche Magnet 3

1. Der Magnetstein 3
2. Die magnetische Eigenschaft 3
3. Begriff des Magneten 4
4. Nähere Prüfung der Art der magnetischen Wirkung. 4
5. Kraftlinienbilder 4
6. Praktische Winke zur Herstellung magnetischer Kraftlinienbilder 6
7. Fixierung der Kraftlinienbilder. 7
8. Das Kraftlinienbild eines natürlichen Magneten 8
9. Begriff der Polarität und der Pole 8
10. Aufsuchen der Pole eines natürlichen Magneten 9
11. Begriff des magnetischen Feldes 9
12. Kraftlinienverlauf in dem Felde eines natürlichen Magneten . . 9

B) Natürliche Magneten mit Eisenarmaturen 10

13. Übertragung der magnetischen Wirkung auf weiches Eisen . . 10
14. Begriff der magnetischen Permeabilität 10
15. Magnetische Permeabilität für verschiedene Substanzen. . . . 12
16. Ausrüstung natürlicher Magnete mit Polschuhen 12
17. Die Ankerschliessung 13

C) Künstliche Magnete verschiedener Formen und ihre Felder 13

18. Übertragung der magnetischen Wirkung auf Stahl 14
19. Die Strichmethoden. Herstellung künstlicher Magnete 15
20. Immaterialität des „Magnetismus“ 16
21. Die Stabmagnete 16
22. Magnetische Magazine 18
23. Besondere Magnetformen 19
24. Die Hufeisenmagnete 20
25. Fixierung der räumlichen Anordnung der Kraftlinien starker Felder 21
26. Begriff des homogenen Magnetfeldes. 22

D) Magnete mit einem Grade der Bewegungsfreiheit. . . . 22

27. Die Süd-Nordweisung freier magnetischer Achsen 23

Seite

2. Kapitel. Beziehungen zweier Magnete zu einander 24

A) Ponderomotorische Antriebe eines festliegenden auf einen beweglichen Magneten. Richtungssinn der Kraftlinien . 24

28. Ein Pol eines langen geradlinigen beweglichen Magnetstabes in dem Felde eines festliegenden Magneten; ponderomotorische Wirkungen 24
29. Eine kurze frei bewegliche Magnetnadel in dem Felde eines grösseren Magneten 27
30. Verzeichnen des Kraftlinienverlaufes 28
31. Bestimmungsstücke der Kraft; Vektorbegriff 29
32. Faradays Darstellung der Kraftverteilung durch die Kraftlinien 29

B) Beziehungen von zwei beweglichen Magneten zu einander 30

33. Wechselwirkung der Felder zweier achsial einander genäherter Magnetstäbe 31
34. Der Kraftlinienverlauf in dem Felde zweier achsial aufeinander wirkender Magnete; Vorstellung der Druck- und Zugspannungen im Felde 32
35. Wirkung zweier langer Magnetstäbe quer zu einander; Kraftlinienverlauf in bipolaren Magnetfeldern 35
36. Quellpunkte und Sinkstellen im magnetischen Kraftfelde . . . 36
37. Das Feld zwischen zwei parallelen Stabmagneten 37
38. Transversalwirkungen; Ablenkungen; die Hauptlagen 39

3. Kapitel. Der Magnetismus als tellurische und kosmische Erscheinung 42

A) Der Magnetismus als tellurische Eigenschaft 42

39. Die erdmagnetischen Elemente 42
40. Modell des erdmagnetischen Kraftlinienfeldes 44
41. Die Horizontalkomponente des Erdmagnetismus 45
42. Deklinatorien 46
43. Bussole, Kompass 47
44. Inklinatorien 48
45. Äquivalenz des erdmagnetischen Feldes mit dem Felde eines künstlichen Magneten: Astasierung 48
46. Die Werte der erdmagnetischen Elemente an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche; die erdmagnetischen Kurven . . . 49
47. Kraftlinienverlauf im Aussenraume des Erdkörpers 50
48. Variationen des erdmagnetischen Zustandes 52
49. Die Polarlichterscheinungen 53

B) Der Magnetismus als kosmische Kraft 55

50. Einfluss der Sonne auf die erdmagnetischen Elemente 55
51. Magnetische Theorie der Sonnenkorona 57
52. Einfluss des Mondes auf den Erdmagnetismus 57
53. Einwirkung der Planeten auf den Erdmagnetismus 57

4. Kapitel. Ausmessung der Kraftfelder 59

A) Statische Methoden zur Messung magnetischer Grössen; die absoluten Einheiten 59

54. Das Kraftfeld der Schwere 59
55. Vergleich der Grösse magnetischer Kräfte mit denen der allgemeinen Massenanziehung 60

Seite

56. Die Grundeinheiten; das Centimeter-Gramm-Sekundensystem . . 61
57. Das absolute Kräftemaass: die Dyne 61
58. Messung magnetischer Kräfte in Dyne mittels der Wage . . . 62
59. Die Dimensionen physikalischer Grössen; Dimension der Kraft 62
60. Abnahme der magnetischen Wirkung mit der Entfernung . . . 63
61. Beziehungen zum Newtonschen Gesetze der allgemeinen Massenanziehung 63
62. Begriff der Polstärke 64
63. Einheit der Polstärke 65
64. Die Vorzeichen der Polstärke; der Einheitspol 66
65. Die Dimension der Polstärke 66
66. Bestimmung der Polstärke in absolutem Maasse 67
67. Begriff des magnetischen Momentes 67
68. Begriff und Messung der Feldstärke 68
69. Bewegungsantrieb eines Poles von bestimmter Polstärke in einem Felde von gegebener Feldstärke 69
70. Dimension der Feldstärke 69
71. Bestimmung der Feldintensität durch die Kraftlinienzahl . . . 69
72. Kraftlinienzahl, welche von einem Pole von gegebener Stärke ausgeht 70
73. Ablenkung einer Deklinationsnadel durch einen Magnetstab . . 71

B) Dynamische Methoden zur Messung magnetischer Grössen; die Schwingungsmethoden 71

74. Kräftepaar, welches auf eine Magnetnadel im homogenen Felde wirkt 71
75. Methode der Oscillationen zur Vergleichung von Feldstärken. . 72
76. Grössen, welche die Schwingungsdauer einer Nadel bestimmen . 73
77. Bestimmung von Feldstärken in absolutem Maasse durch Oscillationen 74
78. Bestimmung magnetischer Momente in absolutem Maasse durch Schwingungsbeobachtungen 74
79. Bestimmung der Horizontalkomponente des Erdmagnetismus in absolutem Maasse nach Gauss und Weber 74

5. Kapitel. Abbildung von Kraftfeldern 76

A) Hilfsbegriffe 76

80. Das Kraftlinienbündel 76
81. Begriff der Kraftröhre 77
82. Begriff des Kraftflusses 78
83. Satz von der Erhaltung des Kraftflusses 78
84. Maxwells Einheitssolenoide 79

B) Kraftflussdiagramme 79

85. Diagramm des unipolaren Feldes 80
86. Bestimmung der Feldstärken nach dem Diagramm 80
87. Diagramm des bipolaren Magnetfeldes 82
88. Kombination zweier Kraftflussdiagramme 83
89. Berechnung der Feldstärke an einer beliebigen Stelle des bipolaren Magnetfeldes nach seinem Diagramme 85
90. Diagramm ungleich starker Magnetpole 85

Seite

91. Diagramme homogener Felder 86
92. Kombination von mehr als zwei Feldern 88

6. Kapitel. Struktur der Feldträger und Feldmedien 89

A) Die Magnetisierung 89

93. Der Magnetismus als molekulare Eigenschaft. 89
94. Magnetische Molekülketten 90
95. Modelle eines aus Molekularmagneten zusammengesetzten Stabmagneten. 90
96. Die gleichförmige Magnetisierung. 91
97. Das Toroid 91
98. Das geschlitzte Toroid 92
99. Magnetisches Moment pro Volumeneinheit. Intensität der Magnetisierung 92
100. Dimension der Magnetisierungsintensität 93

B) Magnetische Influenz 93

101. Verhalten des weichen Eisens im Felde; Magnetisierung durch Influenz 93
102. Magnetische Schirmwirkung 94
103. Schirmung einer Magnetnadel durch weiches Eisen 96
104. Begriff der magnetischen Polarisation 97
105. Paramagnetische und diamagnetische Substanzen 98

C) Magnetischer Induktionsfluss. 99

106. Magnetische Induktion. 99
107. Dimension der magnetischen Induktion 100
108. Induktionsröhren und Induktionsfluss 101
109. Maass der magnetischen Permeabilität 101
110. Die Susceptibilität 102
111. Beziehungen zwischen Permeabilität und Susceptibilität. . . 102

D) Das Grundgesetz des magnetischen Induktionsflusses . 102

112. Der magnetische Kreis. 102
113. Begriff der magnetomotorischen Kraft 103
114. Begriff des magnetischen Widerstandes. 104
115. Grundgesetz des magnetischen Kreises 105

E) Die Energetik der magnetischen Kraftfelder 105

116. Magnetisierungsarbeit 105
117. Lokalisierung der Feldenergie 106
118. Mechanisches Beispiel der Energielokalisation 106
119. Das Maass der magnetischen Feldenergie 107

7. Kapitel. Kinetische und mechanische Theorien der Kraftfelder . 110

A) Die Symmetrieeigenschaften der magnetischen Felder . 110

120. Der achsiale Charakter der Magnetkraftlinien 111
121. Drehungsvektoren 111
122. Prinzip von der Koexistenz elementarer Bewegungen . . . 112
123. Zusammensetzung von Drehbewegungen; das Parallelogramm der Drehungsvektoren 112
124. Begriff der Dauerbewegungen 113

Seite

B) Mechanische Interpretation der dynamischen Erscheinungen der Magnetkraftlinien 115

125. Druck- und Zugspannungen eines rotierenden Elementes . . 115
126. Erklärung der ponderomotorischen Wirkungen der Magnete durch die Annahme der Dauerbewegungen 116
127. Kinematische Bilder von Kraftröhren 118
128. Dynamische Modelle einiger wichtiger Magnetformen. . . . 118

C) Versuche über Wirbelbewegungen 120

129. Erzeugung von Wasserwirbeln 120
130. Die Wirbelbewegung als Dauerbewegung 121
131. Wirbellinien im Wirbelfaden 121
132. Richtung der Wirbellinien 122
133. Begriff der Wirbelintensität 123
134. Satz von der Erhaltung der Wirbelintensität. 123
135. Versuche mit Räuchringen 124

D) Cyklische Bewegungen 125

136. Begriff der cyklischen Bewegungen 125
137. Cyklische Koordinaten und cyklische Geschwindigkeiten . . 126
138. Energie cyklischer Systeme; das cyklische Moment 127
139. Kräfte, welche an cyklischen Koordinaten angreifen 128
140. Erweiterung des Cykelbegriffes 129
141. Gekoppelte Cykeln 129
142. Unechte Cykeln 131
143. Monocykeln, Dicykeln, Polycykeln 132
144. Langsam veränderliche Parameter 133

II. Abschnitt.

Erscheinungen des galvanischen Stromes und des Elektromagnetismus 135

8. Kapitel. Einachsige Magnetkraftfelder. (Einfacher Strom.) . . . 138

A) Konachsiale Magnetkraftliniensysteme 138

145. Der galvanische Strom als System magnetischer Kraftlinien . 138
146. Begriff der Achse des konzentrischen Magnetkraftliniensystems oder der Kraftachse 142
147. Richtungssinn der konzentrischen Kraftlinienringe 142
148. Bewegungen im konzentrischen Kraftliniensysteme 145

B) Achsenschleifen 146

149. Umgestaltungen des konzentrischen Kraftliniensystems durch Deformation der Achse 146
150. Eine Achsenschleife als Magazin magnetischer Feldenergie . 148
151. Die Achsenschleife als Äquivalent einer magnetischen Doppelfläche 149

C) Der Begriff des Stromes 150

152. Der Ampèresche Kunstgriff 150
153. Die Stromrichtung; Nomenklatur 152
154. Das Kraftlinienfeld einer Stromschleife und sein Spiegelbild . 152
155. Der galvanische Strom als Kraftlinienbündel. 154

Seite

D) Unterschiede in den Feldern der Magnete und der galvanischen Ströme 155

156. Einfach und mehrfach zusammenhängende Räume 155

9. Kapitel. Wechselwirkung zwischen Stromträgern und Magneten . 158

A) Qualitative Erscheinungen 158

157. Ein Magnetpol im Stromfelde 158
158. Ponderomotorische Bewegungsantriebe, welche ein beweglicher Magnetpol in einem Stromfelde erfährt 160
159. Magnetnadel parallel zu einem Stromträger, Oersteds Grundversuch 160
160. Die Daumenregel; Ampères Schwimmregel 161
161. Galvanoskope 162
162. Zwei Magnetpole in einer zum Strome senkrechten Ebene . . 163
163. Magnetnadel mit einem Grade der Freiheit innerhalb einer Stromschleife 163

B) Quantitative Beziehungen 164

164. Das elektromagnetische Grundgesetz 165
165. Die charakteristische Grösse des Stromfeldes; Begriff der „Stromstärke“ 168
166. Dimension der Stromstärke 170
167. Strommessung in absolutem Maasse; die Einheit der Stromstärke: das Ampère 171
168. Die Tangentenbussole 172
169. Arbeit der elektromagnetischen Kräfte 173
170. Energieinhalt einer Stromschleife 175
171. Das Stromfeld als monocyklischer Mechanismus. 176

C) Elektromagnetische Kraftflussdiagramme 177

172. Graphische Darstellung des konzentrischen Kraftliniensystems eines geradlinigen Stromes 177
173. Entnahme des absoluten Wertes der Feldstärke in irgend einem Punkte des konzentrischen Kraftlinienfeldes aus dem Diagramm 179
174. Diagramm des elektromagnetischen Grundversuches 179

10. Kapitel. Stromspulen, Solenoide und Elektromagnete 182

175. Stromspulen 182
176. Multiplikatoren 183
177. Galvanometer 184
178. Solenoide 185
179. Äquivalenz zwischen Solenoiden und Stabmagneten 187
180. Stromspiralen 188
181. Magnetische Wirkungen von Stromspiralen 189
182. Federampèremeter 192
183. Das homogene Innenfeld einer Stromspirale 192
184. Magnetisierungsspiralen 193
185. Der Elektromagnet 194
186. Einige Anwendungen der Elektromagnete 195

11. Kapitel. Bewegungsantriebe von Magnetfeldern auf Stromträger („Linke-Handregel“) 197

187. Bewegliches Gleitstück im homogenen Magnetfelde 197
188. Die Linke-Handregel 199

Seite

189. Mechanische Interpretation der elektroponderomotorischen Bewegungsantriebe 200
190. Elektromagnetische Rotationen 202
191. Magnetelektrischer Motor 203
192. Rotation von Radiärströmen 205
193. Bewegungen eines biegsamen Leiters im Felde eines Stabmagneten 206
194. Quantitatives Gesetz der ponderomotorischen Wirkung, welche ein beweglicher Stromträger in einem ruhenden Magnetfelde erfährt 207

12. Kapitel. Mehrachsige Magnetkraftfelder (Elektrodynamik) . . . 210

A) Elektrodynamische Wechselwirkung zweier verschieden gegeneinander orientierter Stromträger 211

195. Feld zweier gleichgerichteter Parallelströme 211
196. Elektrodynamische Wirkung der gleich gerichteten Parallelströme (Anziehung) 212
197. Feld zweier entgegengesetzt gerichteter Parallelströme und ihre elektrodynamische Wechselwirkung (Abstossung) . . . 213
198. Elektrodynamische Grundversuche 214
199. Elektrodynamische Wechselwirkung der einzelnen Windungen derselben Spirale aufeinander 215
200. Einwirkung verschiedener Teile desselben Stromträgers aufeinander 216
201. Verhalten gekreuzter Ströme 217
202. Senkrecht gegeneinander gerichtete Ströme; kontinuierliche Rotation eines Stromträgers unter der Wirkung eines anderen . 218
203. Die Intensität der elektrodynamischen Wechselwirkung . . . 219

B) Elektrodynamische Induktionsflussdiagramme 219

204. Kombination von Diagrammen zweier konzentrischer Kraftlinienfelder 219
205. Eigenschaften der zweiachsigen Kraftflussdiagramme 221
206. Diagramm einer Stromschleife mit inliegender Magnetnadel . 222

III. Abschnitt.

Erscheinungen der Induktion 225

13. Kapitel. Das Schneiden der Kraftlinien. (Rechte-Handregel, Zeigerstrom, Gegenzeigerstrom.) 228

207. Grundversuch 228
208. Die Rechte-Handregel 230
209. Kombination beider Handregeln: die „Lenzsche Regel“ . . . 231
210. Mechanisches Analogon des Induktionsvorganges 233
211. Induktionswirkungen in einer Leiterschleife mit Gleitstück . 234
212. Direkte und inverse Ströme 237
213. Die Maxwellsche Regel 237
214. Prinzip der Summation der Induktionswirkungen 238

Seite

215. Induktion durch Lagenveränderung einer Leiterschleife im Magnetfelde 238
216. Steigerung der Induktionswirkungen durch Multiplizieren der Windungslagen 239
217. Magnetoinduktion und Elektroinduktion 240
218. Elektroinduktion 241
219. Das Grundgesetz über Elektroinduktion 242
220. Beteiligung des Zwischenmittels 243
221. Elektrische Induktion durch Variation der magnetischen Induktion 245
222. Induktionswirkungen durch das erdmagnetische Kraftfeld . . 246
223. Erzeugung von dauernden galvanischen Strömen durch Bewegung von Leitern in Magnetkraftfeldern; Faradays Induktionsscheibe 247
224. Unipolare Induktion 248

14. Kapitel. Energetik des Induktionsvorganges 251

225. Prinzip der elektrischen Induktionsmaschine 251
226. Die in der Zeiteinheit geschnittene Kraftlinienzahl 253
227. Bezeichnung „Elektromotorische Kraft“ 256
228. Die Dimension der E.M.K. 257
229. Die praktische Einheit der E.M.K.: das Volt 258
230. Der Arbeitseffekt 258
231. Der Stromeffekt: das Voltampère oder Watt 258
232. Bestimmungsstücke der Stromenergie 259
233. Eigenschaften der Energiefaktoren 260
234. Der Intensitätsfaktor der Stromenergie 261
235. Faradays elektrotonischer Zustand 263
236. Summation der E.M.K. 265
237. Das Induktionsgesetz 265
238. Der Vektor der elektrischen Kraft 267
239. Begriff des magnetischen Stromes 268
240. Symmetrieeigenschaften des Vektors der elektrischen Kraft . 269
241. Erläuterung der Beziehungen zwischen magnetischer und elektrischer Kraft durch ein kinematisches Modell 270

15. Kapitel. Generatoren und Transformatoren der Stromenergie . . 273

A) Generatoren 274

242. Die magnetelektrische Induktionsmaschine 274
243. Siemensscher Doppel-T-Anker 277
244. Der Pacinotti-Grammesche Ring 278
245. Der Trommelanker 280
246. Das Dynamoprinzip 283
247. Gleichstrom-Dynamomaschinen 284
248. Mehrpolige Gleichstrom-Dynamos 286
249. Wechselstrom-Maschinen 287
250. Gleichung des harmonischen Wechselstromes 289
251. Entnahme von Wechselstrom aus einer Gleichstrommaschine; Gleichstrom-Wechselstrom-Generatoren 291
252. Mehrphasiger Wechselstrom: Drehstrom 292
253. Zweiphasenströme 292
254. Dreiphasenströme 293

Seite
255. Das magnetische Drehfeld 294
256. Elektrische Arbeitsübertragung 297
257. Drehstrommotoren mit Kurzschlussanker 297

B) Transformatoren 298

258. Einphasige Wechselstrom-Transformatoren 299
259. Drehstrom-Transformatoren 301
260. Induktionsapparate 302

16. Kapitel. Die Koeffizienten der Selbstinduktion und der wechselseitigen Induktion. Analogien mit den Cykelbewegungen . . . 304

A) Die Selbstinduktion 304

261. Begriff der Selbstinduktion 304
262. Der Koeffizient der Selbstinduktion, die Induktanz 306
263. Dimension der Induktanz 309
264. Praktische Einheit der Induktanz: der Erdquadrant 309
265. Energievorrat im Stromfelde 309
266. Energetische Definition der Induktanz 311
267. Illustration der Erscheinung der Selbstinduktion durch die Bewegungen eines Monocykels 311

B) Die wechselseitige Induktion 314

268. Der Koeffizient der wechselseitigen Induktion 314
269. Dimension des wechselseitigen Induktionskoeffizienten . . . 316
270. Vergleichung von Induktionskoeffizienten (Induktionswage) . 316
271. Wechselseitige Induktion unter dem Bilde dicyklischer Bewegung 317
272. Berechnung des Energieinhaltes und Aufstellung der Induktionsgleichungen für zweiachsige Kraftfelder 318
273. Dicykelmodell 319
274. Induktionsversuche am Dicykelmodell 324
275. Induktionsgesetze beliebig vieler Linearströme; polycyklische Bewegungssysteme 325

17. Kapitel. Beziehungen der Stromenergie zur Wärme 327

A) Stromverlauf im Gleichstromkreise 327

276. Transformation elektromagnetischer Feldenergie in Wärme . 327
277. Das Joulesche Gesetz 329
278. Begriff des Spannungsabfalles 330
279. Andere Form des Joulesschen Gesetzes 330
280. Das Ohmsche Gesetz 331
281. Energetische Bedeutung des Ohmschen Gesetzes 331
282. Der Verwandlungskoeffizient elektromagnetischer Feldenergie 332
283. Dimension des Verwandlungs- (Widerstands-) Koeffizienten . 334
284. Praktische Einheit des Verwandlungs- (Widerstands-) Koeffizienten: das Ohm 334
285. Widerstandsvergleichungen 335
286. Beziehungen des Widerstandes zu der Natur der Leiterbahn . 337
287. Das thermische Äquivalent der Stromarbeit 338
288. Die allgemeine Stromgleichung 338
289. Analogon des gebremsten Monocykels 339

Seite
290. Begriff der Zeitkonstante 340
291. Zeitlicher Verlauf des Schliessungsstromes 340
292. Zeitlicher Verlauf des Öffnungsstromes 342
B) Stromverlauf im Wechselstromkreise 343
293. Harmonisch variierende E.M.K. in einem Kreise von gegebener Induktanz und Resistanz 343
294. Berechnung der Phasenverschiebung 344
295. Berechnung der maximalen Stromstärke 345
296. Scheinbarer Widerstand: die Impedanz 346
297. Beziehung zwischen Induktanz, Resistanz und Impedanz . . 347
298. Mittlere Stromstärke 347
299. Effektive Stromstärke 348
300. Erwärmung durch Wechselstrom 349
301. Gleichungen des Transformators 349

IV. Abschnitt.

Erscheinungen des freien elektromagnetischen Feldes 351
18. Kapitel. Wanderung und Anhäufung elektrischer Feldenergie . . 355
A) Die Energiewanderung im Felde 355
302. Mechanisches Beispiel der Energiewanderung; Modell des elastisch gekoppelten Cykels 356
303. Maxwells Displacement; dielektrische Polarisation 358
304. Die Poyntingsche Regel für die Energiewanderung im elektromagnetischen Kraftfelde 360
305. Energiewanderung im Stromfelde 361
B) Ansammlung von elektrischer Spannungsenergie . . . 362
306. Ungeschlossene Ströme 362
307. Ladung eines Kondensators 364
308. Begriff der „Elektricität" im Rahmen der neueren Anschauungen 365
309. Das Dielektrikum 365
310. Linien dielektrischer Polarisation 366
311. Flächen gleicher elektrischer Spannung 366
312. Dielektrisches Moment 366
313. Beziehungen zwischen dielektrischer Polarisation und elektrischer Kraft 368
314. Dielektricitätskonstante 369
315. Maxwells Verschiebungsstrom 370
316. Intensität des Verschiebungsstromes 370
317. Der Kapazitätsbegriff 371
318. Energieinhalt eines dielektrisch polarisierten Mediums . . . 372
319. Dimension der Kapazität 374
320. Praktische Einheit der Kapazität: Farad und Mikrofarad . . 374
221. Dimension der Dielektricitätskonstante 374
C) Theorie der elektrischen Schwingungen 375
322. Allgemeine Stromgleichung für einen Träger mit Induktanz, Resistanz und Kapazität 375

Seite
323. Thomson-Kirchhoffsches Problem 376
324. Elektrische Schwingungen 377
325. Schwingungsdauer und Dämpfung elektrischer Oscillationen . 378

19. Kapitel. Die allgemeinen Feldgleichungen 380

A) Die Maxwell-Hertzschen Fundamentalgleichungen des magnetisch-elektrischen Kraftfeldes in Form von Vektorgleichungen 381

326. Die Feldvektoren 381
327. Die charakteristischen Konstanten des Feldmediums 382
328. Energieinhalt des elektromagnetischen Feldes 383
329. Begriff des Linienintegrals eines Vektors 383
330. Verknüpfung der Feldvektoren untereinander 385
331. Intensität des Leitungsstromes pro Flächeneinheit; Stromdichte 387
332. Gesamtstrom als Summe von Leitungs- und Verschiebungsstrom 388
333. Die allgemeine Stromgleichung des elektromagnetischen Feldes 389
334. Die allgemeine Induktionsgleichung des elektromagnetischen Feldes 389
335. Die Maxwellsche Theorie 390

B) Die Maxwell-Hertzschen Fundamentalgleichungen des Feldes in Koordinatendarstellung 391

336. Einführung des Koordinatensystems 392
337. Einführung der Vektorkomponenten 393
338. Auflösung der Vektorengleichungen in Gleichungen für die Komponenten 393
339. Komponenten der Linienintegrale von Vektoren 394
340. Cyklische Vertauschung 395
341. Das erste Hertzsche Gleichungssystem 396
342. Das zweite Hertzsche Gleichungssystem 397

C) Elektrooptik 398

343. Die allgemeinen Lichtgleichungen 399
344. Begriff und Gleichung des Strahles 401
345. Transversalität der elektromagnetischen Strahlung 401
346. Lage der Schwingungsvektoren zu einander 402
347. Begriff der elektromagnetischen Welle 403
348. Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen 404
349. Elektromagnetischer Brechungsexponent 405
350. Die Schwingungsgleichungen 405
351. Stehende Wellen 406
352. Experimentelle Bestimmungen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit 407
353. Versuche mit Strahlen elektromagnetischer Kraft 408
354. Die Absorptionserscheinungen 409
355. Erscheinungen der Dispersion und elektiven Absorption vom Standpunkte der Maxwellschen Theorie 410
356. Krystalloptik 411

20. Kapitel. Zur Energetik von Systemen, deren Zustand durch beliebig viele allgemeine Koordinaten (Parameter) bestimmt ist . . 413

357. Die Zustandsparameter (allgemeine Koordinaten) 414

Seite

A) Ausdrücke für die Energie 416

358. Ausdruck für die kinetische Energie in cartesischen Koordinaten 417
359. Einführung allgemeiner Koordinaten 418
360. Ausdruck für die Energie in allgemeinen Koordinaten . . . 420
361. Einführung der verallgemeinerten Momente 421
362. Der Eulersche Satz 422
363. Ausdruck für die Energie in verallgemeinerten Momenten . . 422
364. Beziehungen der Koeffizienten A und B zu einander . . . 425
365. Beziehung der Ableitungen der Energie nach den Parametern 426

B) Die allgemeinen Parameterkräfte. (Verallgemeinerte Bewegungsgleichungen.) 428

366. Begriff des Kraftmomentes 429
367. Beziehung der Kraftmomente zu den rechtwinkligen Komponenten der Kräfte 430
368. Ableitung der allgemeinen Lagrangeschen Bewegungsgleichungen 431

21. Kapitel. Zur Energetik polycyklischer Systeme 434

A) Einführung der Bezeichnungen und Beispiele mechanischer Cykelbewegungen 434

369. Langsam und schnell veränderliche Koordinaten 435
370. Monocykel mit einem Parameter: Beispiel des einfachen Centrifugalregulators 437
371. Elimination von Parametern; unvollständige Systeme. . . . 439
372. Monocykel mit willkürlicher Parameterkoppelung 440
373. Monocykel mit zwei Parametern: Beispiel des Gyroskopes . . 445

B) Energie polycyklischer Systeme 449

374. Formen der Energie des Polycykels 450
375. Die cyklischen Momente 451
376. Die polycyklischen Bewegungsgleichungen 452

C) Arbeitsleistungen polycyklischer Systeme 454

377. Arbeit der Kräfte, welche ein Polycykel nach aussen ausübt 455
378. Abgegebene Arbeit. Beziehung zum Energieinhalte des Systems 456
379. Arbeit der Kräfte, welche von aussen auf ein System wirken 456
380. Von einem cyklischen Systeme aufgenommene Arbeit. Beziehung zum Energieinhalte des Systems 457

D) Energetik der Monocykeln 459

381. Energie der monocyklischen Systeme 459
382. Vergleich der von dem Systeme aufgenommenen Arbeit mit seinem Energieinhalte 460
383. Einführung des Entropiebegriffes 460
384. Endliche Ketten von Zustandsänderungen 461
385. Kreisprozesse 462
386. Isentropische Zustandsänderungen 463

22. Kapitel. Allgemeine Cykeltheorie 464

A) Die beiden Haupttypen polycyklischer Bewegungssysteme 464

387. Adiabatisch cyklische Bewegungsformen 464
388. Erläuterung der Bezeichnung 465

Seite

389. Bedeutung der „adiabatisch cyklischen Bewegungen" im Naturhaushalte 466
390. Analytische Bedingung für die adiabatische Bewegung . . . 466
391. Isocyklische Bewegungsformen 467
392. Erläuterung der Bezeichnung 467
393. Äusserliche Unterschiede zwischen adiabatisch und isocyklischen Bewegungen 467
394. Analytische Bedingung für die isocyklische Bewegung . . . 468

B) Die Kräftefunktionen der adiabatisch cyklischen und der isocyklischen Bewegungssysteme 468

395. Die Kräftefunktion 469
396. Kräftefunktion der adiabatisch cyklischen Bewegungen . . . 469
397. Beziehung zur kinetischen Energie der Cykelbewegungen . . 470
398. Kräftefunktion der isocyklischen Bewegungen 470
399. Beziehung zur kinetischen Energie der Cykelbewegung . . . 470
400. Beziehungen der aufgenommenen und abgegebenen Energiemengen eines Systems untereinander und zu dem Energieinhalte des Systems 471

C) Hauptsatz der adiabatischen Cykelbewegungen 477

401. Das Fr. Neumannsche Gesetz der Induktion 477
402. Entsprechender Satz der adiabatisch cyklischen Systeme . . 478
403. Einwirkung von aussen auf das adiabatisch cyklische System und ihre Folgen 479
404. Berechnung des Zuwachses, den die kinetische Energie bei der Zustandsänderung erfährt 480
405. Parameterkräfte, welche den Änderungen der cyklischen Intensitäten zukommen 481
406. Berechnung der Arbeit der hinzukommenden Parameterkräfte 482
407. Beweis, dass die neuen Parameterkräfte den ursprünglich wirkenden äusseren Kräften entgegenwirken 484

23. Kapitel. Reciproke Eigentümlichkeiten cyklischer Systeme . . . 485

408. Allgemeiner Begriff und Schema der reciproken Eigentümlichkeiten 485
409. Bedeutung der reciproken Eigentümlichkeiten 486
410. Beziehungen zwischen den an Parametern angreifenden Kräften und den Parametern selbst 487
411. Beziehungen zwischen den Systemkräften und den Änderungsgeschwindigkeiten ihrer Koordinaten 488
412. Beziehung zwischen den an Parametern angreifenden Kräften und den cyklischen Momenten einerseits und den cyklischen Intensitäten und den Parametern andererseits 492
413. Spezielle Form bei Monocykeln 495
414. Beziehungen der an Parametern und an cyklischen Koordinaten angreifenden Kräfte zu Änderungen cyklischer Intensitäten und der Parameter 496

Figurenverzeichnis.

I. Abschnitt: Magnetismus.

Fig.		Seite
1)	Kraftlinien eines natürlichen Magneten	5
2 a) und 2 b)	Natürlicher Magnet ohne und mit Eisenarmaturen	10 und 11
3)	Feld vor den Polschuhen eines armierten natürlichen Magneten	12
4)	Kraftlinienverlauf um einen Stabmagneten herum in einer zu seiner Achse parallelen Ebene	17
5)	Kraftlinienverlauf bei einem Stabmagneten in einer zu seiner Achse senkrechten Ebene in der Nähe eines Poles	18
6)	Kraftlinienfeld eines kleinen Hufeisenmagneten in einer seiner Mittelebene parallelen benachbarten Schnittebene	20
7)	Kleine Magnetnadel mit Schreibstift zum Zeichnen der Kraftlinien	28
8)	Ponderomotorische Wirkung zweier Magnetstäbe aufeinander	31
9)	Lager für zwei aufeinander wirkende Magnetstäbe	32
10)	Feld zwischen zwei in gegenseitiger Verlängerung liegenden Stabmagneten bei Zukehrung gleichnamiger Pole (Abstossung)	33
11)	Dasselbe bei Zukehrung ungleichnamiger Pole (Anziehung)	34
12)	Kraftlinienfeld zweier ungleichnamiger Magnetpole (das bipolare Feld)	35
13)	Kraftlinienfeld zweier gleichnamiger Magnetpole (das bipolare Feld)	35
14)	Apparat zur Demonstration der Quellpunkte und der Sinkstellen eines Magnetfeldes	37
15)	Feld zwischen zwei einander parallel liegenden Magnetstäben bei Gegenüberliegen ungleichnamiger Pole	38
16)	Dasselbe bei Gegenüberliegen gleichnamiger Pole	39
17)	Dasselbe vor dem Ineinandergreifen der Feilichtketten	39
18)	Feld zweier senkrecht gegeneinander verlaufender Stabmagnete	40
19)	Modell des erdmagnetischen Kraftlinienfeldes	44
20)	Modell des erdmagnetischen Kräftepaares	46
21)	Apparat zur Erzeugung eines Kraftlinienfeldes um eine Kugel herum (erdmagnetisches Feld)	51
22)	Kraftlinienverlauf im erdmagnetischen Felde (Meridianschnitt)	51
23)	Verminderung der Flächenstärke eines geradlinig sich von einem Punkte aus verbreitenden Agens	63
24)	Kraftlinienbündel	77
25)	Kraftflussdiagramm des unipolaren Magnetfeldes	Tafel I

Fig. Seite
26) Kraftflussdiagramm des bipolaren Magnetfeldes (gleich starke ungleichnamige Pole) . . . . . Tafel I
27) Konstruktionsschema für die Kombination zweier Felder 83
28) Bipolares Magnetfeld verschieden starker ungleichnamiger Pole . . Tafel I
29) Dasselbe für verschieden starke gleichnamige Pole . . . . . Tafel I
30) Kraftflussdiagramm eines homogenen Feldes mit eingelagertem Magnetpol . . . . . Tafel I
31) Kraftlinienverlauf um einen im bipolaren Felde liegenden Eisenring herum (magnetischer Schutzring) 95
32) Veränderung des Kraftlinienverlaufes im homogenen Felde durch einen paramagnetischen und einen diamagnetischen Körper 98
33) Geschlitzter Eisenanker mit grossem magnetischen Widerstande . . . 104
34) Rotationsmodell 112
35) Parallelogramm der Drehungsvektoren 113
36) Gyroskopisches Modell eines Kraftröhrenelementes 116
37) Ponderomotorische Antriebe eines *n*-Poles in einem Magnetfelde infolge der Superposition von Drehbewegungen 117
38) Dasselbe für einen *s*-Pol 118
39) Gyroskopisches Kraftröhrenmodell 118
40) Kraftröhrenmodell des Stabmagneten 119
41) Kraftröhrenmodell der magnetischen Lamelle 119
42) Gyroskopisches Modell des gesamten durch einen Magnetstab gehenden Kraftflusses 119
43) Wirbelfaden als Modell einer magnetischen Kraftröhre 122
44) Rauchring, als Modell einer geschlossenen ringförmigen Kraftröhre . . 124
45) Mechanischer Monocykel 130

II. Abschnitt: Elektromagnetismus.

46) Kraftlinienverlauf in einer zur Achse eines geradlinigen Leiters parallelen Ebene 140
47) Apparat zur Erzeugung konzentrischer Kraftliniensysteme 141
48) Kraftlinienverlauf in einer zur Achse eines geradlinigen Leiters senkrechten Ebene. (Konzentrisches Kraftliniensystem.) 142
49) Querschnitt des konachsialen Kraftliniensystems mit den Maxwellschen Drehbewegungen 145
50) Die Achsenschleife mit ihrem magnetischen Kraftflusse 147
51) Kraftlinienverlauf durch eine Achsenschleife hindurch 147
52) Zusammenschnürung eines Kraftlinienbündels durch Schleifenbildung in der Kraftachse 148
53) Modell der Achsenschleife mit dem Kraftlinienbündel als Äquivalent einer magnetischen Doppelfläche 150
54) Ampères Kunstgriff: Ersatz des Bewegungssystems auf einer Fläche durch eine Bewegung längs der Umgrenzungslinie 151
55 a) und b) Feldraum einer magnetischen Lamelle (einfach zusammenhängender Raum) 156
56 a) bis d) Feldraum einer Stromschleife (zweifach zusammenhängender Raum) 157

Fig.		Seite
57)	Kraftlinienverlauf in einer zu einem Stromträger senkrechten Ebene, welche einen *s*-Pol enthält	159
58)	Dasselbe bei eingelegtem *n*-Pol	159
59)	Kraftlinienverlauf in einer zu einem Stromträger parallelen Ebene, welche eine kleine Magnetnadel enthält	161
60)	Kraftlinienverlauf in einer zu einem Stromträger senkrechten Ebene, welche eine gegen den Träger gerichtete Magnetnadel enthält	163
61)	Kraftlinienbündel einer Stromschleife, in deren Ebene eine Magnetnadel liegt	164
62)	Apparat zur Erläuterung des Biot-Savartschen Gesetzes	166
63)	Drei Magnetstäbe im konzentrischen Felde	166
64)	Schema des einarmigen Hebels zur Ableitung des elektromagnetischen Grundgesetzes	166
65)	Strommodell	168
66)	Das Stromfeld als mechanischer Monocykel (Modell)	171
67)	Schema der absoluten Stromstärkemessung in elektromagnetischem Maasse	176
68)	Konstruktion von Diagrammen konachsialer Felder	178
69)	Diagramm des konzentrischen Kraftliniensystems eines geradlinigen Stromträgers	Tafel II
70)	Kraftliniendiagramm des elektromagnetischen Grundversuches (Bewegung eines Magnetpoles in dem Felde eines galvanischen Stromes)	Tafel II
71)	Kraftlinienverlauf in einer durch die Achse einer Stromspule gelegten Ebene	183
72)	Apparat zur Demonstration der Solenoidfelder	185
73)	Kraftlinienverlauf bei Solenoiden	186
74)	Apparat zur Demonstration der Felder enger Spiralen	189
75)	Feld eines Solenoidpoles	190
76)	Einwirkung einer Stromspirale auf einen konachsialen Stabmagneten	190
77)	Weicher Eisenkern in dem Felde eines Stromspiralenendes	191
78)	Weiches Eisen in dem inneren homogenen Teile des Feldes einer Stromspirale	193
79)	Apparat zur Erläuterung der Bewegungsantriebe, welche ein Stromelement in einem Magnetfelde erfährt	198
80)	Kraftröhrenmodell eines in einem Magnetfelde liegenden geradlinigen Stromträgers	201
81)	Faradays elektromagnetischer Rotationsapparat	202
82)	Elektromagnetischer Rotationsapparat	203
83)	Modell der magnetelektrischen Maschine	204
84)	Biegsamer Leiter im Felde eines Stabmagneten	207
85)	Querschnitt durch ein zweiachsiges Magnetfeld	212
86)	Kraftlinienbild in einer zu zwei gleich gerichteten Parallelströmen senkrechten Ebene („elektrodynamische“ Anziehung)	212
87)	Dasselbe bei entgegengesetzter Richtung der beiden Ströme („elektrodynamische“ Abstossung)	214
88)	Figur zur Erläuterung des Kombinationsprinzips elektrodynamischer Felder	220
89)	Kraftflussdiagramm zweier gleich gerichteter Parallelströme (Bildebene senkrecht zur Stromrichtung)	Tafel II
90)	Innerer Teil des zweiachsigen Kraftflussdiagrammes (Verschmelzen der Kraftröhren)	Tafel II

Fig. Seite
91) Kraftflussdiagramm zweier entgegengesetzt gerichteter Parallelströme Tafel II
92) Innerer Teil des zweiachsigen Kraftflussdiagrammes (Zurückstauung der Kraftröhren) . . . . . Tafel II
93) Kraftliniendiagramm einer Stromschleife, welche eine Magnetnadel umfasst (Tangentenbussole) . . . . . Tafel II

III. Abschnitt: Erscheinungen der Induktion.

94) Schwebendes Gleitstück zwischen den Schenkeln eines Hufeisenmagneten 231
95) Gyroskop 234
96) und 97) Leiterschleife mit beweglicher Seite zur Demonstration der Energieumsetzungen beim Induktionsvorgange . . . . . 235 und 236
98) Leiterschleife mit Gleitstück zur Erläuterung der Maxwellschen Regel 237
99) Direkter und inverser Induktionsstrom 238
100) Apparat zur Demonstration der unipolaren Induktion 249
101) Hufeisenmagnetmagazin mit Gleitschienenanordnung zur Anstellung des quantitativen Grundversuches über Induktion 254
102) Stempel in einem Rohre 260
103) Schema der Induktionswage 262
104) Elastisch gekoppelter Monocykel zur Erläuterung der im Felde bestehenden elektrischen Spannungen 271
105) und 106) Modell der Gleichstrommaschine 275
107) Siemensscher Doppel-T-Anker 277
108) Pacinotti-Grammescher Ring 279
109) Hefner-Alteneckscher Trommelanker 281
110) Gleichstrom-Dynamo, Siemenssche H-Type (Serien- oder Hauptschlussmaschine) 284
111) Schuckertsche Flachringanker-Dynamomaschine 285
112) Vierpolige Gleichstrom-Dynamo der A.E.G. 286
113) Schleifringe und Bürsten eines Wechselstrommaschinenmodelles . . . 288
114) Kraftlinienverlauf im magnetischen Drehfelde 294
115) Zweiphasiges magnetisches Drehfeld 295
116) Ring-Transformator 300
117) Doppel-E-Transformator 301
118) Querschnitt durch einen Dreiphasenstrom-Transformator 301
119) Phasen-Transformator 302
120) und 121) Modell eines mechanischen Dicykels 320
122) Dasselbe 322
123) Schema der Wheatstoneschen Stromverzweigung 336
124) Verlauf des Schliessungsstromes 342
125) Verlauf des Öffnungsstromes 342
126) Phasenverschiebung zwischen E.M.K. und Stromstärke beim harmonischen Wechselstrome 346
127) Graphische Darstellung der Beziehungen zwischen Induktanz, Resistanz Impedanz und Phasenverschiebung 347

IV. Abschnitt: Erscheinungen des elektromagnetischen Feldes.

Fig.		Seite
128)	Modell eines elastisch gekoppelten bremsbaren Monocykels. . .	Tafel III
129)	Bremsbare Einzelrolle (Modell eines Feldelementes)	356
130) und 131)	Sinn der Energiewanderung (Korkzieherregel)	360
132)	Verteilung der Spannungen in dem Felde eines stationären geradlinigen, sehr langen galvanischen Stromes	Tafel III
133)	Verteilung der Spannungen in dem homogenen elektrischen Kraftfelde eines Plattenkondensators	Tafel III
134)	Schema zur Bildung des Linienintegrales eines Vektors	384
135)	Weinwendiges Koordinatensystem	392
136)	Schema zur cyklischen Vertauschung	395
137)	Centrifugalregulator	437
138)	Centrifugalmaschine mit einem willkürlich veränderlichen Parameter .	442
139)	Drehungskomponenten in einer Meridianebene des Gyroskopes . . .	447
140)	Drehungskomponenten in der Äquatorialebene des Gyroskopes . . .	447

I. Abschnitt.

Erscheinungen des Magnetismus.

1. Kapitel.

Der Magnet und das magnetische Feld.

A) Der einfache natürliche Magnet.

1. Der Magnetstein. — Bereits im Altertum war es aufgefallen, dass gewisse Eisenerze die Eigenschaft besitzen, kleinere Eisenteilchen in besonderer Weise an sich haften zu lassen. Ausgezeichnet waren in dieser Beziehung vor allem die Erze, welche aus den Gruben bei der Stadt Magnesia am Mäanderflusse in Karien (Kleinasien) stammten, so dass der „magnetische Stein" (ἡ Μαγνῆτις λίθος) eine gewisse Berühmtheit erlangte. Er gab der ganzen hier zu behandelnden Erscheinungsgruppe den Namen der „magnetischen".

Den Stein selbst nennt man kurz einen Magneten und zwar zum Unterschied vom künstlich hergestellten einen „natürlichen Magneten".

Der „Magnetstein" oder auch das Magneteisen ist ein aus gleichen Äquivalenten Eisenoxyd und Eisenoxydul nach der Formel $FeO \cdot Fe_2O_3$ zusammengesetztes Eisenerz (Ferroferrioxyd). Meist kommt es in dichten homogenen Stücken von mattglänzend schwarzer Farbe vor; ist es krystallisiert, so zeigt es die Formen des regulären Systems. Ausser ihm kommt auch der Schwefelverbindung des Eisens, dem Magnetkies ($6\ FeS \cdot Fe_2S_3$) die genannte Fähigkeit zu. In viel geringerem Grade findet man sie bei den Kobalt- und Nickelerzen.

2. Die magnetische Eigenschaft. — Versuch 1. Man wälzt ein Stück Magneteisen in Eisenfeilicht: An vielen, nicht an allen Stellen, besonders an hervorspringenden Ecken und Kanten bleiben Büschel oder Bärte von Feilicht hängen.

Taucht man einen beliebigen anderen Körper, z. B. einen Finger, in das Feilicht, so bleiben ebenfalls einige Späne hängen, das Anhaften ist aber augenscheinlich von ganz anderer Art. Der Vergleich lässt erkennen, dass von dem Magnetstein eine besondere Wirkung auf die Eisenteilchen ausgeübt wird.

Wiederholt man den Versuch mit anderen Prüfungskörpern als Eisenteilchen und lässt den Magnetstein z. B. auf Kupfer- oder Messingspäne oder auf Kieselsäure (SiO_2) in Form von Quarzsand einwirken, so bemerkt man ausser dem Anhaften (Adhärieren), welches eine all-

gemeine Eigenschaft miteinander in Berührung gebrachter Körper ist, keine besondere Wirkung auf die Teilchen.

Hieraus ist noch nicht zu schliessen, dass die genannten Körper überhaupt nicht der magnetischen Wirkung unterworfen sind. Wir werden später erwähnen, wenn wir die Erzeugung sehr starker magnetischer Wirkungen kennen gelernt haben, dass alle Substanzen, selbst die Gase, auf die magnetische Einwirkung reagieren. Unser Versuch lehrt also nur, dass Eisen dies in ganz hervorragender Weise thut. Daher werden wir es zum näheren Studium dieser Wirkungen hinfort verwenden. Wir bezeichnen es als „starkmagnetisch", im Gegensatz zu „schwach magnetischen" Körpern; unmagnetische giebt es nicht.

3. Begriff des Magneten. — Jedes Gebilde, von dem ähnliche Wirkungen ausgehen, wie vom Magnetstein, wollen wir einen „Magneten" nennen.

So wird uns der sogenannte „galvanische Strom" zunächst als ein „Magnet" entgegentreten, weil wir bei seiner Schilderung von seinen „magnetischen Wirkungen" ausgehen wollen, die wir uns zunächst gerade so durch Eisenfeilicht anschaulich machen, wie wir es hier in dem ersten Abschnitt mit allen „gewöhnlichen" Magneten thun.

4. Nähere Prüfung der Art der magnetischen Wirkung. — Versuch 2. Beim Drehen eines Stückes Magneteisenstein, welches in Eisenfeilicht getaucht worden ist, zeigen sich die anhaftenden Büschel nicht nur dem Einfluss der Schwere unterworfen, sondern sie scheinen selbst der Sitz von besonderen Wirkungen geworden zu sein: Zwischen ihren einzelnen Fasern findet offenbar eine Wechselwirkung statt; sie zeigen eine gewisse Steifigkeit. Sucht man sie von dem Magneteisenstück zu entfernen, so ziehen sie sich zu Ketten aus, indem sich Eisenteilchen an Eisenteilchen hängt.

Besonders deutlich sieht man dieses, wenn man die Teilchen durch eine Unterlage unterstützt, so dass sie nur zum Teil von dem Magnetstein getragen werden.

Versuch 3. Auf ein Stück weissen Kartons streut man Eisenfeilicht und fährt mit einer Ecke des Steines, die sich bei Versuch 1 als besonders wirksam erwies, über das Blatt hin: Der Feilichtbart wächst dadurch, dass bereits anhängende Feilspäne die Eigenschaft des Magnetsteins annehmen und selbst neue Eisenteilchen heranziehen.

Die magnetische Wirkung wird also von den sich aneinander kettenden Eisenspänen aufgenommen und von Teilchen zu Teilchen weitergegeben.

In der Nähe ist die Wirkung am grössten, sie nimmt mit der Entfernung ab; werden die Ketten zu lang, so reissen sie, die aneinander fügenden magnetischen Kräfte vermögen die durch die Schwere der einzelnen Teilchen bedingten Reibungskräfte schliesslich nicht mehr zu überwinden.

5. Kraftlinienbilder. — Das bisherige Verfahren, die von dem Magneteisen auf Eisenteilchen ausgeübte und von diesen aufgenommene

und weiter geführte Wirkung zu untersuchen, ist noch unvollkommen. Wir müssen dafür sorgen, dass bei der Bildung der beobachteten Wirkungsketten die Schwere möglichst aus dem Spiele bleibt. Dies können wir am einfachsten dadurch erzielen, dass wir die Teilchen auf eine horizontale Unterlage streuen, welche von magnetischen Wirkungen durchsetzt wird.

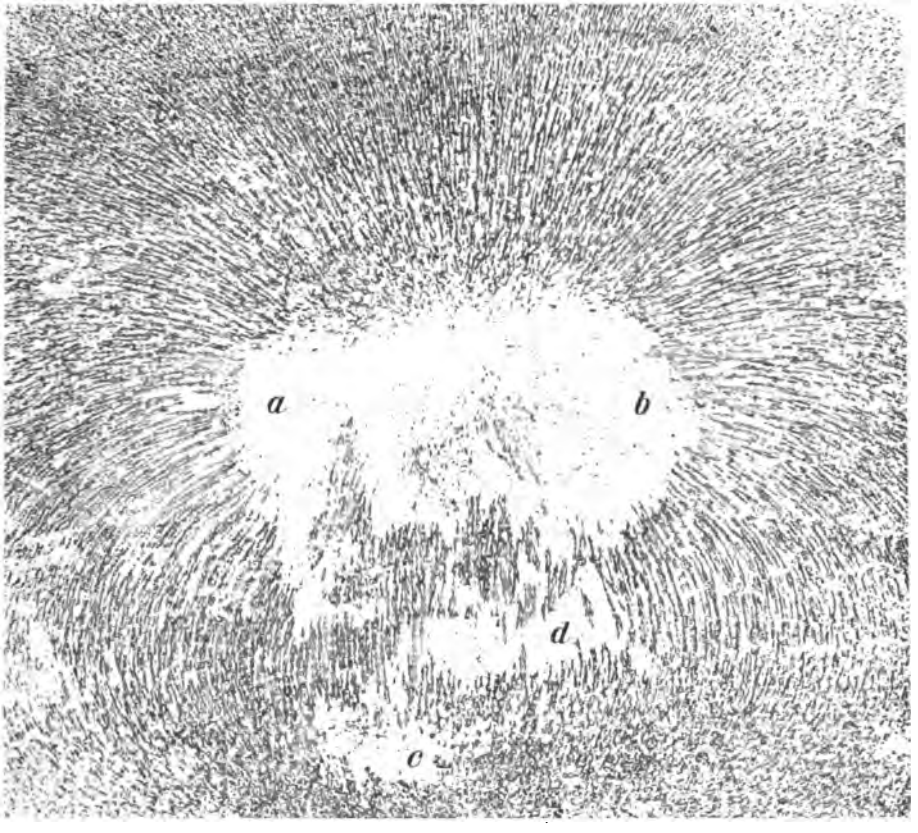


Fig. 1.

Versuch 4. Auf das horizontal liegende Blatt wird mittels eines Siebes Eisenfeilicht aus grösserer Höhe möglichst gleichförmig aufgestreut. Dann legt man den vorher von bereits anhaftenden Eisenteilchen gereinigten Magnetstein darauf und klopft auf verschiedene Stellen des Blattes. Die Feilspäne ordnen sich in regelmässig geschwungenen Linien, Fig. 1, an; dies sind die sogenannten

Faraday'schen Magnetkraftlinien.

Die Eisenfeilichtbilder waren schon vor FARADAY bekannt; allein man widmete ihnen nicht die gebührende Beachtung. Für FARADAY wurden sie der Ausgangspunkt umgestaltender Gedankenreihen; wir nennen sie daher nach ihm.

Diese Kraftlinien lassen deutlich erkennen, wie die Wirkung, welche von dem Magnetstein ausgeht, von Eisenteilchen zu Eisenteilchen in bestimmten Richtungen weitergegeben, gewissermassen „fortgeleitet" wird. Denn wir sehen, wie die Teilchen auch in grösserer Entfernung vom Stein gerichtet sind und sich, dem Verlauf der sie treffenden Linie entsprechend, eingestellt haben.

6. Praktische Winke zur Herstellung magnetischer Kraftlinienbilder. — Da wir uns im folgenden sehr häufig des überaus wichtigen Hilfsmittels der Kraftlinienbilder bedienen werden, wollen wir schon hier einiges über die Herstellung derselben sagen.

1. Sehr augenfällige, aber etwas grobe Bilder erhält man durch Aufstreuen von feinerem Eisenfeilicht. Dieselben eignen sich besonders zur Demonstration vor einem grösseren Kreise.

Damit sich die Feilspäne möglichst schwarz von der weissen Papierunterlage abheben, glüht man sie vor dem Gebrauch am besten noch einmal aus. Dabei verwandelt sich ein Teil des Eisens in Ferroferrioxyd, welches nach § 1 ebenfalls fähig ist, die magnetische Wirkung anzunehmen; die meist von der Bearbeitung her noch anhaftenden Verunreinigungen, namentlich Öle, werden verbrannt. Man siebt durch ein eisenfreies Sieb, etwa durch ein solches von Porzellan.

2. Will man feinere Züge des Bildes studieren, so verwendet man Ferrum pulveratum oder das feinste Eisenpulver: Limatura ferri alcoholisata. Man füllt damit ein kleines Leinenbeutelchen, welches man schüttelt; dann erhält man eine feine, graue Staubdecke auf der Unterlage.

Bei längerem Liegen pflegt das Eisenpulver Feuchtigkeit anzunehmen; es ballt sich zusammen und giebt störende Flecke beim Aufstäuben. Um dies zu vermeiden, glüht man auch die Limatura aus (etwa auf einer Kupferplatte über der Gebläselampe). In der Reibschale zerrieben, giebt sie dann ein schwarzes, sehr feinkörniges Pulver, welches sich ganz gleichmässig durch Leinen sieben lässt. In keinem Falle darf die Bestreuung eine zu dichte sein.

Als Unterlage verwendet man glattes, weisses Kartonpapier. Sind die magnetischen Kräfte sehr stark, so rutschen die Eisenteilchen auf dem Karton fort und häufen sich zu in die Höhe stehenden Büscheln an. Man verwendet dann besser rauhes Schreibpapier oder in besonderen Fällen sogar gekörntes Zeichenpapier.

Für Projektionszwecke erzeugt man die Kraftlinienbilder auf Glasplatten (was sonst nicht zu empfehlen ist); sie werden in horizontaler Lage in den Gang der Strahlen gebracht.[1]) Soll nur das fertige Bild vorgeführt werden, so fixiert man die Kraftlinien in einer im folgenden Paragraphen angegebenen Weise.

[1]) Dazu muss der gewöhnlich horizontal austretende Lichtkegel der Lampe auf eine kurze Strecke vertikal verlaufen; dies wird am besten durch zwei grössere total reflektierende Prismen erreicht.

Damit die Bilder klar werden, klopft man mit einem Hämmerchen (einem an ein Stück Fischbein gesteckten Korke) auf die Unterlage, wodurch die Eisenteilchen auf kurze Momente abgehoben werden.

Will man das Bild an einzelnen bestimmten Stellen besser herausklopfen, oder andere, die nicht mehr erschüttert werden sollen, festhalten, so benutzt man ein zugespitztes Glasstäbchen. Durch dieses Klopfen hat man das Bild förmlich „herauszuhämmern".

Andere Verfahren, welche einen Überblick über die räumliche Anordnung der Magnetkraftlinien gestatten, wollen wir später im Zusammenhange mit den dazu nötigen stärkeren magnetischen Kräften besprechen.

7. Fixierung der Kraftlinienbilder. — Um die entstandenen Kraftlinien auch nach der Wirkung des erzeugenden Magneten dauernd zu erhalten, kann man verschiedene Methoden anwenden:

1. Fixieren durch einen Schellackspray. Nachdem die Kraftlinien herausgeklopft sind, sprengt man auf das Bild mit einem gewöhnlichen Zerstäuber einen feinen Sprühregen einer dünnflüssigen Lösung von weissem Schellack oder von Mastix in Alkohol; beim Eintrocknen der Lösungen haften die Eisenteilchen leidlich fest. Man muss vermeiden, zu grosse Tropfen mitzureissen oder den Zerstäubungsstrahl direkt auf das Papier zu richten.

2. Abdrücken auf Klebepapier. Auf das Feilichtbild legt man ein mit Stärkekleister oder Gummi arabicum gleichmässig und dünn bestrichenes Papier, drückt mit einem Tuche oder dem Handballen an und zieht dann das Bild ab (Pfaundler). Der Leim darf nicht zu dünnflüssig sein, sonst haftet er an der Unterlage. Man lässt daher die Oberfläche besser erst etwas trocknen, ehe man abdrückt; soll der Abdruck zu Projektionszwecken dienen, so benutzt man eine Glasplatte, auf die man den Leim giesst, den man etwas eintrocknen lässt, denn beim Auftragen mit dem Pinsel bekommt man leicht Striemen und Blasen. Figg. 1, 3, 5, 12, 13.

3. Fixieren durch Erweichen der Unterlage. Die Kartonblätter oder Glastafeln, auf denen man die Bilder erzeugen will, bestreicht man mit Schellacklösung und lässt diese eintrocknen; sehr gut eignet sich der zum Lackieren von Gelatineplatten gewöhnlich verwendete sogenannte Negativlack. Man erzeugt das Kraftlinienbild und stäubt dann etwas von derselben Lösung oder etwas Alkohol auf, wodurch die Eisenteilchen festgeklebt werden. Die Figg. 10, 11, 15 sind photographische Verkleinerungen solcher Fixierungen auf Negativlack. Bei gelindem Erwärmen werden die Lackschichten genügend durchsichtig, so dass die Bilder im durchfallenden Lichte (Tageslicht) photographisch kopiert werden können.

Man kann auch Papiere oder Glasplatten mit einer dünnen Paraffinschicht überziehen, das Kraftlinienbild erzeugen und dann durch Erwärmen fixieren.

4. Photographische Fixierung. Die detailreichsten, auch für Projektionszwecke sich eignenden Fixierungen von Magnetkraftlinienbildern erhält man auf folgendem Wege: In der Dunkelkammer pulvert man auf die Gelatineschicht einer Bromsilbertrockenplatte möglichst gleichmässig feinstes Eisenpulver; dann legt man den die Kraftlinien erzeugenden Körper darauf oder darunter und klopft an den Plattenrändern mittels Glasstäben. Bei der Beleuchtung der Dunkelkammerlaterne oder bei dem durch das rote Glas des Fensters kommenden Lichte kann man leicht erkennen, ob sich die Eisenstaubschicht in möglichst feine und regelmässig verlaufende Linien abgeteilt hat. Man hebt dann den Magneten ab und belichtet eine kurze Zeit lang die mit Eisenpulver bedeckte

Platte (das Licht eines in 1 m Entfernung abgebrannten Zündholzes genügt bei den gewöhnlichen Platten vollkommen). Dann bläst man das Pulver herunter, wischt noch mit einem trockenen weichen Tuche ab, entwickelt und fixiert in bekannter Weise. Die schwarzen Ketten der undurchsichtigen Eisenteilchen erscheinen hell auf dunklem Grunde. Von den Negativen stellt man Positive auf Papier oder Glas her; die Glasdiapositive geben in der Projektionslampe sehr effektvolle Bilder (eventuell verstärkt man noch mit Quecksilberchlorid, um recht kontrastreiche Bilder zu erhalten). Negative, welche zum Projizieren dienen sollen, entwickelt man weniger dicht, als solche, welche erst noch kopiert werden. In dieser Weise wurden die Figg. 2, 4, 6, 16 erhalten. Die Figg. 73, 75, 76, 77, 78 des zweiten Abschnitts sind nach direkten Photographien von Kraftlinienbildern auf Kartonpapier hergestellt. Dabei wurde die Camera an einer vertikal stehenden breiten Holzschiene mit dem Objektiv nach unten in den entsprechenden Höhen über dem horizontalen Bilde festgeklemmt.

Endlich kann man auch das gewöhnliche Lichtpausverfahren, namentlich bei grossen Bildern und bei Anwendung groben Eisenpulvers mit Vorteil verwenden. Man erzeugt die Bilder auf einem lichtempfindlichen Papier, z. B. dem, welches für die bekannten blauen Lichtpausen benutzt wird, belichtet und fixiert nach dem Entfernen des Eisenstaubes.

8. Das Kraftlinienbild eines natürlichen Magneten. — Wir knüpfen an das schon in § 5 erwähnte Bild Fig. 1 an:

α) An Ecken und Kanten, welche besonders starke magnetische Eigenschaften schon bei Versuch 1 und 2 zeigten, heften sich die Eisenteilchen fest an den Stein an, rutschen sogar zu diesen Stellen aus grösserer Entfernung heran. Beim Abheben des Magneten vom Karton werden sie mitgenommen; dadurch sind die hellen Stellen *a*, *b*, *c* und *d* des Bildes entstanden.

β) Von diesen besonders wirksamen Stellen gehen Kraftlinien aus. Die von einer Stelle, z. B. *a* ausgehenden Linien stellen nicht eine geradlinige Verbindung auf dem kürzesten Wege zwischen *a* und *c* her, sondern schwingen sich in mehr oder weniger weitem Bogen zu *c* hinüber und münden hier ein. Ähnliches gilt von *b* und *d*.

γ) Die Kraftlinien drängen sich in der Nähe der wirkenden Stellen *a* und *b* zusammen und gehen nach aussen zu auseinander. Sie sind also in der Nähe dieser Stellen am dichtesten und verlieren sich in wachsender Entfernung; sie drängen sich dort zusammen, wo schon bei dem Grundversuche 1 die stärkste magnetische Wirkung hervortrat.

Die Kraftlinienbilder geben zugleich ein Urteil über Richtung und Stärke der magnetischen Kraft.

9. Begriff der Polarität und der Pole. — Dass die von gewissen Stellen des Magnetsteines ausgehenden Wirkungen von anderen Stellen desselben Steines wieder aufgenommen werden, lässt auf eine gewisse Gegensätzlichkeit in dem Verhalten der verschiedenen Oberflächenpunkte des Magneten schliessen. Dieselbe tritt in dem einfachen an

sich Haftenlassen von Eisenteilchen noch nicht hervor, wohl aber in dem Ein- und Ausmünden der Kraftlinien.

Mit Rücksicht auf die beiden als Pole (von πόλος = Axe, πέλω = ich drehe) bezeichneten entgegengesetzten Enden der Rotationsaxe unseres Planeten pflegt man derartige Gegensätzlichkeiten als „Polaritäten" zu bezeichnen.

Wir wollen alle jene Regionen eines Magneten, von denen Kraftlinien in grösserer Zahl ausgehen, als „Polarregionen" oder kurz als „Pole" bezeichnen.

Auf das analoge Verhalten der Polarregionen unseres Erdkörpers, von denen die eine ebenfalls magnetische Kraftlinien in den Raum hinaussendet, welche die andere Region aufnimmt und wieder in das Erdinnere zurückführt, gehen wir erst später ein.

10. Aufsuchen der Pole eines natürlichen Magneten. — Versuch 4. Man schneidet aus verschiedenen Kartonblättern Öffnungen aus, welche bestimmten Querschnitten des Steines angepasst sind. Bringt man diesen in verschiedene Lagen und erzeugt für jede das Kraftlinienbild in der Horizontalebene, so erkennt man bei dem Vergleiche der einzelnen Bilder miteinander, von welchen Flächen Kraftlinien vorwiegend ausgehen, wie demnach die Polarregionen über die Oberfläche des natürlichen Magneten verteilt sind.

11. Begriff des magnetischen Feldes. — Wir nennen den gesamten Wirkungsbereich eines Magneten, d. h. den ganzen Raum seiner Umgebung, innerhalb dessen sich die von demselben ausgehenden magnetischen Kräfte irgendwie bemerkbar machen, das „Feld des Magneten".

Da wir zunächst wenigstens nicht den Verlauf der magnetischen Wirkung in das Innere des magnetischen Körpers hinein verfolgen können, so beschränkt sich für uns das Feld auf den Aussenraum des Magnetsteines. Es kann hier etwa innerhalb einer Kugel gelegen gedacht werden, welche in einer Entfernung, in der nichts mehr mit unseren bisherigen Hilfsmitteln von der Wirkung nachweisbar ist, den Körper umschliesst. Das Feld erfüllt den schalenförmigen (!) Raum zwischen dieser äusseren Begrenzung und der Oberfläche des Steines. Diese Bemerkung ist wegen einer späteren Betrachtung wichtig. In dem Maasse, als die Hilfsmittel zum Nachweise magnetischer Wirkungen verfeinert werden, erweitert sich die äussere Grenze des Feldes; streng genommen reicht dasselbe von der wirkenden Oberfläche aus nach allen Seiten hin unendlich weit.

12. Kraftlinienverlauf in dem Felde eines natürlichen Magneten. — Um ein Bild des Feldes eines Magnetsteines zu erhalten, müssen wir die in § 10 erhaltenen Kraftlinienbilder miteinander kombinieren. Jedes derselben stellt offenbar nur eine ebene Schnittfigur durch das Feld dar. Wir bemerken dann, wie Kraftlinienbündel von dem Grunde des Feldes in den Polarregionen aufsteigen und sich in mehr oder weniger weitem Bogen wieder zu anderen Regionen herabsenken. Viele Linien

kehren nicht wieder zurück, sondern scheinen sich in den entfernteren Feldpartien zu verlieren.

Ein Magnetfeld ist nach drei Dimensionen hin ausgedehnt, da es einen Raum erfüllt. Insofern ist die Bezeichnung „Feld" nicht ganz zutreffend, da wir uns ein solches gewöhnlich nur zweidimensional, d. h. flächenhaft, ausgedehnt denken.

B) Natürliche Magnete mit Eisenarmaturen.

Das Studium der magnetischen Wirkung wird bei den natürlichen Magneten dadurch erschwert, dass sie meist eine unregelmässige Gestalt haben und ihre Polaritäten zufällig über sie verteilt sind. Wir müssen die Kraftwirkung geeignet dirigieren und auf bestimmte kleinere Distrikte konzentrieren, wozu wir die Eigenschaft des weichen Eisens, die magnetische Kraft aufzunehmen und weiterzuleiten benutzen (§ 4).

13. Übertragung der magnetischen Wirkung auf weiches Eisen. — Versuch 5. Ein Stab von weichem ausgeglühten Eisen wird in einem Holzstativ in vertikaler Richtung festgeklemmt. Nähert man eine mit Eisenspänen gefüllte Schale dem unteren Ende, so bleiben selbst bei Berührung des Stabes mit den Feilspänen fast keine an demselben haften. Legt man aber eine Polecke des Magneteisensteines auf das obere Ende des Stabes, so bleibt ein Bart von Eisenteilchen hängen; die einzelnen Fasern divergieren, man sieht an der Haltung der Feilichtketten, dass jetzt magnetische Kraftlinien aus dem unteren Ende austreten; dieselben sind von dem am oberen Ende aufliegenden natürlichen Magneten bis zum unteren Ende fortgeleitet worden. Nimmt man den Magneten fort, so fallen die Eisenspäne wieder ab.

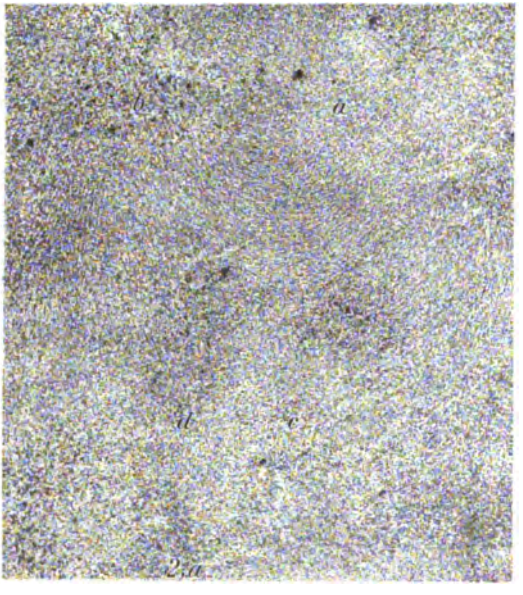


Fig. 2a.

14. Begriff der magnetischen Permeabilität. — Noch deutlicher erkennt man das Fortleiten der magnetischen Kraftwirkung durch

weiches Eisen hindurch, wenn man an zwei Pole eines natürlichen Magneten stabförmige Stücke weichen Eisens anlegt (Fig. 2, a und b).

Versuch 6. Wir setzen ein Stück Magneteisenstein so auf eine horizontale, mit Eisenstaub gleichförmig bedeckte Unterlage, dass zwei Pole dieser möglichst nahe liegen und erzeugen das Kraftlinienbild (Fig. 2 a). Über den Punkten a und b liegen Pole, wie die in der Figur freilich etwas schwer erkennbaren feinen nach unten gebogenen Linien zeigen; die von a ausgehenden Kraftlinien laufen bei b wieder zusammen. In Punkten, die weiter von diesen Stellen entfernt liegen, wie in c und d, ist fast nichts mehr von der richtenden Kraft bemerkbar.

Wir setzen das Magneteisenstück auf eine zweite, etwa gleich dicht bestäubte Unterlage. An die beiden Pole (a^1 und b^1 Fig. 2 b) legen wir zwei längliche Stücke weichen Eisens auf die Unterlage unter den Stein, und richten sie so, dass sie sich mit ihren freien Enden c^1 und d^1 mehr und mehr einander nähern, ohne sich zu berühren, was wir durch ein Stück Kork, welches mit Wachs auf die Stäbchen gekittet wird, verhüten. Beim Klopfen erscheint Fig. 2 b. Der Vergleich der beiden Bilder lässt erkennen:

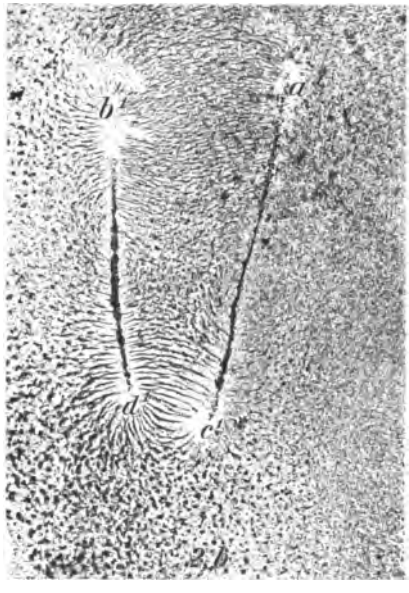


Fig. 2 b.

α) Die Kraftlinien sind zu den Eisenstäbchen hingezogen; sie enden zum grössten Teile an ihnen.

β) Besonders die von dem Steine unmittelbar an den Polen a und b ausgehenden Kraftlinien scheinen gesammelt zu sein und in dem Eisen hinzulaufen.

γ) Dementsprechend ist die Zahl der Kraftlinien, welche zwischen den Eisenstäben von einem zum anderen hinübergeht, vor allem aber die Zahl, die von den freien Enden der Stäbe c^1 und d^1 ausgeht, viel grösser, als sie an den entsprechenden Stellen des magnetischen Feldes ist, wenn die Eisenstäbe nicht eingelegt sind.[1])

Die magnetischen Wirkungen, welche von den Polen a und b ausgehen, machen sich in weiter entfernten Teilen des Feldes bei c^1 und

[1]) Die bei der Herstellung der Fig. 2 b benutzten Eisenstäbchen hatten schon etwas eigenen Magnetismus angenommen.

d^1 geltend, wenn sie dort durch die Vermittelung von weichem Eisen hingeleitet werden. Man spricht mit Rücksicht auf analoge Verhältnisse bei Flüssigkeitsbewegungen von einer hervorragenden „Permeabilität", d. h. Durchströmbarkeit des Eisens für magnetische Kräfte.

15. Magnetische Permeabilität für verschiedene Substanzen. — Versuch 7. Man stellt den Versuch 6 mit einem Paar Holz-, Glas-, Kupfer-, Messingstäben von der Grösse der soeben benutzten Eisenstäbe an: Von einer Fortleitung der magnetischen Wirkung von dem Steine aus ist nichts zu bemerken, die „Permeabilität" der genannten Substanzen ist eine sehr viel geringere als die des Eisens.

Erst bei sehr starken magnetischen Kräften tritt bei diesen Substanzen in geringem Grade etwas ähnliches wie beim weichen Eisen ein.

16. Ausrüstung natürlicher Magnete mit Polschuhen. — Die hohe Permeabilität des weichen Eisens gestattet, das Feld eines natürlichen Magneten zweckentsprechend umzuformen. Dazu belegt man die Polarregionen eines Magneteisensteines mit flachen fest angedrückten Eisenblechen, welche sich in massive Eisenansätze fortsetzen. An diesen erhält man dann sehr kräftige Wirkungen.

Die Polaritäten äussern sich an den freien Enden dieser Eisenbelege, die man zu flach durch dieselbe Ebene abgeschnittenen Ansätzen verdickt.

Man nennt diese Ansätze sehr bezeichnend Polschuhe und die mit denselben versehenen Magnetsteine: „armierte Magnete".

Versuch 8. Man versieht eines der bei dem Versuch 1 benutzten Magneteisenstücke in der angegebenen Weise mit Polschuhen und taucht die Spitzen der Schuhe in Eisenfeilicht: Die sich anhängenden Eisenfeilbärte sind sehr viel länger und kräftiger als vorher an irgend einer Stelle desselben einfachen Magneten.

Versuch 9. Einen armierten Magneten stellt man in einem Holzgestell derart auf, dass die Spitzen der Polschuhe nach oben gerichtet sind. Auf einem nicht zu schmalen und mit Rand versehenen Grundbrette ist ein Klotz festgeleimt, der einen der Form des Magneten angepassten Ausschnitt erhalten hat, in den der Magnet eingesetzt werden kann. Vier, auf dem Grundbrett befestigte Holzsäulchen tragen einen viereckigen Holzrahmen, dessen oberer Rand dieselbe Höhe hat wie die Polschuhenden. Auf diesen Rahmen werden die bei Erzeugung der Kraftlinienbilder zu benutzenden Kartonblätter oder Glastafeln aufgelegt. Während des Nichtgebrauches legt man ein Stück weichen Eisens über beide Pole. Das Kraftlinienbild Fig. 3 lässt die von einem Pole n zu dem anderen s hingehende Wirkung erkennen. Die grosse Dichtigkeit der Linien um die Pole herum deutet auf die vermehrte Konzentration der Kraft an diesen Stellen hin.

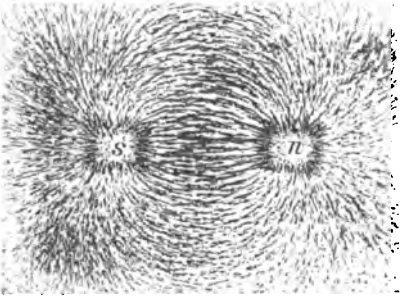


Fig. 3.

Für spätere Zwecke empfiehlt es sich, die Pole in bestimmter Weise zu bezeichnen, den einen etwa rot, den anderen blau (am besten mit Emaillefarbe). Wir wollen dann sagen, die Kraftlinien gehen von dem roten Pole (*n*) aus und zu dem blauen (*s*) hinüber.

17. Die Ankerschliessung. — Bringen wir ein Stück weichen Eisens von der Länge des Polabstandes des armierten Magneten in die Nähe der Polschuhe, so gehen die Kraftlinien zu demselben über. Wie kleine Eisenteilchen aneinander gekettet werden, so wird hier die ganze Eisenmasse an den Polschuhen festgehalten, wenn wir sie als verbindendes Glied auf dieselben legen. Kehren wir den Magneten um, so trägt er die Eisenmasse; die verbindende Kraft, „die Tragkraft", ist also verhältnissmässig gross, die Kraftlinienverkettung überwindet die Schwerkraft. Das Eisenstück liegt auf den Polschuhen am Grunde des magnetischen Feldes fest. Man nennt es den Anker.

Den von den Polen eines Magneten ausgehenden Kraftlinienstrom in dieser Weise zu schliessen, ist für die Erhaltung der magnetischen Wirkung sehr wichtig.

Versuch 10. Wirkung des Ankerschlusses. Man legt einen armierten Magneten horizontal, erzeugt das Kraftlinienbild vor den Polschuhen und fixiert. Dann legt man vor die Schenkelenden den Anker, erzeugt wieder ein Bild, rückt ihn näher heran, bildet das Feld aufs neue ab u. s. f. Der Vergleich der verschiedenen Bilder zeigt, dass das Ankerstück die von den Magnetschenkeln auslaufenden Kraftlinien in sich aufnimmt und sie dadurch sammelt; selbst von der Seite her dringen die sich nach dem Anker zu umbiegenden Linien ein. Je näher er dem Magneten rückt, um so dichter und kräftiger bilden sie sich zwischen beiden aus; dabei verlaufen sie fast ausschliesslich in den schmalen Zwischenräumen zwischen einem Ankerende und dem nächsten Pole des Magneten und überbrücken geradlinig auf dem kürzesten Wege die noch übrige Kluft. Bringen wir den Anker also in Berührung mit den Polflächen, so wird er hier fest angeschlossen: „Kraftlinienschluss".

C) Künstliche Magnete verschiedener Formen und ihre Felder.

Wir würden in der Erkenntnis der magnetischen Erscheinungen nur sehr langsam vorangekommen sein, wenn wir nur auf die natürlichen und die armierten Magnete angewiesen wären. Die Beschränkung liegt einmal darin, dass wir in der freien Gestaltung der Magnetformen behindert wären, andererseits darin, dass natürliche Magnete immer nur schwache und mit der Zeit abnehmende magnetische Kräfte zur Verfügung stellen. Erst als man gelernt hatte, beliebig geformte Magnete anzufertigen, und magnetische Kräfte zu summieren, hatte man die Hilfsmittel zu weiterem Vordringen in der Hand.

Wenn wir im folgenden die wichtigsten Formen der Magnete, die man „künstlich" hergestellt hat, beschreiben, soll es uns hauptsächlich auf die Gestaltung ihrer Felder ankommen, die wir wie früher

an Eisenfeilichtbildern studieren. Denn der Kraftlinienverlauf spielt bei den Anwendungen dieser Magnetformen die wichtigste Rolle.

18. Übertragung der magnetischen Wirkung auf Stahl. — Die Eisenteilchen, welche bei den vorigen Versuchen im Felde eines natürlichen Magneten magnetische Eigenschaften annahmen, die sie befähigten, andere Eisenteilchen an sich zu ketten, verlieren diese Eigenschaft, sowie sie aus dem Felde entfernt werden. Es ist daher äusserst wichtig, dass wir das Eisen in eine Modifikation überführen können, in der es im stande ist, einmal angenommene magnetische Eigenschaften auch dauernd zu behalten. Wir erreichen dies durch die Reihe jener Operationen, welche das gewöhnliche Eisen in sogenannten Stahl verwandeln.

Versuch 11. Man wählt eine dicke Stahlstricknadel aus einem grösseren Vorrat aus, welche in Eisenfeilicht getaucht, keine Partikelchen mitnimmt, also unmagnetisch ist.

Sollte sich keine derartige Nadel finden lassen, so muss man „entmagnetisieren". Dazu glüht man eine schwach magnetische Nadel aus und kühlt sie rasch durch Eintauchen in kaltes Wasser ab; dabei verliert sie die ihr innewohnende magnetische Kraft fast vollkommen; ihr Stahl wird zugleich aufs neue gehärtet.

Ein Stück weichen und durch Ausglühen noch besonders weich gemachten Eisendrahtes von derselben Dicke und Länge wie die Nadel wird in einem Holzstativ vertikal befestigt. Berührt man mit einem Polschuh eines armierten natürlichen Magneten das obere Ende, so zeigt sich die schon früher beschriebene Erscheinung: Eisenfeilicht wird von dem unteren Ende festgehalten. Entfernt man den Polschuh, so fallen die Eisenteilchen wieder ab.

Diesen Versuch wiederholt man mit der Stahlnadel: Das untere Ende hält ebenfalls Eisenteilchen fest, freilich weniger als der Eisenstab. Entfernt man aber den Magneten vom oberen Ende, so fallen die Teilchen nicht mehr ab: Die Nadel behält die bei der Berührung angenommene magnetische Wirkung, sie ist dauernd zu einem „Magneten" geworden. Diese Übertragung der „magnetischen Eigenschaft" auf Stahl bezeichnet man als „Magnetisieren"; das Ergebnis ist ein sogenannter „künstlicher Magnet" oder ein „Dauermagnet". Eisen liefert „temporäre", Stahl „permanente" Magnete.

Der Versuch lehrt einen doppelten Unterschied in dem Verhalten des Eisens und Stahles kennen. Eisen nimmt die magnetische Eigenschaft in stärkerem Grade an als Stahl, wird aber auch leicht wieder unmagnetisch; Stahl ist schwerer zu magnetisieren, behält aber den einmal erlangten Magnetismus bei. Die verschiedene Leichtigkeit, mit der Eisen und Stahl einem Wechsel des magnetischen Zustandes folgen, hat man auf eine in diesen Körpern wirksame Kraft zurückgeführt, welche den Magnetismus zu erhalten sucht; man hat sie „Coërcitivkraft" genannt. Eisen hat danach eine geringe, Stahl eine grosse Coërcitivkraft.

19. Die Strichmethoden. Herstellung künstlicher Magnete. — Da es bei der Übertragung der magnetischen Eigenschaft hauptsächlich darauf ankommt, den Kraftlinienverlauf durch das Stahlstück, welches magnetisiert werden soll, hindurch zu leiten, so wird man vollkommenere Magnete erhalten, wenn man die Berührung auf das ganze Stück ausdehnt, d. h. den Stahlstab seiner Länge nach mit einem oder beiden Magnetpolen bestreicht.

a) Der einfache Strich. Versuch 12. Einen unmagnetischen Stahlstab (z. B. eine Stricknadel) legt man auf den Tisch, hält ihn an einem Ende fest und streicht mit einem Polschuhe eines natürlichen Magneten, z. B. dem rot angestrichenen, einige Male über die ganze Länge in derselben Richtung. Beim Aufstreuen von Eisenfeilicht ordnen sich die Teilchen zu Ketten. Kraftlinien gehen von dem Stabe aus und zwar vorwiegend von den Enden. Taucht man diese in Eisenfeilicht, so bleiben starke Bärte an ihnen hängen.

Hat ein Stahlstück magnetische Eigenschaften von einem natürlichen Magneten angenommen, so kann man mit ihm wieder andere Stücke magnetisieren.

Versuch 13. Man bestreicht mit einem Ende einer magnetisierten Stricknadel eine Stahlnähnadel ihrer ganzen Länge nach einige Male in demselben Sinne; auch diese wird ein Magnet; die magnetischen Wirkungen gehen auch hier wesentlich von den Enden aus.

b) Der Doppelstrich. Wenn man das Kraftlinienbild der in der soeben angegebenen Weise magnetisierten Stäbe genauer ins Auge fasst, so bemerkt man, dass auch hier wie bei den natürlichen Magneten die von dem einen Ende ausgehenden Kraftlinien von dem anderen aufgenommen werden. Auch diesen muss also jene Gegensätzlichkeit innewohnen, welche wir durch die Bezeichnung „Polarität" kennzeichnen wollten. Es wird daher vorteilhafter sein, nicht beide Hälften eines zu magnetisierenden Stabes mit demselben Pole eines Magnetisierungsmagneten zu bestreichen, sondern den Magnetismus im einen Ende durch Bestreichen etwa mit dem roten, im anderen durch Bestreichen mit dem blau bezeichneten Pole hervorzurufen.

Versuch 14. Eine Stricknadel derselben Sorte wie die in Versuch 12 gebrauchte, wird nach vorheriger Prüfung auf etwa schon vorhandenen Magnetismus in der Mitte durch Auflegen eines Fingers der einen Hand festgehalten; dann führt man mit der anderen Hand einen natürlichen mit Schuhen versehenen Magneten so über den Stahlstab, dass abwechselnd die eine Hälfte mit dem einen, die andere mit dem anderen Pole 30 bis 40 mal bestrichen wird.

c) Der Kreisstrich. Da sich die Kraftlinien bei dem armierten Magneten besonders dicht zwischen den beiden Polschuhen hinziehen, so kann man auch beide Pole gleichzeitig auf den zu magnetisierenden Stahlstab aufsetzen und mit ihnen auf dem Stahle entlang gleiten. Dieses Verfahren empfiehlt sich besonders dann, wenn man mehrere Stäbe zugleich magnetisieren will.

Versuch 15. Man legt mehr als drei unmagnetische Stricknadeln zu einer geschlossenen Figur zusammen, indem man immer ein Ende der einen an das der nächst folgenden Nadel anlegt und in dieser Lage befestigt. Dann fährt man wiederholt mit beiden Polschuhen des Magnetisierungsmagneten über die ganze Kette in demselben Sinne hin; alle Stäbe erweisen sich an beiden Enden magnetisch.

Wir beschränken uns auf diese Andeutungen der Magnetisierungsverfahren und stellen uns vor, dass die im folgenden beschriebenen Formen von Stahlkörpern in dieser oder jener Weise kräftig magnetisiert worden seien. Dass man durch Anwendung der Magnetkraftfelder, welche bei dem „elektrischen Strome" auftreten, viel wirksamere Magnetisierungsmethoden erhält, werden wir erst später sehen. Thatsächlich werden alle starken Magnete heute nur noch durch jene „elektromagnetischen Kräfte" erzeugt.

20. Immaterialität des „Magnetismus". — Beim Magnetisieren ändert sich die Masse des magnetisierten Körpers nicht.

Versuch 16. Man wägt einen Stab guten Stahles auf einer empfindlichen eisenfreien Wage, magnetisiert ihn durch Streichen möglichst stark und wägt wieder. Das Gewicht ist dasselbe geblieben.

Der hier angestellte Wägungsversuch soll nur als Schema einer grossen Zahl von Versuchen dienen, die alle dasselbe negative Resultat ergeben haben.

Bei der Annahme der magnetischen Eigenschaft wird demnach nichts Substanzielles auf den magnetisierten Körper übertragen. Die Magnetisierung kann also nur in einer Umlagerung der schon vorhandenen materiellen Teile oder in der Einprägung einer Bewegungsform beruhen, welche den magnetisierten Körper von dem unmagnetischen unterscheidet. Diese Bewegungsform muss aber so geartet sein, dass sie der Masse des Stabes selbst nicht einen Bewegungsimpuls nach irgend einer Richtung erteilt.

Wir werden weiter unten sehen, wie in sich zurücklaufende Bewegungen in den kleinsten Teilen des Magneten wie seines Feldes diesen Bedingungen genügen, und wie es wesentlich Energien sind, welche bei der Magnetisierung übertragen werden.

21. Die Stabmagnete. — Magnetisiert man einen nicht zu langen Stahlstab von beliebigem Querschnitt seiner Länge nach, so erhält man einen Stabmagneten. Seine Längenausdehnung überwiegt bei weitem die Querdimensionen. Die magnetische Wirkung beschränkt sich wesentlich auf die Enden. Fig. 4 stellt das Kraftlinienbild in einer zur Stabachse parallelen horizontalen Ebene dar. Dasselbe lässt erkennen, dass die Enden Polarregionen sind, besonders die aller äussersten N und S, ohne dass bestimmte Punkte ausschliesslich als Kraftlinien aussendend angesehen werden könnten.

Die von einer Polarregion ausgehenden und in das Feld hinaustretenden Kraftlinien schwingen sich in immer weiteren Bogen zu dem anderen Ende hinüber und enden hier.

Wir finden also dasselbe Verhalten, welches uns veranlasste, die beiden Polarregionen des armierten Magneten verschieden zu bezeichnen: rot und blau.

In der Mitte des Stabes zeichnet sich eine Zone J dadurch aus, dass von ihr gar keine Kraftlinien ausgehen; in ihrer Umgebung wird die magnetische Kraft nur durch die Linien bestimmt, welche sich von dem roten zu dem blauen Ende hinziehen und die hier dem Stabe

parallel verlaufen. Diese Zone des Stabes erweist sich also als indifferent bei der Ausgestaltung des Feldes, man nennt sie die „Indifferenz Zone“.

Dreht man den Magnetstab um seine Achse, so erhält man immer dasselbe Kraftlinienbild in den zu derselben parallelen Ebenen. Daraus folgt, dass das Feld symmetrisch zu dieser ist (im wesentlichen bei eckigen Querschnitten, genauer bei kreisförmigem Querschnitt). Befestigt man einen runden Stabmagneten in vertikaler Stellung, so erhält man in einer horizontalen Ebene das Kraftlinienbild Fig. 5; dasselbe entspricht also einem zur Achse senkrechten ebenen Schnitt durch das Feld. In diesem verlaufen die Kraftlinien radiär nach aussen. In jeder durch eine dieser Linien und die Magnetachse gelegten Ebene hat man sich eine Kraftlinienverteilung, wie sie Fig. 4 zeigt, zu denken, um sich eine Vorstellung von der wirklichen, d. h. räumlichen Anordnung des Feldes zu bilden.

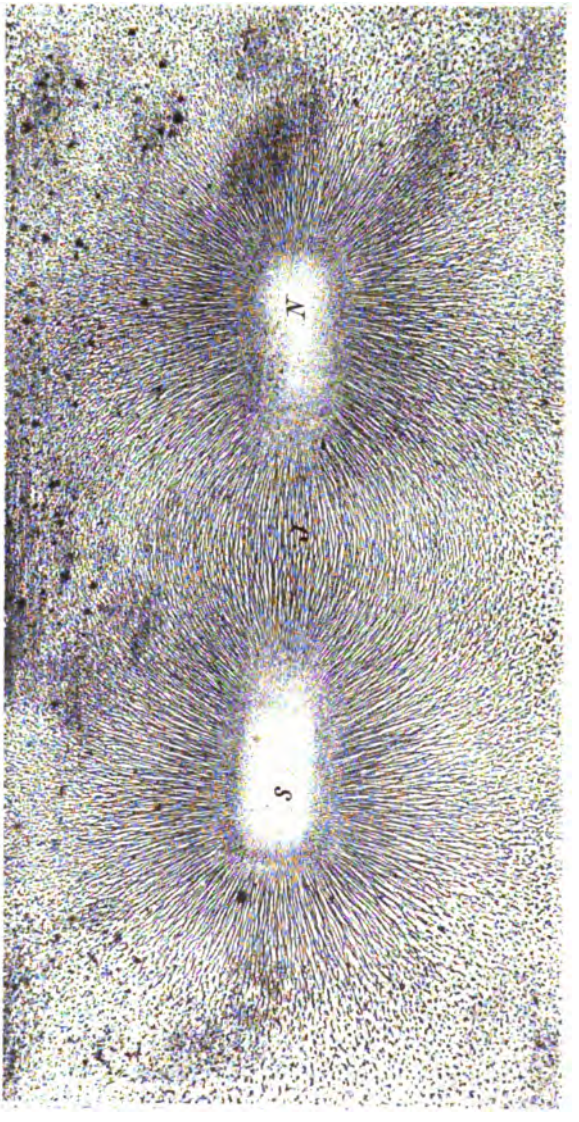


Fig. 4.

Da am Rande des Stabendes die Kraftlinien zusammenlaufen, erscheint diesem entsprechend eine dichtere Anhäufung von Eisenteilchen in Form eines schwarzen Ringes in der Mitte des Bildes. Dafür treten an den benachbarten Regionen innen und aussen leere Stellen auf, da von hier die Teilchen fortgezogen wurden. Ähnlichen Erscheinungen begegnet man in den Kraftlinienbildern immer dort, wo die magnetische Kraft in der Papierebene sehr stark ist.

Bei längeren dünneren Magnetstäben bemerkt man wie die Kraftlinien von zwei Punkten N und S ausgehen, welche einen Abstand von einander („Polabstand") haben, der etwa gleich $^5/_6$ der Stablänge ist.

Besonders wichtig ist der Fall sehr langer und dünner Stäbe. Magnetisieren wir einen solchen, so bleibt fast nur am Ende Feilicht hängen, welches sich zu einem kugelförmigen Büschel vereinigt. Das Kraftlinienbild zeigt, dass Richtkräfte auf benachbarte Eisenteilchen nur an den äussersten Endpunkten, den Polen, wirken. Die Kraftlinien gehen auch nicht mehr von einem Pole zum anderen hinüber, die Linien des einen Poles verlaufen fast unabhänig von denen des anderen; die Indifferenzzone wird immer länger, die Teilchen um einen Pol herum sind der Wirkung des anderen, immer gleichzeitig mit vorhandenen, entrückt; wir erhalten so die Möglichkeit die Wirkung eines einzelnen Poles für sich zu betrachten, wovon wir später wiederholt Gebrauch machen werden.

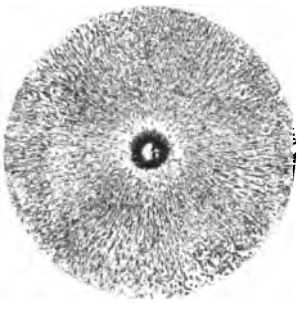


Fig. 5.

Das Feld an einem Ende eines solchen langen Stabmagneten nennt man ein „unipolares". Es hat fast in allen Querschnitten eine durch Fig. 5 dargestellte radiale Kraftlinienanordnung.

22. Magnetische Magazine. — Wie wir schon andeuteten, kommt es bei der magnetischen Wirkung auf die Zahl der Kraftlinien an, welche aus einem Magneten austreten; je mehr Kraftlinien eine magnetisch wirkende Stelle entsendet, um so stärker ist ihre Wirkung. Um diese beim Stabmagneten zu vergrössern, kombiniert man ihn mit gleichen in derselben Weise magnetisierten Stäben; da die Kraftlinien alle von einem Ende ausgehen, und alle in dasselbe andere Ende einlaufen sollen, so muss man die Stäbe so auf einander legen, dass in gleichem Sinne magnetisierte Hälften aufeinander zu liegen kommen, also alle rot bezeichneten Pole einerseits und alle blau bezeichneten andererseits. (Auf ein einfaches Kriterium zur Unterscheidung der Polarität kommen wir in § 27 zu sprechen.) Vereinigt man in dieser Weise ein ganzes Bündel von Stäben, deren jeder vorher besonders

magnetisiert worden ist, durch ein schwach magnetisches Band, etwa übergeschobene Messinghülsen, so erhält man ein sogenanntes „magnetisches Magazin."

Die von einem Magazin ausgehende Wirkung ist nicht proportional der Zahl der dasselbe bildenden Stäbe. Es existiert keine einfache Beziehung zwischen dem Gewicht des Magazins und seiner magnetischen Kraft. Das hat seinen Grund in der in § 37 erläuterten gegenseitigen Beeinflussung der Felder einander paralleler gleich gerichteter Magnetstäbe.

23. Besondere Magnetformen. — Aus den Stabmagneten können wir gewisse Formen von Magneten ableiten, welche teils eine grosse praktische, teils eine mehr theoretische und für das Folgende wichtige Bedeutung haben und die wir des Zusammenhanges wegen schon hier erwähnen. Sehr dünne Magnete stellt man aus Uhrfederstahl her. Schneidet man aus einer langen dünnen Stahlplatte eine flache rautenförmige Figur mit langen Enden aus und magnetisiert man sie durch Streichen in der Weise, dass die Pole an die Spitzen zu liegen kommen, so erhält man eine sogenannte „Magnetnadel".

Magnetisiert man einen kurzen, dicken Magnetstab quer zu seiner Längsachse, so erhält man einen sogenannten „Transversalmagneten". Derselbe hat also die Polarregionen auf beiden Seiten seines Mantels. Denken wir uns seine Länge sehr vermindert, so erhalten wir eine Platte, welche an zwei gegenüberliegenden Punkten ihres Randes magnetische Pole besitzt. Kleine glockenförmige, oben geschlossene kurze Stücke aus Stahlrohr magnetisiert man so, dass an den gegenüberliegenden Seiten ihres Mantels Pole entstehen; man erhält sogenannte „Glockenmagnete". Einen Stahlring magnetisiert man in der Art, dass er diametral gegenüberliegende Pole erhält. Alle diese Formen spielen bei später zu erwähnenden magnetischen und elektrischen Messinstrumenten eine grosse Rolle.

Ist der Stab an beiden Enden stark magnetisch, so entsteht bei Verkürzungen in der Richtung seiner Achse schliesslich eine Platte, welche auf beiden Seiten magnetisch ist und zwar derart, dass die Kraftlinien, welche von der einen Seite ausgehen, um den Rand der Platte herumgehen und auf der anderen Seite in diese wieder einlaufen. Solche flache Magnetscheiben nennt man „magnetische Lamellen", oder auch aus einem später hervortretendem Grunde „magnetische Doppelflächen". Sie stellen gewissermassen das entgegengesetzte Extrem eines langen stabförmigen Magneten dar.

Die Betrachtung solcher magnetischer Doppelflächen hat eine grosse Bedeutung wegen der Analogie, welche sie mit gewissen elektro-magnetischen Gebilden (den „Stromschleifen") haben, wie wir im zweiten Abschnitt sehen werden. Wegen des später wichtigen Vergleiches mit diesen wollen wir uns schon jetzt kreisförmig,

quadratisch und rechteckig begrenzte einfache Modelle solcher magnetischer Doppelflächen anfertigen, indem wir entsprechend ausgeschnittene Papptafeln auf der einen Seite mit rotem, auf der anderen mit blauem Papiere bekleben.

24. Die Hufeisenmagnete. — Da die Wirkung der Stabmagnete an den Enden am stärksten ist, und hier die Kraftlinien am reichlichsten austreten, so liegt es nahe, sich dadurch starke Felder zu verschaffen, dass man die beiden Enden eines Stahlstabes einander zubiegt, so dass eine hufeisen- oder ringförmige Form entsteht; die Enden des Hufeisens, seine „Schenkel", flacht man so ab, dass die Endflächen in einer Ebene liegen und magnetisiert den Stab seiner Länge nach. Befestigt man einen solchen Hufeisenmagneten in vertikaler Stellung mit seinen Enden nach oben und erzeugt man auf einem aufgelegten Kartonblatt das Kraftlinienbild in einer zur Achse senkrechten Ebene, so erhält man ein Bild ähnlich wie es Fig. 3 zeigt. In einer durch die gebogene Achse des Stabes gelegten Ebene, welche wir die „Mittelebene" nennen wollen, oder in einer ihr parallelen und benachbarten Ebene, Fig. 6, gehen von den Enden *n* und *s* dicht sich zusammendrängende Kraftlinien aus, welche in den inneren Partien des Bildes fast geradlinig auf dem kürzesten Wege von einem Schenkel des Hufeisens zu dem anderen hinüberziehen. Weiter ausserhalb dieses Teiles biegen die Linien immer weiter und weiter aus und zerstreuen sich auf der Aussenseite der Schenkel gleichmässig in die entfernteren Teile des Feldes. Je näher man der Biegung des Magneten kommt, um so spärlicher ist der Kraftlinienverlauf, der aus dem Magnetkörper heraustritt. Schliesslich verlaufen die Linien der Biegung parallel; auf der Aussenseite verraten die einzelnen Teilchen fast gar keine ordnende

Fig. 6.

magnetische Kraft mehr; hier an der Biegung liegt also die Indifferenzzone dieser Magnetformen.

In Figur 6 sieht man nach dem unteren Teile des rechten Schenkels hin noch einmal Kraftlinien zusammenlaufen; es findet sich hier gewissermassen noch ein Pol von untergeordneter Bedeutung, dem ein noch schwerer zu erkennender dicht rechts neben *i* entspricht. Solche Anomalien („Folgepunkte") stellen sich häufig bei nicht ganz gleichmässiger Magnetisierung ein.

Wie bei den Stabmagneten, so kann man auch hier die Wirkung dadurch verstärken, dass man mehrere hufeisenförmige Stahllamellen von gleicher Grösse zu magnetischen Magazinen in Hufeisenform vereinigt. Legt man vor die Schenkelenden ein Stück weichen Eisens, den Anker, so wird dieses mit grosser Kraft festgehalten (§ 17).

Die Tragkraft ist auch hier nicht proportional der Anzahl der zu einem Magazin vereinigten Einzellamellen. Die aufgestellten Regeln und Formeln enthalten Grössen, welche mit der Stahlsorte, der Art der Härtung und Magnetisierung stark variieren. Wir unterlassen es daher, hier näheres darüber anzuführen.

25. Fixierung der räumlichen Anordnung der Kraftlinien starker Felder. — Wenn man starke Magnetkräfte, z. B. die von Hufeisenmagazinen zur Verfügung hat, kann man den Kraftlinienverlauf nicht nur in der Ebene, sondern auch im Raume direkt fixieren.

a) Fixieren eines Kraftlinienbündels aus feinstem Eisenstaub durch Verbrennen. Man streut feinstes Eisenpulver zwischen die Pole eines kräftigen Magneten: Die Pulverteilchen schliessen sich zu einer stabilen Brücke zwischen den beiden Polen zusammen, die einzelnen Striemen folgen den Kraftlinien (bei starken Kräften wenigstens sehr nahe, bei schwächeren deformiert die Schwere den Verlauf nicht unbeträchtlich). Man zündet das Pulver an; es verbrennt, das Eisen oxydiert und bäckt zu einem festen Körper zusammen, welcher die Struktur des Kraftlinienfeldes nachahmt. Man kann die Schlacke abnehmen und durch Zerschneiden die Struktur des Feldes verfolgen.

b) Fixieren durch Einbetten in zähflüssige Massen. Wir betten gröbere Eisenteilchen in ein zähflüssiges Zwischenmittel (z. B. Gelatine) ein, welches ihnen Drehungen und geringere Ortsveränderungen, nicht aber ein Aufeinanderhäufen gestattet, und lassen es unter dauernder Einwirkung des Magneten hart werden.

Versuch 17. Man hängt einen Hufeisenmagneten so auf, dass seine Schenkel nach unten gerichtet sind, und stellt einen Pappkasten unter, in den die Schenkelenden hineinhängen. Helle, durchsichtige Gelatine wässert man in kaltem Wasser, erwärmt sie dann und rührt in den Brei reichlich Eisenfeilicht ein. Durch Absieben entfernt man vorher den feinen Eisenstaub, der die Gelatine undurchsichtig machen würde. Den Gelatinebrei giesst man in den Pappkasten, so dass der untere Teil des Magneten ganz davon umgeben ist, und lässt erstarren.

Nach dem Loslösen der Pappwände und Abschneiden der äusseren Flächenstücke, in denen die Eisenteilchen gerostet sind, erhält man ein durchscheinendes

Stück, in dem man den Verlauf der Kraftlinien nach allen Seiten hin deutlich verfolgen kann, namentlich wenn man intensives Licht darauf scheinen lässt. Die Eisenteilchen im Innern rosten nicht zu rasch. Wir werden durch solche Gelatineklötze später ebene Schnitte senkrecht zu den Kraftlinien legen und die Zahl der Kraftlinien an den einzelnen Stellen bestimmen.

Soll die Ausbildung der Kraftlinien projiziert werden, so bettet man die Eisenteilchen besser in noch durchsichtigere zähe Flüssigkeiten ein. Ferri limatura alcoholisata wird in einer flachen Glascuvette in Glycerin oder Paraffinöl eingerührt; diese wird horizontal in die Strahlen der Projektionslampe eingeführt, welche von den Eisenteilchen ein Bild auf dem Projektionsschirm entwirft. Wird ein starker Magnet genähert, so ordnen sich die Teilchen zu den Kraftlinien, wird ein Stück Eisen (Anker) in die Cuvette geworfen, so ziehen sie sich nach diesem hin zusammen.

26. Begriff des homogenen Magnetfeldes. — Die Kraftlinien sind im allgemeinen gekrümmte Linien, Kurven. Untersucht man aber das Feld eines Hufeisenmagneten, so erkennt man in den centralen Teilen desselben zwischen den Schenkeln Partien, in denen die Kraftlinien sehr nahe geradlinig verlaufen. Hier ziehen sie in gleicher Dichte einander parallel durch das Feld. Felder von dieser Struktur spielen eine grosse Rolle; man nennt sie „homogene Felder".

Solche Felder sind ähnlich dem Kraftfelde der Schwere innerhalb eines beschränkten Raumes z. B. dem eines Zimmers; denn das Gewicht eines Körpers ist innerhalb desselben überall das gleiche und an allen Punkten ist die Kraftrichtung vertikal, die Schwerkraftlinien sind einander parallel.

D) Magnete mit einem Grade der Bewegungsfreiheit.

Die bisher benutzten Magnete dachten wir uns immer ruhend. Wir wollen sie jetzt so aufstellen, dass sich ihre die Pole verbindende Achse frei in einer Ebene, in der Horizontalebene um einen Punkt, den Mittelpunkt drehen kann.

Wir erreichen dies bei den Hufeisenmagneten, indem wir sie an der Biegungsstelle an einem Faden befestigen. Bei den Stabmagneten legt man etwa um die Indifferenzzone eine oben mit einem Haken versehene Messinghülse, an welcher man den Stab so aufhängt, dass er in der Horizontalebene frei schwingen kann. Die Aufhängefäden müssen vorher durch Anhängen eines Gewichtes aufgedrillt werden. Bei kleinen leichten Magnetstäben (Nadeln) bringt man in der Mitte ein mit einem Steine (Achat) ausgelegtes Hütchen an, welches man auf eine vertikal stehende Stahlspitze setzt.

Wir erteilen den Magneten dadurch, wie man sich ausdrückt, „einen Grad der Bewegungsfreiheit"; dies soll heissen: Von den unendlich vielen Lagen, welche die Achse im Raume einnehmen kann, stellen wir ihr die (einfach unendliche) Mannigfaltigkeit der Lagen zur Verfügung, welche sie beim Festhalten ihres Aufhängepunktes in der Horizontalebene einnehmen kann. Später werden wir der magnetischen Achse noch mehr Grade der Bewegungsfreiheit erteilen, indem

wir ihr die Möglichkeit geben, sich auch in alle Richtungen der Vertikalebenen zu stellen; es bleibt dann nur der Aufhängepunkt in Bezug auf die Erdoberfläche fest.

27. Die Süd-Nordweisung freier magnetischer Achsen. — Ein an einem Faden aufgehängter oder auf einer Spitze schwebender Magnet könnte sich in der Horizontalebene nach allen Richtungen hin frei bewegen; wir bemerken aber die für die magnetischen Erscheinungen wichtige Thatsache:

Ein mit seiner Achse in der Horizontalen frei drehbarer Magnet stellt sich in einer bestimmten Richtung ein.

Dreht man ihn aus dieser Lage heraus, so kehrt er nach einigen Schwingungen immer wieder in dieselbe zurück. Vergleichen wir sie mit den Himmelsgegenden, so bemerken wir, dass ein Pol nach Norden zeigt: der Nordpol (north seeking magnetic pole), der andere nach Süden: Südpol. Dies giebt ein Mittel an die Hand, die beiden Pole eines Magneten in eindeutiger Weise zu bezeichnen und sie voneinander zu unterscheiden.

Beispielsweise erfahren wir dadurch, dass bei der Magnetisierungsmethode des Doppelstriches, § 19. b, das mit dem Nordpol gestrichene Ende südmagnetisch, das mit dem Südpol gestrichene nordmagnetisch geworden ist.

Über 17 Jahrhunderte ist diese Erscheinung der Süd-Nordweisung eines aufgehängten Magneten der Menschheit bekannt, denn schon in einem chinesischen Wörterbuche vom Jahre 121 n. Chr. wird ihrer gedacht (Peschel).

Auf die geophysikalische Bedeutung derselben gehen wir erst später ein.

Wir bezeichnen alle Nordenden rot, alle Südenden blau, vergl. § 16. Um in den Holzschnitten die Polaritäten dem Auge unmittelbar anschaulich zu machen, schraffiert man gewöhnlich die Nordenden quer, die Südenden parallel zur magnetischen Achse (Airy).

„Gleichnamige" Pole sind solche, welche nach derselben Richtung, „ungleichnamige" diejenigen, welche nach entgegengesetzten Richtungen weisen.

2. Kapitel.

Beziehungen zweier Magnete zu einander.

A) Ponderomotorische Antriebe eines festliegenden auf einen beweglichen Magneten. Richtungssinn der Kraftlinien.

Wir wollen in diesem Kapitel neue Eigenschaften der Magnetkraftlinien kennen lernen. Dieselben stützen sich auf die Wirkungen, welche ein beweglicher Magnet unter ihrem Einflusse erfährt. Wir sehen zunächst noch von dem Kraftliniensystem des beweglichen Poles selbst ab und benutzen ihn nur zur Prüfung des Kraftlinienverlaufes in dem Felde eines festgehaltenen Magneten.

28. Ein Pol eines langen geradlinigen beweglichen Magnetstabes in dem Felde eines festliegenden Magneten; ponderomotorische Wirkungen. — Wir sahen oben, § 21, dass bei langen dünnen Magnetstäben die magnetische Wirkung fast ausschliesslich auf die Enden konzentriert ist. Dies setzt uns in den Stand, einen einzelnen Pol der Wirkung eines festliegenden Magneten auszusetzen, denn wir können den Stab immer so lang wählen, dass der andere Pol ausserhalb der nachweisbaren Feldwirkungen zu liegen kommt.

Versuch 18. Über das eine Ende eines langen, starkmagnetisierten Stahldrahtes schiebt man eine Messinghülse, welche mit einer Öse versehen ist. An dieser hängt man mittels eines Fadens den Magneten so auf, dass er frei vertikal herabhängt, und sein unteres Ende dicht über der Tischplatte schwebt.

Der Stab darf nicht zu biegsam und muss völlig gerade gestreckt sein. Der Aufhängefaden muss ungedrillt, dünn und nicht zu lang sein, sonst gerät der Stab zu leicht in Schwingungen. Am besten wird dieser unten noch etwas beschwert. Nahe dem unteren Ende trägt er ein weithin sichtbares Papierquerkreuz.

Auf den Tisch legt man Magnete, deren Kraftlinienbilder man auf einem untergelegten Kartonblatt erzeugt. Man bemerkt, wie die Magnete auf den unteren, nach allen Richtungen der Horizontalebene beweglichen Stabpol eine bestimmt gerichtete Kraft ausüben. Die-

selbe nimmt die ganze Masse des schwebenden Stabes mit, welcher dadurch aus seiner vertikalen Ruhelage mehr oder weniger abgelenkt wird. Man nennt daher diese Ausserungen der magnetischen Kräfte „ponderomotorische Wirkungen", weil sie sichtbare, greifbare Massen, pondera, bewegen.

Wir wollen dieselben für einige spezielle Fälle näher untersuchen.

a) Der *n*-Pol des beweglichen Stabes befinde sich unten. Wir legen unter denselben:

α) den *N*-Pol eines langen kräftigen Stabmagneten: Der *n*-Pol wird von allen Seiten weggetrieben. Führen wir ihn wieder heran, so entfernt er sich wieder, sowie wir den hemmenden Druck unseres Fingers aufheben. Bei dem Heranführen des Poles müssen wir eine, wenn auch geringe, „Arbeit" leisten.

Beachten wir den Weg, längs dessen der *n*-Pol aus dem Felde des *N*-Poles gleitet, so bemerken wir, dass er dabei den Kraftlinien folgt.

Ein beweglicher *n*-Pol wird von dem *N*-Pol eines anderen festliegenden Magneten längs der von diesem ausgehenden Kraftlinien weggeschoben.

Wir kehren jetzt den auf dem Tische festliegenden Magnetstab um, so dass

β) der Südpol *S* unter den beweglichen *n*-Pol zu liegen kommt. Die Erscheinungen haben sich vollkommen umgekehrt. Eine ponderomotorische Kraft zieht das Stabende zu dem Magneten hin. Wir müssen eine Arbeit leisten, um den *n*-Pol aus dem Felde des *S*-Poles zu entfernen. Der zu überwindende Zug erfolgt immer in der Richtung der Kraftlinien.

Ein beweglicher *n*-Pol wird von dem *S*-Pol eines anderen festliegenden Magneten längs der in denselben eintretenden Kraftlinien herangezogen.

b) Drehen wir den schwebenden Stahldraht um, schieben wir seinen *n*-Pol in die Hülse und lassen den *s*-Pol nach unten hängen, so ergeben sich bei den beiden Lagen α) und β) des festliegenden Magnetstabes gerade die umgekehrten ponderomotorischen Wirkungen.

Der *s*-Pol wird zu dem *N*-Pol eines anderen Magneten hingezogen, von dem *S*-Pol weggeschoben. Die Bewegungsrichtung wird in jedem Punkte durch die Richtung der durch den Punkt verlaufenden Kraftlinie bestimmt.

Die Erscheinung ist also polar sowohl in Bezug auf den einen wie den anderen in Wechselwirkung tretenden Magneten.

Versuch 19. Wir legen einen kurzen Magnetstab mit seiner Mitte unter den schwebenden Magneten, so dass seine Indifferenz-

zone von der Vertikalen durch den Aufhängepunkt des Stahldrahtes getroffen wird. Der bewegliche Stab wird aus der Ruhelage gezogen und wandert einem der Enden zu. Wird er nach dem anderen Ende gebracht, so geht er in einem Bogen um die Indifferenzzone herum wieder zum anderen Polende hin. Er folgt dabei der Kraftlinienrichtung, vergl. Fig. 4. Der *n*-Pol geht immer in der Richtung vom *N*-Pol zum *S*-Pol des festliegenden Magneten, der *s*-Pol umgekehrt von *S* nach *N*.

Versuch 20. Bringen wir einen Hufeisenmagneten in verschiedenen Lagen unter den beweglichen Stabpol, so bemerken wir ein analoges Wandern der nach unten gekehrten Pole. Zwischen den Magnetschenkeln gehen diese von der einen Seite direkt zu der anderen hinüber, vor den Schenkelenden werden sie in immer weiteren Bogen von einem Pole zum anderen hinübergetrieben ganz dem Verlaufe der Kraftlinien, Fig. 6, entsprechend. Dabei wandert der *n*-Pol wieder in umgekehrtem Sinne wie der *s*-Pol.

Statt einen Magnetstab an einem Faden beweglich aufzuhängen, kann man ihn auch schwimmen lassen (Weiler).

Versuch 21. Ein langer dünner Magnetstab, etwa eine magnetisierte Stricknadel, wird durch einen Kork gesteckt, den man in einem grösseren Gefässe auf Wasser schwimmen lässt, so dass der Stab vertikal in das Wasser hinabtaucht, und entweder sein *n*- oder sein *s*-Pol über die Wasseroberfläche hervorragt. Der obere Pol wird den Wirkungen von Stab- und Hufeisenmagneten ausgesetzt, welche man auf den Rand des Gefässes legt. Der Stab treibt in dem einen oder anderen Sinne in dem Wasser hin, je nach der der ponderomotorischen Wirkung ausgesetzten Polarität, immer den Kraftlinien folgend. —

Wir ziehen aus allen vorhergehenden Versuchen den wichtigen Schluss: Den Kraftlinien wohnt ein bestimmter Richtungssinn inne, der sich in den verschiedenen Antrieben äussert, welche bewegliche *n*- und *s*-Pole in dem Felde erfahren.

Derartige Gegensätze in den Richtungen, wie wir sie hier finden, pflegt man durch die Bezeichnungen von „positiv" (+) und „negativ" (−) zum Ausdruck zu bringen. Wir bewohnen die Nordhemisphäre unseres Planeten. Daher wollen wir den + Richtungssinn den Antrieben beimessen, welche ein beweglicher Nordpol im Felde erfährt und die Festsetzung treffen: Die Kraftlinien verlaufen in dem Sinne, in dem ein beweglicher *n*-Pol in ihnen vorangeschoben wird.

Vergleichen wir die Ergebnisse der vorhergehenden Versuche, so müssen wir dann zweitens sagen: Bei allen Magneten gehen die Kraftlinien von dem Nordpole aus und ziehen sich durch das

Feld nach dem Südpol desselben hin, woselbst sie einlaufen (Positiver Richtungssinn).

Eine solche Gegensätzlichkeit in dem Verhalten der beiden Pole eines Magneten vermuteten wir schon früher und deuteten deren verschiedene Funktion mit Rücksicht auf das Aussenden und das Aufnehmen von Kraftlinien durch die gewählten Bezeichnungen gelegentlich an. Erst die hier angeführten Versuche lassen diese Auffassung berechtigt erscheinen. Die Festsetzung des positiven Richtungssinnes der Kraftlinien enthält ein willkürliches konventionelles Moment. Mit der einen Festsetzung sind dann aber auch alle übrigen Beziehungen eindeutig gegeben.

29. Eine kurze frei bewegliche Magnetnadel in dem Felde eines grösseren Magneten. — Wenn der *n*-Pol eines beweglichen Magneten in der Richtung der Kraftlinien, der *s*-Pol dieser Richtung entgegengesetzt bewegt wird, so muss sich bei der Vereinigung beider Pole an einer kurzen Magnetnadel diese gerade in die Richtung der Kraftlinien stellen. Diese Linien sind im allgemeinen Kurven; die Magnetnadel nimmt die Richtung der Tangente an dieselben an.

Der Richtungssinn der Kraftlinien ist daher durch die Stellung einer kleinen Magnetnadel in jedem Punkte des Feldes gegeben, wenn wir längs der Achse derselben von *s* nach *n* hinblicken.

Versuch 22. Man hängt eine Nähnadel aus gutem Stahl so an einem dünnen ungedrillten Faden (am besten einem feinen Seidenfaden) auf, dass sie unter dem Einflusse der Schwerkraft genau horizontal hängt. Damit der Faden nicht rutscht, befestigt man ihn unterhalb mit etwas Klebwachs. Dann magnetisiert man die Nadel durch Streichen, wobei man vermeidet, den Aufhängepunkt zu verschieben. Man erhält eine Magnetnadel mit zwei Graden der Freiheit. Sie stellt sich nordsüdlich; wir merken uns, welche Polarität Öhr- und Spitzenende hat.

Nähert man diese Nadel einem Stück Magneteisen an verschiedenen Stellen, so nimmt sie überall in dem Felde die Richtung der Tangente an die Kraftlinie an, welche gerade durch ihren Aufhängepunkt geht. Dabei zeigt dieselbe Spitze der Nadel an einigen Stellen auf den Stein zu, an anderen von ihm weg. Wir erkennen daraus, wo der Stein nordpolar, wo er südpolar ist.

Solche „Probenadeln“ (exploring needles FARADAYS) sind zur Erforschung der Konstitution verwickelter Magnetfelder sehr wichtig, sie sind oft ein bequemeres Hilfsmittel als die Feilichtbilder, wenn diese auch die Verteilung der Kraft mit einem Blicke übersehen lassen.

Wir wollen die Richtung der Kraftlinien immer durch den Zeigefinger bezeichnen.

Die Kraftlinien sind die ersten Gebilde mit einem bestimmt ausgesprochenen Richtungssinne, denen wir begegnen. Wenn wir eine Richtung angeben wollen, bedienen wir uns gewohnheitsgemäss des Zeigefingers der einen oder anderen Hand. Derselbe soll also bei allen Fingerregeln, die wir kennen lernen werden, die Kraftlinienrichtung bezeichnen. Wir werden ihn in einem Magnetfelde also immer von dem Nordpole weg nach einem Südpole hin zu halten haben. Bei allen im folgenden zu beschreibenden Modellen sollen ferner immer weisse Pfeile (etwa aus blankem Weissblech oder weissem Karton) die Kraftlinienrichtung bezeichnen.

30. Verzeichnen des Kraftlinienverlaufes. — Kurze Magnete mit einem Grade der Freiheit, etwa auf Spitzen bewegliche Nadeln, können zum Zeichnen des Kraftlinienverlaufes in einer Ebene dienen.

Versuch 23. Verzeichnung der Kraftlinien eines grossen Magnetstabes. Ein stark magnetisierter Stahlstab oder ein Stabmagazin wird auf einen Bogen Zeichenpapier gelegt, der horizontal ausgespannt ist. Eine kleine Magnetnadel auf niederem Stativ, die in einer der halben Stabdicke etwa gleichen Höhe über der Zeichenebene von einer Spitze getragen wird, wird an verschiedenen Stellen des Stabfeldes aufgestellt. Überall nimmt sie eine ganz bestimmte Richtung an. Man projiziert die beiden Nadelenden vertikal auf die Papierebene, verbindet beide Punkte durch eine Strecke und bezeichnet durch einen Pfeil ihre Richtung (s, n). Wiederholt man dies an vielen Punkten, so giebt die Gesamtheit aller gezeichneten Pfeile ein deutliches Bild des Kraftlinienverlaufes im Stabfelde. Durch Eisenfeilicht wird das Bild nachträglich noch verifiziert.

Das Verfahren der Zeichnung einzelner Nadelstellungen ist insofern noch unvollkommen, als man nicht direkt den fortlaufenden Kurvenzug einer Kraftlinie erhält. Befestigt man aber auf dem oberen Ende eines Schreibstiftes eine Spitze, auf welcher ein kleiner Magnetstab frei schwebend in der Horizontalebene spielt, so kann man den Verlauf der Kraftlinien in einem gegebenen Felde kontinuierlich verzeichnen, wenn man den Stift immer so weiterschiebt, dass der Magnet die Tangente zu dem zuletzt gezeichneten Kurvenstück bildet.

Eine sehr bequeme und einfache Vorrichtung für diesen Zweck stellt Fig. 7 dar. In der runden, in der Mitte durchbohrten, unten ebenen Messingscheibe A von 2 cm Durchmesser ist die 5 cm lange Messinghülse B befestigt, auf die oben die Spitze C aufgesteckt ist. Im Innern der Hülse befindet sich ein Stück Bleistift D, welches durch die kleine Spiralfeder E nach unten gedrückt wird. Am Herausfallen wird der Stift durch eine Umkröpfung des Hülsenrandes an der Unterfläche des Fusses A nach Innen gehindert; nur die Spitze F des Bleistiftes D sieht aus der Hülse hervor. Soll ein anderer Stift eingesetzt werden, so wird die Spitze C abgenommen. Auf dieser schwebt in horizontaler Lage der kleine mit N und S bezeichnete Magnetstab G. Für gewöhnlich steht das Instrument auf einer Korkunterlage, welche eine für die Spitze F bestimmte kleine Vertiefung besitzt.

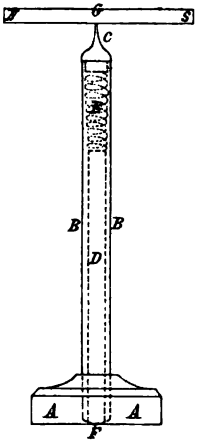


Fig. 7.

Sollen die Kraftlinien eines Magneten, z. B. eines Hufeisenmagneten, gezeichnet werden, so wird derselbe auf einem Bogen Papier auf einen Holzklotz gelegt, der seine Mittelebene auf die Höhe des Magnetstäbchens G bringt. Visiert man von oben senkrecht an dem Stabe G herab, so gelingt es leicht, den Fuss A so vorwärts zu schieben, dass G immer in die Richtung des eben unter dem Fusse A sichtbar werdenden Kurvenstückes fällt. Man erhält so eine ziemlich getreue graphische Aufzeichnung des Kraftlinienverlaufes, wie er der Mittelebene des verwendeten Magneten entspricht.

Eine der grossartigsten Sammlungen derartiger Kurvensysteme für die verschiedensten magnetischen Gebilde, namentlich Stab-, Hufeisen- und Ringmagnete ist im Jahre 1844 von J. E. Herger herausgegeben worden (in Leipzig bei E. Pö-

NICKE und Sohn erschienen mit einem Vorwort von ERMAN). Sie enthält 37 grosse graphische Darstellungen solcher magnetischen Kurven auf 31 Foliotafeln.

31. Bestimmungsstücke der Feldkraft; Vektorbegriff. — An den Wirkungen, welche ein beweglicher Pol in einem Magnetfelde erfährt, fallen drei einzelne Momente auf;

1) Eine bestimmte Richtung. Dieselbe wird in jedem Punkte durch die Richtung der durch denselben verlaufenden Kraftlinie bezeichnet. Zu ihrer Bestimmung benutzen wir die Tangente, welche man sich an die Kraftlinienkurve gelegt denken kann oder einfach das Kurvenstück, auf welchem der Punkt selbst liegt und das so kurz gedacht wird, dass es als geradlinig betrachtet werden kann.

2) Ein bestimmter Sinn. Völlig gleichgerichtete Kraftlinienstücke an derselben Stelle des Raumes können sich dennoch voneinander unterscheiden. Bei den einen wandert ein n-Pol in einem, bei den anderen im entgegengesetzten Sinne. Den Kraftlinien ist also etwas eigentümlich, was die beiden einem Punkte unmittelbar benachbarten Kurvenstücke in eine ganz bestimmte Reihenfolge bringt.

3) Eine bestimmte Stärke. Wir sahen schon oben, dass die Wirkung in den entfernteren Teilen des Feldes eine geringere ist als in den den Polen nächsten. Wenn wir hierüber auch erst später genauere quantitative Vergleiche anstellen werden, so lassen doch schon die hier erwähnten Versuche erkennen, dass Analoges für die ponderomotorischen Antriebe gilt. Die Wirkungen sind an den verschiedenen Stellen desselben Feldes auch ihrer Intensität nach voneinander verschieden.

Solche mit Richtung, Sinn und Intensität begabte Grössen nennt man „Vektoren"; geometrisch sind sie durch eine Strecke von bestimmter Maasszahl darstellbar, welche von einem Punkte aus in einer bestimmten Richtung gezogen wird. Die magnetische Kraft ist eine Vektorgrösse.

Die einfachste Vektorgrösse ist die Überführung von einem Punkte nach einem anderen um eine bestimmte Wegstrecke in bestimmter Richtung; daher auch der Name (vehere = fahren). Ein Vektor ist ferner die Geschwindigkeit, die Beschleunigung. Die Vektorgrössen spielen eine grosse Rolle. Eine Strömung einer Flüssigkeit z. B. ist aus lauter Vektorgrössen, den Geschwindigkeiten der einzelnen Teilchen zusammengesetzt, wie ein Magnetfeld. Wir werden später sehen, dass auch Drehbewegungen um Achsen unter die Kategorie der Vektorgrössen fallen.

32. Faradays Darstellung der Kraftverteilung durch die Kraftlinien. — Unsere bisherigen Betrachtungen haben gelehrt, dass die Kraftlinien wirklich im stande sind, alle drei Bestimmungsstücke der magnetischen Kraft an jedem Punkte des Feldes zur Darstellung zu bringen. Ihr Verlauf veranschaulicht unmittelbar die Kraftrichtung. Mit Zuhilfenahme eines im Felde beweglichen Nordmagnetpoles gelingt

es ferner, einen ganz bestimmten Richtungssinn derselben eindeutig festzusetzen. Schwieriger scheint es zu sein, durch die Kraftlinien auch das dritte Bestimmungsstück, die Kraftgrösse, zum Ausdruck zu bringen. In § 8 deuteten wir schon an, wie die Dichtigkeit, mit der die Kraftlinien durch den Raum verlaufen, einen Anhalt für die Stärke der dorthin fortgepflanzten Kraft giebt. Diese Dichtigkeit beurteilen wir am einfachsten nach der Zahl von Kraftlinien, welche ein zu ihrem Verlaufe senkrechtes Flächenstück durchsetzt, z. B. die im Mittel auf die Flächeneinheit, das Quadratcentimeter (cm^2) entfallende Zahl. Die Kraftlinienzahl pro cm^2 nennt man die Feldstärke an der betreffenden Stelle.

Dass diese Festsetzung in der That nicht nur zu einem relativen, sondern sogar zu einem absoluten Maasse der magnetischen Kraft führt, soll weiter unten gezeigt werden. Hier möge das Verfahren, welches zunächst etwas fremdartig erscheint, an einem einfachen Beispiele erläutert werden:

Versuch 24. Untersuchung des räumlichen Verlaufes der Kraftlinien. Wir schneiden einen der in § 25 hergestellten Gelatineklötze auseinander und zählen die Kraftlinien auf den verschiedenen Querschnitten ab.

In der Nähe der Magnetpole kommt auf jeden cm^2 eines zu den Kraftlinien senkrechten Feldquerschnittes eine grosse Zahl von Durchstosspunkten von Kraftlinien (grosse Feldstärke), in entfernteren Teilen nur eine geringe Zahl (kleine Feldstärke); direkt vergleichbar sind die Zahlen nicht, weil die Bildung der Feilichtketten durch eine ganze Reihe von Nebenumständen beeinflusst wird. Exakt wird die Methode erst, wenn wir die Kraftlinien nach einem ganz bestimmten Gesetze uns kontinuiert denken. Das Beispiel soll zunächst nur die Möglichkeit einer derartigen Kraftgrössenbestimmung anschaulich erläutern.

B) Beziehungen von zwei beweglichen Magneten zu einander.

Wir wollen jetzt beide Magnete, welche aufeinander wirken, beweglich machen. Dem einen (M_1) geben wir einen Grad der Bewegungsfreiheit. Wir befestigen ihn entweder so, dass er sich in seiner eigenen Achsenrichtung hin- und herbewegen kann, oder quer dazu, oder wir hängen ihn an einen Faden, oder stellen ihn auf eine Spitze, so dass er sich in der Horizontalebene frei herumdrehen kann. Seine Ruhelage ist im letzteren Falle nordsüdlich gerichtet. Den anderen Magneten (M_2) wollen wir völlig frei machen. Wir nehmen ihn zur Hand und nähern ihn dem Richtungsmagneten von den verschiedensten Seiten her (Handmagnet).

Ferner wollen wir gegen früher die Beschränkung fallen lassen, dass ein Magnet sehr lang sei; wir wollen vielmehr die beiden Paare von Polen gleichzeitig in Wechselwirkung treten lassen und untersuchen dabei vor allem, wie die Kraftlinien des einen Stabes durch die des anderen beeinflusst werden.

33. Wechselwirkung der Felder zweier achsial einander genäherter Magnetstäbe. — Um einen Magnetstab in seiner eigenen Achsenrichtung leicht verschiebbar zu machen, legen wir ihn in ein Schiffchen aus Messingblech, Fig. 8, ein, welches wir an Fäden an der Zimmerdecke aufhängen.

Ein rechteckiges dünnes Messingblech von von ca. 12 cm Länge ist um den ca. 25 cm langen Magnetstab m_1, von kreisförmigem Querschnitte herumgebogen. An den vier Ecken greifen s-förmige Haken in Durchbohrungen des Bleches ein. Die Haken sind an lange dünne Fäden geknüpft, welche paarweise über je einen in die Decke befestigten Haken geschlungen sind. Unterhalb des einen Stabendes steht ein Holzklotz K, welcher einen Zeiger z trägt.

Versuch 25. Man nähert dem n-Pole des Magneten m_1 den n-Pol des Handmagneten m_2 in achsialer Richtung: m_1 weicht vor m_2 zurück, wie die in die Figur eingezeichneten Pfeile andeuten. Nähert man den s-Pol von m_2 dem s-Pol von m_1, so findet das Gleiche statt. Beim Zurückweichen hebt sich die Masse von m_1 etwas über ihre ursprüngliche Höhe, an ihr wird eine gewisse Hubarbeit verrichtet.

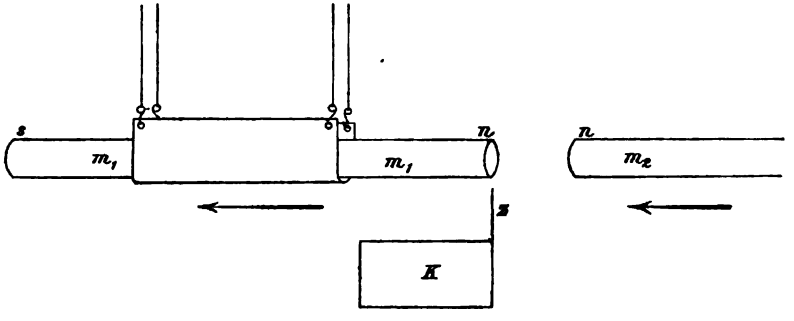


Fig. 8.

Der von dem Felde eines Poles eingenommene Raum ist für den gleichnamigen Pol eines anderen Magneten, der achsial genähert wird, bis zu einem gewissen Grade undurchdringbar.

Wenn wir unsere Hand ausstrecken und fühlen plötzlich dieser Bewegung ein Hemmnis entgegentreten, so sagen wir: An dem betreffenden Orte „ist" etwas. Wir bezeichnen dieses Etwas, welches sich dem Eindringen in den von ihm eingenommenen Raume entgegenstellt, gewöhnlich als „Materie". Man hat die beobachtete Thatsache auch so ausgedrückt: Der Raum ist von einer gewissen Energieform erfüllt, welche der Verminderung des Volumens widerstrebt (Volumenenergie). Die Erkenntnis, dass ein Magnetfeld ein mit Energie einer besonderen Form erfüllter Raum sei, ist sehr wichtg.

Die beobachtete Erscheinung beschreiben wir am einfachsten, wenn wir sagen: Die Felder gleichnamiger Pole drücken sich voneinander weg.

Versuch 26. Wir nähern dem n-Pol von m_1 den s-Pol von m_2 und umgekehrt: Die Stäbe werden gegeneinander gezogen. Die Felder ungleichnamiger Pole werden aufeinander zugezogen, sobald sie sich so nahe kommen, dass sie in Wechselwirkung treten.

Die Massen der Magnetstäbe selbst treten nicht in Wechselwirkung; nur die von ihren Polen auslaufenden (n) oder in diese einlaufenden (s) Kraftlinien können die Ursache der Bewegungen sein. Denn diese erwiesen sich bei allen vorhergehenden Versuchen allein als die eigentlichen Vermittler magnetischer Wirkungen. Die Massen erscheinen hier also fest an ihre Kraftlinien gekettet, dadurch kommt eine „ponderomotorische Wirkung" (s. o. § 28) zu stande.

Versuch 27. Zwischen die beiden aufeinander wirkenden Magnetfelder stellt man der Reihe nach gleich grosse und gleich dicke Tafeln von Pappe, Holz, Glas, Messing, Kupfer und eine von Eisen; die ersteren lassen die Wirkungen unverkürzt durch sich hindurch gehen, die letztere schirmt sie fast vollkommen ab.

34. Der Kraftlinienverlauf in dem Felde zweier achsial aufeinander wirkender Magnete; Vorstellung der Druck- und Zugspannungen im Felde. — Die im vorigen Paragraphen geschilderten ponderomotorischen Wirkungen werden verständlich, wenn wir die Deformationen betrachten, welche die ineinander greifenden Felder erfahren. Um diese bequem übersehen zu können, erzeugen wir das Kraftlinienbild in einer zu den Achsen beider in gegenseitiger Verlängerung liegender Stabmagnete parallelen Ebene.

Zur Herstellung der folgenden Kraftlinienbilder bedient man sich eines ca. 2—3 cm dicken, durch Querleisten gegen Verziehen gesicherten Brettes von etwa 20 cm Länge und 15 cm Breite. In dasselbe sind verschiedene Nuten von solcher Breite und Tiefe eingeschnitten, dass die Magnetstäbe gerade hineinpassen und sich ihre oberen Flächen mit der Oberfläche des Brettes vergleichen. Die Nuten sind wie in Fig. 9 angeordnet. In der mittleren Längsnut aa liegen die beiden Stäbe in gegenseitiger Verlängerung, in den beiden Nuten b_1 und b_2 einander parallel, in der Quernut c senkrecht zu einander. Auf die Stäbe legt man die Kartonblätter.

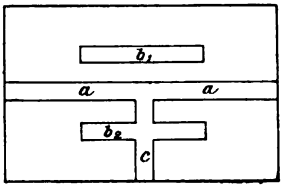


Fig. 9.

Zum Vergleiche stellen wir zunächst von einem der beiden möglichst gleichstark magnetisierten Stäbe das Bild der aus dem Pole austretenden und sich zerstreuenden Kraftlinien noch einmal her (Fig. 4, § 21). Bei den folgenden Bildern des Feldes zweier Magnete ist besonders auf die Stärke der Divergenz der Kraftlinien von jedem Pole aus im Vergleiche mit der Divergenz bei unbeeinflusstem Pole zu achten.

a) Gleichnamige Pole einander zugekehrt (Fig. 10). Die Kraftlinien, welche von einem Pole n_1 des einen Stabes M_1 ausgehen, werden von den Kraftlinien, welche von dem benachbarten gleichnamigen Pole n_2 des anderen Magneten M_2 ausgehen, zurückgedrängt; sie biegen scharf um und verlaufen in den von der Achse entfernteren Teilen des Feldes mehr und mehr einander parallel. Die Divergenz der Kraftlinien ist gegen die beim freien Pole (Fig. 4) stark vermehrt. Dadurch entsteht in der Achse des Feldes bei J geradezu eine von Kraftlinien freie Stelle. Hier ist also die gesamte Kraft gleich Null, die Wirkung des einen Poles wird durch die des anderen aufgehoben; eine kurze Magnetnadel würde daher an dieser Stelle des Feldes gar keine Richtkraft erfahren, sie würde sich indifferent den benachbarten magnetisierten Massen gegenüber verhalten; man spricht daher von einem „Indifferenzpunkte".

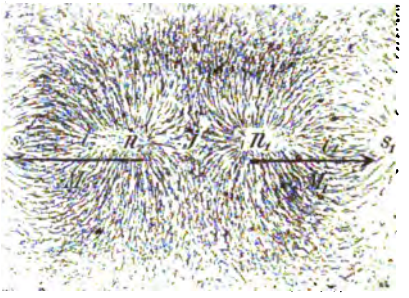


Fig. 10.

Mitunter will man absichtlich die richtende Kraft eines Magneten an einer Stelle, wo sich eine Magnetnadel befindet, herabsetzen. Man erreicht dies wie hier durch Annähern des gleichnamigen Poles eines Hilfsmagneten, welcher die ihm entgegenlaufenden Kraftlinien auseinander drängt. Man „astasiert" die Nadel, wie man sagt, eine Manipulation, die man oft bei magnetischen Messinstrumenten anwendet, um ihre Empfindlichkeit zu steigern.

Hält man die durch Fig. 10 dargestellte Ausgestaltung des gemeinsamen Feldes mit der Thatsache zusammen, dass die beiden Magnetstäbe sich gegenseitig voneinander wegstossen, wie die in das Kraftlinienbild eingezeichneten Pfeile andeuten, so kommt man zu der Vorstellung, dass sich die Kraftlinien quer zu ihrer Richtung voneinander wegdrängen.

Die Kraftlinien sind zunächst nur Richtungslinien; aber sie bringen einen gewissen Zustand des Mediums, welches sie durchziehen, zum Ausdruck. Wir vermuten schon hier, dass dieser Zustand ein derartiger ist, dass Druckkräfte senkrecht zu der Richtung der Kraftlinien in dem Medium geweckt werden. Dies war der bedeutsame Schluss, den FARADAY zog. Bei ihm erhielten die Kraftlinien Leben; er erhob sie von Schemen zu physikalischen Individuen (MAXWELL's grundlegende Arbeit: On physical lines of force).

Nehmen wir also an, dass die magnetischen Wirkungen unterworfenen Medien einen Druck quer zur Richtung der Magnetisierungslinien ausüben, so lässt das Kraftlinienbild erkennen, dass sich die beiden Pole n_1 und n_2 gegenseitig zurückzudrängen suchen; das war die ponderomotorische Wirkung des Versuches 25.

Ältere Anschauungen legten den Sitz der Wirkung in die Pole, wo man sich hypothetische Fluida, sog. magnetische Massen, vorhanden dachte. Diese sollten unvermittelt und unbekümmert um das Zwischenmedium durch sogenannte „Fernkräfte" aufeinander eine „Abstossung" ausüben. Das Zwischenmedium nimmt aber einen sehr wesentlichen Anteil an der Erscheinung. Eine Andeutung dafür sollte der qualitativ-quantitative Versuch 27 geben. Es ist der wichtigste Schritt zu den neueren Anschauungen, den Sitz der Wirkungen aus den Polen in das Wirkungsfeld zu verlegen.

b) Ungleichnamige Pole einander zugekehrt (Fig. 11). Die Kraftlinien, welche von einem Pole n_1 des einen Stabes M_1 ausgehen, biegen sich um, vereinigen sich mit den in den benachbarten Pol s_2 des anderen Magneten M_2 hineingehenden Linien und laufen in M_2 ein.

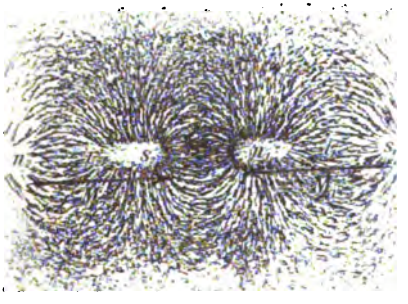


Fig. 11.

Die Linien sind in dem achsialen Teile des Bildes nur wenig gekrümmt, in den mehr peripherischen Teilen werden sie immer mehr hinweggedrängt und ziehen in weitem Bogen von einem Pole zum anderen. Dabei werden die Kraftlinien des ersten Poles M_1 durch den zweiten, an ihn herangebrachten M_2 ausserordentlich zusammengezogen: sie zerstreuen sich in geringerem Grade und biegen viel weniger von der Achse weg, als ohne die sammelnde Wirkung des anderen Magneten (vergl. Fig. 4). Die beiden Stäbe werden ponderomotorisch aufeinander zubewegt wie die Pfeile andeuten. Erfolgte quer zu den Kraftlinien in Druck, so muss längs derselben ein Zug stattfinden. Suchen sich die zwischen den Polen n_1 und s_2 ausgespannten Kraftlinien in ihrer eigenen Richtung zu verkürzen, etwa wie gespannte Gummifäden, welche mit ihren Enden an n_1 und s_2 angeheftet sind, so werden sie in der That die beiden Magnetstäbe aufeinander zuziehen. Die Querdrucke, welche die einzelnen Kraftlinien aufeinander ausüben, hindern dabei, dass die Linien zusammenschrumpfen und sich einfach geradlinig auf dem kürzesten Wege von n_1 nach s_2 hinüberspannen.

Die älteren Vorstellungen setzten hier einfach eine fernwirkende „Anziehung" der mit ungleichnamigen Fluidis begabten Polcentren voraus. Faraday glaubte nicht an solche fernwirkende Centren. Seine Beschreibung der Erscheinung durch die Kraftlinien war eine viel vollkommenere.

Wir vermeiden die Bezeichnungen „Anziehung" und „Abstossung" von Polen, werden dagegen immer wieder auf die Zwangszustände im Felde, die Druckspannungen quer zu der Kraftlinienrichtung, die

Zugspannungen längs derselben, hinweisen, da diese die eigentliche Grundlage für alle folgenden Betrachtungen bilden.

Dadurch, dass alle Vorgänge in das Feld verlegt werden, wird die den Fernwirkungstheorien anhaftende begriffliche Schwierigkeit gehoben, dass ein Etwas dort Wirkungen zu äussern vermögen soll, wo es gar nicht ist; die Fernwirkungen werden durch „Nahewirkungen" ersetzt. Das Vermittelnde ist das Zwischenmedium. Alle Medien sind magnetisierbar, wie FARADAY bewies. Sie alle können also die Zwangszustände des Feldes aufnehmen und weitergeben. Wir können daher auch vermeiden, ein anderes hypothetisches Fluidum, den sogenannten „Äther", in unsere Betrachtungen einzuführen. Alle unserer Erforschung zugänglichen Räume sind nachweisbar mit Materie erfüllt. Das TORICELLI'sche Vacuum z. B. über der Quecksilbersäule eines gut ausgekochten Barometers enthält noch so viel Quecksilber- und Glasdämpfe, dass wir selbst hier kein besonderes Medium zur Vermittelung der magnetischen Feldzustände zu Hilfe zu rufen brauchten.

35. Wirkung zweier langer Magnetstäbe quer zu einander; Kraftlinienverlauf in bipolaren Magnetfeldern. — Wir wollen Versuche mit zwei langen stabförmigen Magneten anstellen, welche wir vertikal neben einander befestigen. Bei diesen können wir die Wirkung von den äussersten Enden ausgehend ansehen; bei langen Stäben erhalten wir dann Magnetfelder, welche nur durch zwei räumlich engbegrenzte Gebiete, die Pole, bestimmt sind, sogenannte „bipolare" Felder.

Zur Herstellung der Figuren 12 und 13 dienten zwei 50 cm lange, 1 cm dicke, gleich stark magnetisierte Stäbe, welche in einem aus Grundbrett und Deckbrett bestehendem Holzgestelle von 50 cm Höhe in verschiedenen Entfernungen voneinander vertikal aufgestellt werden konnten, entweder so, dass beide Stäbe ungleichnamige Pole oder so, dass sie gleichnamige Pole nach oben kehrten. Auf dem Deckbrett, unmittelbar über den oberen Enden, wurden die Kraftlinienbilder erzeugt.

a) Feld zweier ungleichnamiger Pole (Fig. 12). Die von dem einen Pole *n* ausgehenden Kraftlinien werden von dem entgegengesetzten

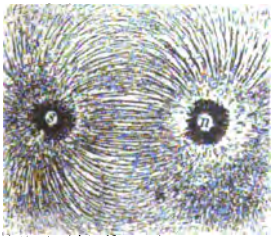


Fig. 12.

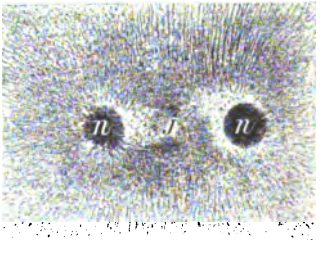


Fig. 13.

Pole *s* des anderen Stabes aufgesaugt, wie ein Vergleich mit der radiären Ausbreitung im unipolaren Felde Fig. 5 zeigt. Dabei werden auch die ferner liegenden Linien nach dem Südpole hin abgelenkt.

Die Anhäufung von Eisenfeilicht um *n* und *s* herum und das Auftreten von leeren Stellen daneben hat den schon in § 21 angegebenen Grund.

b) Feld zweier gleichnamiger Pole (Fig. 13). Die von dem einen Pole *n* ausgehenden Kraftlinien werden von dem gleichen Pole *n* des anderen Stabes zurückgestossen. Die Figur lässt deutlich erkennen, wie diese rücktreibende Kraft das gesamte Linienbündel erfasst; die Feilichtketten verlaufen wesentlich nach aussen. Zwischen beiden Polen entsteht ein von Kraftlinien vollkommen freier Feldteil *j*, ein Indifferenzpunkt.

Da ein Zug längs der Kraftlinien besteht, so müssen sich die ungleichnamigen Pole der Fig. 12 einander zu nähern suchen. Sie scheinen sich also auch in den zu den Stabachsen senkrechten Richtungen anzuziehen. Umgekehrt muss der Druck quer zu den Kraftlinien die gleichnamigen Pole der Fig. 13 voneinander zu entfernen suchen, sie scheinen sich abzustossen. Wir haben hier die Anziehungs- und Abstossungsregel einzelner Pole durch Feilichtbilder illustriert.

Hierdurch werden die ponderomotorischen Wirkungen, welche wir in der ersten Hälfte A) dieses Kapitels benutzten, erklärt. Da ein *n*-Pol Kraftlinien aussendet, so wird er von einem *S*-Pol angezogen (Fig. 12), und wandert auf diesen zu, wenn er beweglich ist; von einem festliegenden *N*-Pole wird er in der Richtung von dessen Kraftlinien zurückgestossen, da seine eigenen Linien gegen die des festen *N*-Poles ausströmen (Fig. 13). Das Umgekehrte gilt für den *s*-Pol. Wird daher ein *n*-Pol in ein festliegendes Magnetfeld getaucht, so drücken ihn die von ihm ausgehenden Linien durch den Kraftlinienquerdruck in dem Richtungssinne der Feldkraftlinien voran. Ein Südpol saugt sich gewissermassen an den Kraftlinien entlang; der Zug längs der von ihm aus dem Felde aufgenommenen Kraftlinien bewegt ihn also dem Kraftliniensinne entgegen.

36. Quellpunkte und Sinkstellen im magnetischen Kraftfelde. — Wir haben wiederholt bei der Beschreibung der Kraftlinienbilder Bezeichnungen gebraucht, welche den Erscheinungen einer strömenden Flüssigkeit entlehnt sind. Wir sprachen geradezu von einem Strömen der Kraftlinienbündel, von einem Ausfliessen derselben aus dem Nordpol und dem Hinströmen zu einem Südpol und werden dieser Bezeichnungsweise entsprechend später den sehr wichtigen Begriff des „Kraftlinienflusses“ oder kurz „Kraftflusses“ genauer präzisieren. Diese Bezeichnungsweise ist ein Bild und als solches ist es auch immer nur von seinen Urhebern, Faraday und Maxwell, betrachtet worden. Wir nehmen durchaus nicht an, dass längs der Kraftlinien oder in ihnen selbst wirklich etwas fliesst. Dennoch ist dieses Bild sehr treffend wie z. B. ein Blick auf die Figur 12 lehrt. Die Kraftlinien ziehen sich genau so durch unser Feld, wie die Stromfäden einer

Flüssigkeit, welche bei n etwa aus einem Rohre in ein Bassin eintritt und bei s durch ein Fallrohr wieder abgeleitet wird. Das treibende ist bei der Flüssigkeit das Gefälle. Für das magnetische Feld existiert eine ähnliche Grösse, welche den Verlauf der Kraftlinien gerade so regelt, wie das Gefälle in dem angezogenen Beispiele die Strömungslinien. Den Punkt n, in dem Kraftlinien in das Feld aus magnetischen Massen heraustreten, nennt man einen **Quellpunkt** oder eine Kraftlinienquelle (source), den Punkt s, wo sie aus dem Felde aus- und in umgebende Massen eintreten, in denen sie sich (zunächst) unserer weiteren Beobachtung entziehen, eine **Sinkstelle** (sink). Unserer Festsetzung in § 28 gemäss haben wir **den Nordpol eines jeden Magneten als Quellpunkt, jeden Südpol als Sinkstelle magnetischer Kraftlinien anzusehen.**

Wir verdanken MAXWELL, der ein eifriger Angler war, diese treffenden Bezeichnungen. Sie charakterisieren die Polargegenden eines Magneten durch eine rein geometrische Eigenschaft.

Vorrichtung zur Demonstration der Quellpunkte und der Sinkstellen eines Magnetfeldes (Fig. 14). An ein rundes flaches, mit Rand versehenes, nach unten kegelförmig vertieftes Becken A von ca. 40 cm Durchmesser sind unten zwei cylindrische Rohrstücke B (3 cm Durchmesser) und C (2,5 cm Durchmesser) angelötet. Das Becken wird von drei ca. 20 cm hohen Füssen aus Blechstreifen getragen. An C ist mit einem Stücke Gummischlauch eine Vorlage D befestigt, in deren zweiten, horizontalen Tubulus ein weites Glasrohr E durch einen Kautschukstopfen eingesetzt ist; an das innere Ende von E ist ein nach unten gebogener und flachgedrückter Gummischlauch F angesetzt. Die Vorlage wird zur Hälfte mit Sägespänen gefüllt.

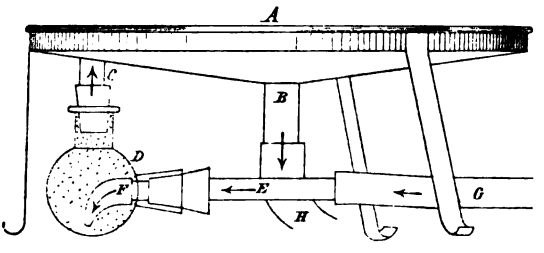


Fig. 14.

Lässt man durch G, E und F einen kräftigen Wasserstrom in die Vorlage eintreten, so nimmt dieser die Späne (welche sich, wenn sie durchweicht sind, bei stillstehender Wasserfüllung am Boden sammeln) mit und führt sie durch C auf den Teller A. Hier kennzeichnen sie den Verlauf der einzelnen Stromfäden, welche sich um die Mündung von D herum (Quelle) gerade so verbreiten, wie die Kraftlinien um den Nordpol n (Fig. 12) und in Bögen der Sinkstelle B, wie die Kraftlinien dem Südpole s zuströmen. Hier werden sie von der Röhre B aufgenommen und durch den Schlauch H fortgeleitet.

37. Das Feld zwischen zwei parallelen Stabmagneten. — Untersuchen wir das Feld zweier Magnetstäbe, welche auf horizontaler Unterlage parallel nebeneinander liegen, in einer zu beiden Stabachsen parallelen Ebene. Es zeigt sich auch hier, dass die Druck- und Zug-

spannungen vollkommen zur Erklärung der beobachteten ponderomotorischen Wirkungen ausreichen.

Versuch 28. Legen wir zwei kreiscylindrische Stäbe auf glatter ebener Unterlage nebeneinander, so rollen sie aus geraumer Entfernung aufeinander zu, falls ungleichnamige Pole nach derselben Richtung liegen. Dieselben runden Stäbe rollen aber bei Umkehrung des einen voneinander weg.

Die Kraftlinienbilder:

a) Die ungleichnamigen Pole einander gegenüberliegend (Fig. 15). Die Kraftlinien, welche von den Polen n_1 und s_1 des einen Magneten ausgehen, biegen zu den Polen s_2 und n_2 des anderen um, vereinigen sich mit den aus diesen austretenden Linien und stellen so eine Verbindung zwischen den Stäben her, welche in der Nähe der beiden Pole fast geradlinig ist; erst ausserhalb des Zwischenraumes bauchen sich die Kraftlinien infolge des Querdruckes nach aussen hin aus. Das Bild zeigt, dass eine kräftige Zugwirkung beide Stäbe zueinander hintreibt. An dem Zuge nehmen nicht nur die polaren Stabenden teil, sondern auch die weiter nach der Mitte zu gelegenen Partien, wie die freilich hier immer spärlicher werdenden Kraftlinien zeigen, welche den Zwischenraum überbrücken. Nur wo die Kraftlinien den Indifferenzzonen i_1 und i_2 parallel verlaufen, entsteht eine von Kraftlinien freie Stelle j. Beachten wir die räumliche Anordnung der Kraftlinien, wie sie sich aus einer Kombination der vorliegenden Fig. 15 mit der Fig. 5 ergiebt, so erkennen wir, dass der Raum, an den Kraftlinien von vier Seiten her herandrängen, einer geraden Linie folgt, welche in dem Indifferenzpunkte j senkrecht auf der Bildebene steht.

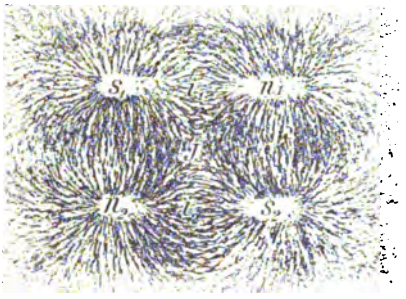


Fig. 15.

Die Kraftlinien verlaufen zum grossen Teile in dem Raume zwischen beiden Stäben; ein Vergleich mit ihrer Verteilung beim einfachen Stabe (Fig. 4) zeigt, wie sie in den Zwischenraum hineingezogen werden. Auch die auf der anderen Seite aus den Stabenden austretenden Linien biegen viel weniger steil ab und ziehen viel mehr nach der Mitte des Bildes.

b) Die gleichnamigen Pole einander gegenüberliegend (Fig. 16). Die Kraftlinien, welche von den Polen n_1 und s_1 des einen

Magneten ausgehen, werden von den Linien, welche von den Polen n_2 und s_2 des anderen Magneten kommen, zurückgestossen. Sie drängen sich aus dem Zwischenraume heraus und verlaufen in der Mittellinie fast parallel. Zwischen je zwei Polen entstehen dadurch zwei Indifferenzpunkte J' und J'', welchen zwei geradlinige, senkrecht dazu verlaufende Indifferenzzonen im Raume entsprechen. Die Querdrucke drängen die Stäbe auseinander. Dieses Heraus- und zur Seite Drücken verschiebt auch die weiter von dem Zwischenraume entfernt verlaufenden Linien; sie erscheinen nach oben und unten abgebogen.

Bei unserer Darstellung könnte es so scheinen, als ob die magnetischen Wirkungen an einem Orte erst dadurch bemerkbar würden, dass längs der Kraftlinien Eisenfeilichtketten die Wirkung bis zu dem betreffenden Punkte hin fortgepflanzt haben. Dies ist nicht der Fall, sondern die magnetische Kraft hat in jedem Punkte schon vorher eine bestimmte Grösse und Richtung, in die sich dann die Eisenteilchen einstellen. Durch das weiche Eisen wird freilich das Feld etwas modifiziert, aber doch nur sehr wenig. In Fig. 17 ist dieselbe Anordnung zweier Magnetstäbe mit gleichgerichteten gleichnamigen Polen nochmals verwendet, wie

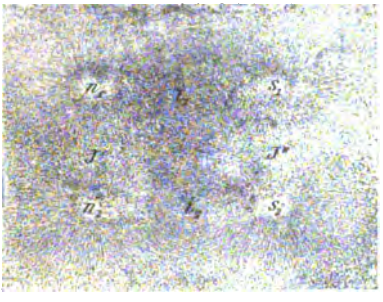


Fig. 16.

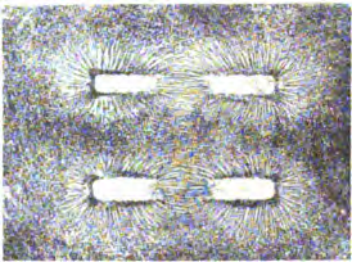


Fig. 17.

sie schon zur Herstellung der Fig. 16 gedient hatte. Nur sind die Kraftlinien nicht bis zu ihrer Fortsetzung bis zu den Indifferenzpunkten J' und J'' hin herausgeklopft worden. Gleichwohl sieht man, namentlich wenn man das Bild des einen Stabes zuhält, wie die Kraftlinien aus dem Innenraume herausgedrängt sind. Die Spannungen sind also schon da, wenn auch unsere Eisenfeilichtketten sich noch nicht an den Punkten J' und J'' treffen.

38. Transversalwirkungen; Ablenkungen; die Hauptlagen. — Wir wollen von dem Kraftlinienverlaufe ausgehen und legen zwei Stäbe so in die Rinnen a und c des Brettes Fig. 9, dass ihre Achsen senkrecht zu einander stehen und der Endpunkt des einen nur wenig von der Mitte des anderen Stabes entfernt ist. Das Kraftlinienbild in einer zu den Achsen parallelen Horizontalebene giebt Fig. 18.

Die von dem Quermagneten M_2 ausgehenden Kraftlinien laufen zu dem ungleichnamigen Pole. Auf der anderen Seite werden sie von denen

des gleichnamigen Poles zurückgedrängt. Hier entsteht ein Indifferenzpunkt. Unter der Wirkung des Zwanges der einzelnen Feldpunkte wird der senkrechte Stab M_2 in der Figur nach rechts geschoben, wie der Pfeil andeutet; rechts ziehen die beiderseitig angehefteten Kraftlinien, die sich zu verkürzen suchen, links schieben die sich gegenseitig zurückdrängenden Linien entsprechend nach. Auf der linken Seite entsteht eine Indifferenzzone, welche sich von J aus schräg nach rechts oben erstreckt.

Versuch 29. Die ponderomotorischen Antriebe. Über das eine Ende des einen Stabes schiebt man eine eng anschliessende Hülse mit Haken, an welchen man einen Faden befestigt, so dass der Stab vertikal herabhängt. Man nähert ihn der Indifferenzzone des horizontal liegenden anderen Stabes; er wird nach dem einen Ende hin gezogen, entsprechend dem Kraftlinienverlaufe.

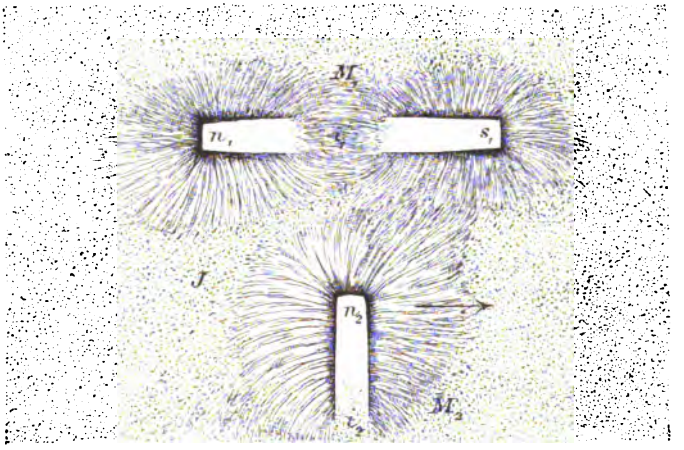


Fig. 18.

Versuch 30. Einer der beiden Stäbe M_1 wird in der Mitte auf eine Spitze gestellt, oder an einen Faden gehängt, so dass er sich in der Horizontalebene frei herumdrehen kann; er stellt sich nordsüdlich (Ruhelage).

Man nähert den anderen (Hand-) Magneten M_2

a) von Osten oder Westen her in derselben Horizontalebene mit dem einen oder anderen Pole voran, so dass seine Achse immer senkrecht zur Ruhelage von M_1 steht und durch dessen Drehpunkt geht: Erste Hauptlage (Gauss und Weber): es finden Ablenkungen statt.

Dieselben erklären sich leicht aus den zwischen den einzelnen Stabhäften vermittelten Wirkungen.

b) von Süden oder Norden her senkrecht zur Ruhelage von M_1 in der einen oder anderen Lage der Pole, so dass die Richtung der Ruhelage immer durch die Mitte von M_2 geht: Zweite Hauptlage: es finden wiederum Ablenkungen statt. Sie sind geringer (nahe halb so gross) als bei a bei gleichem gegenseitigen Abstande der Stabmitten; ihr Sinn ergiebt sich auch hier mit Rücksicht auf die Pollagen.

Wir führen diese Ablenkungen nicht auf die Wirkung einzelner punktförmiger Pole zurück; wie das Kraftlinienbild Fig. 18 erkennen lässt, beteiligen sich in der That an diesen ablenkenden Wirkungen nicht nur die äussersten Enden, sondern beinahe alle Teile der Stäbe, wenn wir die Betrachtungen nicht auf sehr dünne und lange Stabmagnete, welche weit voneinander entfernt sind, beschränken.

3. Kapitel.

Der Magnetismus als tellurische und kosmische Erscheinung.

Zunächst tritt uns die magnetische Eigenschaft in der Natur nur an dem Magnetsteine direkt entgegen; durch Übertragung auf Stahlmassen können wir sie weiter verbreiten; dennoch könnte es scheinen, als ob dem Magnetismus ein ziemlich engbegrenzter Wirkungsbereich zugemessen sei. Wir wollen daher, ehe wir tiefer in das Wesen dieser Erscheinungen einzudringen suchen, zeigen, dass ihnen eine ausserordentlich viel höhere Bedeutung zukommt, als die ersten magnetischen Beobachtungen vermuten lassen konnten. Die ganze Erde ist ein Magnet. Wir befinden uns dauernd in ihrem Kraftlinienfelde. Dieses Feld ist kein ruhendes, sondern ein fortwährend pulsierendes, durchzuckt von heftigen Zustandsänderungen und auf ewiger Wanderung begriffen. In den Variationen dieser Feldzustände erkennen wir weiter das Eingreifen kosmischer Ursachen, so dass wir durch die erdmagnetischen Kraftlinien an ferne Welten angeschlossen erscheinen; diese Erkenntnis verschafft den magnetischen Kräften eine universelle Bedeutung.

A) Der Magnetismus als tellurische Eigenschaft.

39. Die erdmagnetischen Elemente. — Wir haben schon oben 1, D) die Süd-Nordweisung der Magnetnadel erwähnt; da sie sich nahezu überall auf der Erdoberfläche zeigt, lässt sie auf eine planetare Eigenschaft zurückschliessen, auf eine magnetische Kraft, welche dem Erdkörper als solchem innewohnt. Wir hatten diesen „Erdmagnetismus" seither nur zur Bestimmung der Polaritäten unserer Magnete benutzt. Jetzt wollen wir den Kraftlinienverlauf im erdmagnetischen Felde und seine Bestimmungsstücke näher ins Auge fassen. Dazu benutzen wir eine nach allen Richtungen hin frei bewegliche Magnetnadel.

Versuch 31. Man hängt eine gute, unmagnetische Stahlnadel so auf, dass sich die auf ihre beiden Hälften wirkenden Schwerkräfte in Bezug auf den Drehpunkt gegenseitig aufheben, magnetisiert sie durch Streichen, achtet auf die erzeugte Polarität und bringt die Nadel wieder in schwebende Lage ausserhalb eines jeden künstlichen Magnetfeldes. Sie senkt eine Spitze, und zwar bei uns ihr Nordende, um einen bestimmten Winkel nach unten und stellt sich in eine bestimmte Vertikalebene ein. Man führt die Nadel im Zimmer herum (genügend weit von Eisenmassen [Ofen u. dergl.] entfernt). Die Nadelstellungen sind einander parallel, wir befinden uns also in einem homogenen Felde.

a) Richtung der erdmagnetischen Kraftlinien. Die frei bewegliche Nadel stellt sich in die Richtung der Kraftlinien des magnetischen Erdkörpers, zu deren Festlegung wir zwei Winkelgrössen brauchen.

Versuch 32. Man hält die Nadel über eine horizontale Ebene, auf der man die Süd-Nordlinie (geographischen Meridian) bezeichnet hat[1]) und legt an sie ein vertikal gehaltenes Blatt: Die durch ihre Richtung bestimmte Vertikalebene hat angenähert Süd-Nordrichtung, aber nicht genau; sie weicht um einen gewissen Winkel von dieser Richtung ab, im mittleren Europa ungefähr um 10—14 Grad mit dem nach Norden gerichteten Ende nach Westen. Diesen Winkel nennt man die magnetische Deklination, und die Richtung der Vertikalebene durch die Nadelachse „den magnetischen Meridian“ am Beobachtungsorte.

Man bezeichnet ferner auf dem vertikalen Blatte die Richtung der Nadel, legt durch diese eine Horizontale und misst (etwa mit dem Transporteur) den Richtungsunterschied. Man findet im mittleren Europa 60—68 Grade. Diesen Winkel nennt man die magnetische Inklination.

Durch die beiden Winkel der Deklination und Inklination ist an jedem Orte die Richtung der erdmagnetischen Kraftlinien bestimmt.

b) Sinn der Kraftlinien. Da sich eine Magnetnadel mit ihrer vom *s*- nach dem *n*-Pole gerichteten Achse immer in die Richtung der Kraftlinien stellt, so gehen bei uns die erdmagnetischen Kraftlinien

[1]) Anmerkung. Diese Richtung findet man mit einer für diesen Versuch ausreichenden Genauigkeit in folgender Weise: Auf einer horizontalen Ebene befestigt man einen vertikalen, mit einem durchlochten Bleche versehenen Stift, zeichnet um den Fusspunkt konzentrische Kreise und bezeichnet die Punkte, in denen am Vor- und Nachmittag desselben Tages das Schattenbild die einzelnen Kreise schneidet; die Halbierungslinie des auf je einem Kreise bezeichneten Bogens giebt die Süd-Nordlinie.

unter einem Winkel von 60—68 Grad gegen den Horizont von oben her in den Erdboden hinein, mit einer geringen westlichen Abweichung von der Richtung Süd gegen Nord.

Wir müssen uns demnach in der Nähe des geographischen Nordpoles einen magnetischen Südpol vorhanden denken; sonst würde unsere Ausdrucksweise, welche das nach Norden weisende Ende der Magnetnadel als Kraftlinienquelle voraussetzt, der einfachen Abstossungs- bezw. Anziehungsregel der Polaritäten widersprechen.

c) Kraftliniendichte. Zur Bestimmung der Natur eines magnetischen Feldes ist noch die Zahl der Kraftlinien pro Flächeneinheit von Bedeutung. Dieselbe giebt ein Maass für die Grösse der magnetischen Kraft in dem Felde, die Intensität desselben. Wir werden erst im folgenden Kapitel die Methoden besprechen, diese Zahl genau zu bestimmen, erwähnen aber immer, dass nach den dort zu treffenden Festsetzungen die Intensität des erdmagnetischen Feldes bei uns eine solche ist, dass je eine Kraftlinie auf rund 2 cm² kommt.

Die drei Grössen: Deklination, Inklination und Intensität bestimmen vollkommen die Beschaffenheit des erdmagnetischen Feldes an einem Orte, man nennt sie die „erdmagnetischen Elemente" des Beobachtungsortes.

40. Modell des erdmagnetischen Kraftlinienfeldes. — Es ist wichtig, sich den Kraftlinienverlauf des erdmagnetischen Feldes möglichst anschaulich zu machen, da er bei gewissen, später zu besprechenden Induktionserscheinungen von Bedeutung ist. Wir wollen ihn an einem Modell erläutern.

Auf der von einem Fusse F (Fig. 19) getragenen Messingsäule H ist an einem Gelenk die 10 cm im Durchmesser haltende, 1 cm dicke Holzkreisscheibe S so beweglich, dass sie in verschiedene zum Horizont geneigte Lagen gestellt werden kann. An ihr ist der in Grade geteilte Halbkreis G befestigt. Der von H getragene Zeiger Z giebt die Neigung der Scheibe gegen die Vertikale an. Eine Seite (n) der Holzscheibe ist rot, die andere (s) blau angestrichen. Durch die Scheibe S sind in der Richtung s gegen n 39 Nadeln senkrecht hindurchgesteckt, welche vorn (an der Nordseite) Pfeilspitzen tragen. Die Nadeln stehen möglichst gleich weit voneinander ab, sind also durch die Mittel- und Eckpunkte von regulären Sechsecken hindurchgeführt. Da die Fläche der Scheibe 78 cm² Inhalt hat, so kommen auf je 2 cm² je eine Nadel. Stellt man das Modell so auf, dass die Nadeln der Richtung der magnetischen Meridianebene parallel sind und das rote Ende gegen den geographischen Norden gekehrt ist, neigt man endlich die Scheibe

Fig. 19.

um einen der Inklination gleichen Winkel gegen die Vertikale, so stellen die um denselben Winkel gegen den Horizont schräg nach unten weisenden Nadeln das homogene erdmagnetische Feld dar.

41. Die Horizontalkomponente des Erdmagnetismus. — Zum Studium der erdmagnetischen Kraft ist die in § 39 verwendete Nadel wegen der Unsicherheit der Aufhängung nicht recht geeignet; man benutzt daher Magnetstäbe mit nur einem Grade der Freiheit und zwar solche, die sich um eine vertikale Achse drehen können; um das Niedersinken des Nordendes durch die schräg nach unten wirkende Kraft (den dip der Engländer) aufzuheben, beschwert man das Südende oder verlegt den Drehpunkt etwas gegen das Nordende des Stabes. Von der gesamten erdmagnetischen Kraft, die wir mit $\mathfrak{H}$ bezeichnen wollen, wirkt auf einen solchen Stab nur die Komponente $\mathfrak{h}$, deren Richtung die des Horizontes ist. Bezeichnet man mit i den Inklinationswinkel, so stehen beide Grössen in der Beziehung zu einander:

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{H} \cos i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Kennt man daher die eine Grösse, so kann man die andere leicht danach berechnen, falls die Inklination bekannt ist. Wir heben an der Horizontalkomponente noch eine wichtige Eigenschaft der erdmagnetischen Kraft hervor:

Versuch 33. Ein kleines kräftiges Magnetstäbchen legt man auf einen flachen Kork und lässt diesen auf völlig ruhig stehendem Wasser schwimmen: Die Nadel dreht sich in die Süd-Nordrichtung, schwimmt aber weder nach dem einen, noch nach dem anderen Rande. Das Nordende der Nadel wird nach Norden, das Südende nach Süden gezogen; der Versuch zeigt, dass beide Zugwirkungen einander völlig gleich sind.

Von dieser Art waren die ersten „Kompasse"; die Chinesen wandten schon sehr früh auf Kork schwimmende Magnete an, um sich über die Himmelsrichtung bei ihren Wanderungen durch die öden Steppen und Wüsten Innerasiens zu orientieren.

Greifen an einem Körper zwei untereinander parallele, aber nach entgegengesetzten Richtungen wirkende Kräfte von derselben Grösse an, so spricht man von einem „Kräftepaare" (einer Koppel, couple). Die Wirkung des Erdmagnetismus auf einen an beiden Polen gleich starken Magneten ist also die eines solchen Kräftepaares.

Modell des erdmagnetischen Kräftepaares. — Der Stab m (Fig. 20), welcher den Magneten darstellt, ist auf einer von dem Klotze K getragenen Spitze in der Horizontalebene frei beweglich. An seinen Enden n und s sind Haken hh befestigt, an welchen vermittels der Fäden ff die einander gleichen Gewichte gg angreifen. Die Fäden sind über Rollen rr geschlungen, welche von den durch Ausgiessen mit Blei beschwerten Klötzen k_1 und k_2 getragen werden. Beide Klötze stehen so, dass die Fäden ff dem magnetischen Meridian parallel verlaufen.

k_1 nach Süden, k_2 nach Norden gerichtet. Die Gewichte $g\,g$ stellen die beiden auf m wirkenden Komponenten der Horizontalintensität dar; $n\,m$ und $s\,m$ sind ihre gleichen Hebelarme. Das Produkt der bewegenden Kraft (Gewicht g) in den Hebelarm nennt man das Moment; Stablänge mal der an den Enden angreifenden Kraft ist daher das Moment des wirkenden Kräftepaares. Bringt man den Stab m aus seiner Gleichgewichtslage heraus, so führen ihn die beiden auftretenden Drehkräfte in die Meridianrichtung zurück. Hebt man ihn von dem Klotze ab, so bewegt er sich weder nach Süden noch nach Norden. Wir bedürfen dieses einfachen Modelles noch im zweiten Abschnitt.

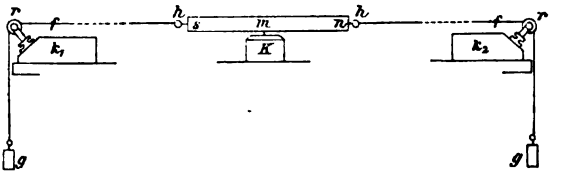


Fig. 20.

42. Deklinatorien. — Instrumente, welche dazu dienen, die magnetische Deklination zu bestimmen, nennt man Deklinatorien. Sie bestehen aus zwei Teilen, der Magnetnadel, welche die Richtung des magnetischen Meridians angiebt und einer Vorrichtung, welche die Lage des geographischen Meridians bestimmt. In den einfachsten Fällen wird durch ein Diopter eine ferne Marke anvisiert, welche genau nördlich oder südlich im Meridian des Beobachtungspunktes auf Grund astronomischer Beobachtungen festgelegt worden ist. Bei genaueren Instrumenten verwendet man ein mit Fadenkreuz versehenes Fernrohr; ist dasselbe mit Teilkreisen fest verbunden (Altazimut), so bestimmt man die Meridianrichtung durch direkte Himmelsbeobachtungen (z. B. korrespondierende Höhen). Die Verbindungslinie der Pole fällt nicht immer genau mit der Achse der Nadel, der Verbindungslinie der Spitzen, zusammen. Da man der Beobachtung nur die letztere zu Grunde legen kann (die Lage der Pole ist nur ungefähr bekannt), können Fehler entstehen. Dieselben werden umgangen, wenn man die Nadel umlegt und die Stellung der Spitzen in der einen und anderen Lage beobachtet; die Mittellage ist die wahre Richtung des magnetischen Meridians.

Man macht sich dies an einem Modelle leicht klar; durch ein langrhombisches Blechstück, die Nadel, sind ausserhalb der Längsdiagonale zwei Löcher gebohrt, die Polstellen, als die Angriffspunkte der Horizontalkomponente. Zwei in ein Brett geschlagene Stifte können durch die Löcher gesteckt werden. Eine durch diese auf dem Brette gezogene Linie repräsentiert die Meridianrichtung. Legt man das Blech so auf das Brett, dass die Stifte durch die Löcher gehen, so weichen die Nadelspitzen in der einen Lage um ebensoviel nach der einen Seite von der Meridianrichtung ab, als nach dem Umlegen nach der anderen Seite.

Die Nadelspitzen spielen gewöhnlich über einer Kreisteilung; ist der der geographischen Meridianrichtung entsprechende Winkelwert

bekannt, so giebt die Differenz desselben gegen den Winkel der mittleren Nadellage die Deklination.

Genauere Werte erhält man, wenn man an dem einen Ende eines hängenden Magnetstabes eine Sammellinse und am anderen in der Brennweitenentfernung der Linse ein Fadenkreuz senkrecht zur Stabachse befestigt. Blickt man mit einem auf ferne Gegenstände eingestellten Fernrohre durch die Linse, so sieht man das Fadenkreuz deutlich. Ist im Beobachtungsfernrohre ein zweites Fadenkreuz angebracht, so kann man die Achsenrichtung des Stabes an einem mit dem Fernrohre verbundenen Teilkreise sehr genau ablesen. Weil die magnetische Achse mit der optischen (Fadenkreuz-Sammellinse) nicht zusammenfällt, legt man auch hier den Stab samt den an ihm befestigten Hilfsvorrichtungen um. Man kann auch eine Stahlröhre an den Enden magnetisieren und vorn eine Linse von einer Brennweite gleich der Rohrlänge, hinten ein Fadenkreuz einsetzen, und diesen fernrohrartigen Magneten sich in den Meridian einstellen lassen, indem man ihn an zwei diametral einander gegenüberliegenden Punkten seiner Mittelzone abwechselnd aufhängt (Methode des umgekehrten Fernrohres).

43. Bussole, Kompass. — Kennt man die Deklination für einen bestimmten Ort, so kann man umgekehrt die Einstellung einer Magnetnadel dazu benutzen, die Richtung des geographischen Meridians und damit der Himmelsgegenden aufzufinden. Zu diesem Zwecke werden Deklinationsnadeln in der Form der sogenannten Bussolen verwendet. Bei ihnen spielt die Nadel über einem in 360 Grade, oder (beim Bergmann) in 24 Stunden oder (beim Seefahrer) in 32 Striche eingeteilten Kreise; meist sind an ihr die Himmelsgegenden noch besonders hervorgehoben (Windrose). Das Ganze ist in ein Gehäuse eingeschlossen; eine Hebelvorrichtung gestattet, die Nadel während des Nichtgebrauches von der Spitze abzuheben (Arretierung).

Dem Italiener Giovanni Gioja aus Amalfi wird das Verdienst zugeschrieben, die Deklinationsnadel mit einem Teilkreise, der Strich- oder Windrose, fest verbunden und dadurch den für die Seefahrt unentbehrlichen Kompass erfunden zu haben. Beides, Nadel (oder Nadelsystem) mit Scheibe spielt frei auf der Spitze innerhalb einer mit Glasplatte geschlossenen Kapsel. In dieser ist in der Kielrichtung des Schiffes eine Marke angebracht. Da sich die Nadel nordsüdlich stellt, so liest der Steuermann an der Teilung unmittelbar ab, welche Richtung der Schiffskiel hat, wohin er also steuert. Der Kompass hängt gewöhnlich in einem System beweglicher Ringe (Cardani'sche Aufhängung), seine Rose schwimmt auf Alkohol, um von den Schiffsschwankungen möglichst frei zu sein.

44. Inklinatorien. — Eine an beiden Enden gleich schwere Magnetnadel ist um eine horizontale, mit Spitzen auf Steinen laufende, durch ihren Schwerpunkt gehende Achse drehbar. Bringt man die Vertikalebene, in der die Nadel schwingt, in die Richtung des magnetischen Meridians, so stellt sie sich in die Kraftlinien schräg nach unten ein. Ein vertikaler Teilkreis gestattet die Spitzenstellung abzulesen. Die Nulllage wird durch eine Libelle oder ein Lot gegeben. Zur genauen Bestimmung der Inklination am Teilkreise muss die Nadel umgelegt und das Mittel aus beiden Stellungen genommen werden.

45. Äquivalenz des erdmagnetischen Feldes mit dem Felde eines künstlichen Magneten: Astasierung. — Wenn die Erde wirklich einem Magneten vollkommen vergleichbar ist, so müssen auch die erdmagnetischen Kraftlinien durch einen gewöhnlichen Dauermagneten gerade so beeinflusst werden, wie es die Linien eines jeden anderen Magneten werden.

Versuch 34. Eine grössere Deklinationsnadel wird über einem den magnetischen Meridian bezeichnenden Striche aufgestellt. Hoch darüber ist ein grosser Stabmagnet an einem festen, ungedrillten, über eine Rolle geführten Faden in horizontaler Lage so befestigt, dass seine Mitte über der Mitte der Deklinationsnadel schwebt. Beide Magnete werden durch die erdmagnetische Kraft so gerichtet, dass ihre roten Enden nach Norden, die blauen nach Süden weisen. Nun lässt man den Stab herab: Die Kraft, welche die Deklinationsnadel in den Meridian zurückzuführen strebt, wird immer geringer, schliesslich zeigt sich die Nadel gar nicht mehr vom Erdmagnetismus beeinflusst und schlägt endlich ganz um. Die Wirkung des Erdmagnetismus ist durch den Magnetstab aufgehoben.

Der Kraftlinienverlauf ist ähnlich dem der Fig. 16. Die Kraftlinien der Deklinationsnadel, welche ihre Enden an die erdmagnetischen Linien anschliessen, werden von dem von oben her herannahenden, gleichgerichteten starken Magneten weggedrängt und schliesslich so stark nach unten gebogen, dass der Zusammenhang mit den erdmagnetischen Kraftlinien reisst und die Linien der Nadel mit denen des Stabes verschmelzen; dann ziehen sie die Nadel in die umgekehrte Stellung.

Sehr oft ist ein teilweises Freimachen einer Nadel von den erdmagnetischen Wirkungen erwünscht; um dies zu erreichen, legt man in entsprechende Entfernung einen Hilfsmagneten in den magnetischen Meridian. Man nennt diesen Vorgang wie bei gewöhnlichen Magneten: Astasierung einer Nadel im Erdfelde, den Hilfsmagneten einen Astasierungsmagneten.

Zweckmässig verbindet man zwei in umgekehrter Richtung liegende Magnete durch dieselbe Drehungsachse: „astatisches Nadelsystem".

Sind die auf jede Nadel wirkenden Kräftepaare sehr nahe gleich, so ist die Differenz der Wirkungen des Erdmagnetismus, welche allein noch zur Geltung kommt, sehr klein.

46. Die Werte der erdmagnetischen Elemente an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche; die erdmagnetischen Kurven. — Nehmen wir die Bestimmungen der Deklination, Inklination und Intensität des Erdmagnetismus an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche vor, so finden wir sehr verschiedene Werte, welche indessen ein bestimmtes Gesetz der Verteilung erkennen lassen. Je weiter man sich vom Äquator nach Norden und Süden zu entfernt, um so steiler zeigt die Magnetnadel nach unten, die Inklination wächst mit der geographischen Breite. Dabei neigt sich auf der Nordhalbkugel das Nordende, auf der Südhalbkugel das Südende nach unten. In den Äquatorialgegenden giebt es eine Zone, in der die Nadel genau horizontal schwebt, die Inklination also den Wert 0 hat: „magnetischer Äquator". Dieselbe fällt nicht mit dem Erdäquator zusammen. Sowohl auf der Nord-, wie auf der Südhalbkugel giebt es ferner Punkte, gegen die die Inklinationsnadel genau vertikal nach unten zeigt. Mit Rücksicht auf die Analogie bei künstlichen Magneten bezeichnen wir sie als die „magnetischen Pole des Erdkörpers". Sie fallen nicht mit den geographischen Polen zusammen; der magnetische Nordpol liegt bei 70,5° nördl. Breite und 98,5° W. L. von Greenwich, also im nordamerikanischen Inselreiche, der magnetische Südpol bei ca. 74° südl. Breite und ca. 148° Ö. L. Die Verbindungslinie der Pole geht nicht genau durch den Erdmittelpunkt.

Zur Veranschaulichung dieses Kraftlinienverlaufes benutzt man einen kleinen Erdglobus von Papiermachée, in dessen Inneres man einen Stabmagneten in der Richtung der magnetischen Achse des Erdkörpers bringt. Zur Untersuchung des Feldes dient wie oben ein kurzes, gut magnetisiertes Stück eines Stahldrahtes, welches in der Mitte an einem dünnen Coconfaden allseitig beweglich aufgehängt wird. Ist der eingeschlossene Magnetstab kräftig, so stört die Wirkung des Erdmagnetismus nur wenig, die Nadel stellt sich überall in die Richtung der aus dem Globus heraustretenden Kraftlinien.

Verbindet man alle Orte, welche dieselbe Inklination haben, so erhält man Kurven, welche ähnlich den Breitenkreisen um die Erde gehen; sie fallen nicht mit diesen zusammen, sind auch nicht untereinander parallel. Man nennt sie „Isoklinen". Die Isokline von 0° ist also der „magnetische Äquator". Verbindet man die Punkte gleicher Deklination auf der Erdoberfläche, so erhält man die sogenannten „Isogonen". Sie sind für den Seefahrer sehr wichtig, da sie ihm ermöglichen, an jedem Orte die Deklination seines Kompasses in Rechnung zu ziehen. Für uns haben andere Linien zur Veranschaulichung des Verlaufes der erdmagnetischen Kraft eine grössere Bedeutung:

Folgt man immer der Richtung der Deklinationsnadel nach Norden oder nach Süden, so wird man naturgemäss an die magnetischen Pole geführt. (Nur an diesem selbst nimmt die Deklinationsnadel keine bestimmte Richtung mehr an.) Dadurch erhält man Kurven, welche in jedem Punkte die Richtung der Horizontalkomponente des Erdmagnetismus angeben: die „magnetischen Meridiane". Sie fallen nicht mit den geographischen Meridianen zusammen.

Die Intensität des Erdmagnetismus ist am Äquator am geringsten und nimmt nach den Polen hin zu, jedoch nicht regelmässig. Die Orte grösster Intensität liegen nicht an den Polen, sondern excentrisch zu diesen. Der Erdkörper ist also ein ungleichförmig magnetisierter Körper. Die Intensitätsverteilung wird durch Kurven veranschaulicht, von denen jede Punkte mit demselben Werte der Intensität verbindet; sie heissen „Isodynamen".

47. Kraftlinienverlauf im Aussenraume des Erdkörpers. — Das erdmagnetische Feld ist der gesamte Aussenraum unseres Planeten, innerhalb dessen wir noch magnetische Wirkungen nachweisen können. Derselbe bildet also für uns eine die Erdoberfläche begleitende sehr dünne Schicht; denn wenn auch die führende Magnetnadel den Bergmann in der Tiefe nicht im Stiche lässt, und auf hohen Bergen sowie bei Ballonfahrten sich die magnetische Wirkung in gleicher Weise wie auf der Erdoberfläche bemerkbar macht, so ist doch der Bereich unserer Kenntnisse nach der Tiefe und Höhe ein enger im Vergleich mit dem vom Erdkörper eingenommenen Raume. Nur die Polarlichter geben uns, wie es scheint, einen gewissen Anhalt über den Verlauf der magnetischen Kraftlinien in den höheren Regionen unserer Atmosphäre. Immerhin können wir uns ein ungefähres Bild desselben machen, wenn wir uns an die Richtung der Inklinationsnadel halten.

Wir müssen uns denken, dass die erdmagnetischen Kraftlinien im Süden von Australien, im Viktorialand, ziemlich dicht und steil austreten. Weiter entfernt von dem Südpol (magnetischer Nordpol) treten ebenfalls Kraftlinien aus dem Erdkörper aus, aber mehr nach Norden geneigt und weniger dicht. Noch mehr nach Norden treten wir in die magnetische Indifferenzzone des Erdkörpers ein, welche in Gestalt eines ziemlich breiten Bandes über die Äquatorialgegenden hinzieht. Hierauf folgen Gebiete, in denen die Kraftlinien aus dem Aussenraume wieder in den Erdkörper eindringen, anfangs sehr mässig gegen den Horizont geneigt, dann immer steiler und dichter. Wir nähern uns dem magnetischen Südpol der Erde, auf der geographischen Nordhemisphäre gelegen. Endlich im nordamerikanischen Inselarchipel

steigen die Kraftlinien scheitelrecht aus der Höhe herab, um in grosser Dichte im Erdboden aus dem Aussenfelde zu verschwinden.

Man kann diesen Kraftlinienverlauf innerhalb eines magnetischen Meridians mit Hilfe einer magnetisierten Kugel versinnlichen, zu deren Herstellung freilich ein erst später zu besprechendes Hilfsmittel, ein elektrischer Strom, herangezogen werden muss. Auf den beiden Hälften einer ca. 2 cm im Durchmesser haltenden Kugel K von weichem Eisen (Fig. 21) werden treppenförmige Abdrehungen eingeschnitten, so dass ein übersponnener Kupferdraht von 1 mm Dicke aufgewickelt werden kann; die Figur zeigt nur die Querschnitte der einzelnen Drahtwindungen. Diese sind dabei in der Figur von links nach rechts verlaufend zu denken, also im Sinne der entsprechenden Zahlen. Die Drahtenden sind umeinander gewickelt und treten aus der Mittelzone (etwa aus der Mitte der Figur nach oben oder unten) aus. Um das Ganze sind zwei halbkugelförmige Messingschalen gedrückt, welche nur, um die Zuleitungen hindurchzulassen, einen kleinen Ausschnitt an ihrem Rande haben.

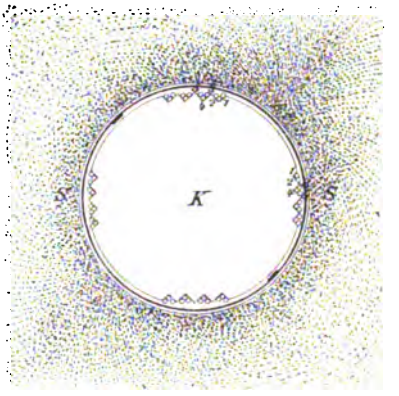


Fig. 21.

Die Kugel K stellt die Erde dar, die Eisenkugel das Erdinnere (die auffallend hohe mittlere Dichte der Erde deutet darauf hin, dass Schwermetalle und unter ihnen wahrscheinlich vorwiegend das weit verbreitete Eisen an dem Aufbau des Erdkernes wesentlich beteiligt sind), die Messinghülle die uns zugängliche Schale in der Gestalt von Litho-, Hydro- und Atmosphäre. Schickt man einen Strom durch die Windungen, so wird die Kugel magnetisiert.[1]) Legt man über sie eine Kartonscheibe mit einem kreisförmigen Ausschnitt, in welchen die Kugel gerade hineinpasst und erzeugt man das Kraftlinienbild, so erhält man eine strahlige Figur (Corona).

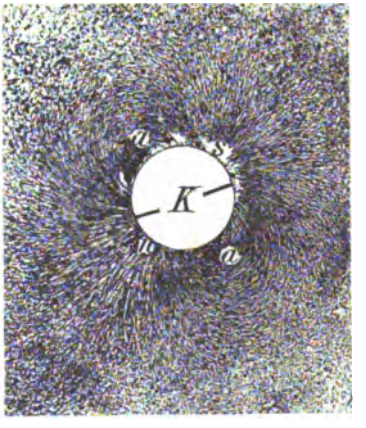


Fig. 22.

Fig. 22 giebt das direkte Kraftlinienbild, also einen Meridianschnitt durch das erdmagnetische Feld. An Stelle des hellen Kreises in der Mitte ist die Kugel K, in Wirklichkeit die Erde zu denken; die schräg nach innen verlaufenden kurzen Linien deuten die Richtung der Erdachse an. Soll das Bild projiziert werden, so legt man die Kugel in einen kreisförmigen Ausschnitt (etwas über 2 cm Durchmesser) einer Glasplatte, die horizontal in den Strahlengang gebracht wird; die seitlich herausgezogenen Zuleitungsdrähte stören nicht. Auf die Ähnlichkeit dieser Bilder mit der strahligen Sonnencorona kommen wir weiter unten zu sprechen.

[1]) Zur Stromerzeugung genügen zwei oder drei gewöhnliche Flaschenelemente.

48. Variationen des erdmagnetischen Zustandes. — Das Kraftliniensystem ist nicht fest mit dem Erdkörper verbunden, sondern zeigt fortwährende Schwankungen. Sowohl die Werte aller drei erdmagnetischen Elemente an einem Orte wie die Verteilung der magnetischen Kraft über die gesamte Erde variieren. Man unterscheidet:

a) Periodische Variationen, welche sich nach Ablauf eines bestimmten Zeitraumes in der gleichen Weise wiederholen. Gewisse Schwankungen dieser Art sind an die Achsendrehung des Planeten geknüpft, sie haben eine tägliche Periode. Das Nordende der Deklinationsnadel hat in den mittleren Breiten der nördlichen Hemisphäre morgens 8 Uhr den östlichsten Stand, dann bewegt es sich im Laufe des Vormittags langsam nach Westen und erreicht zwischen 1 und 2 Uhr nachmittags die grösste westliche Abweichung, um sich dann bis morgens früh 8 Uhr wieder allmählich nach Osten zurückzubewegen, wobei die Bewegung nachts am langsamsten vor sich geht. Die Deklinationsnadeln der südlichen Hemisphäre führen gerade entgegengesetzte Bewegungen aus; vormittags 9 Uhr zeigt das Nordende am weitesten nach Westen, nachmittags zwischen 2 und 3 Uhr geht es nach Osten. Zugleich damit führt die Inklinationsnadel eine periodische Bewegung aus, welche die Inklination am Vormittage vergrössert, am Nachmittage verkleinert. Die Nadelbewegung ist demnach eine solche, dass, wenn man in der Achsenrichtung s—n entlang blickt, ihr Nordende bei uns täglich eine in sich zurücklaufende Kurve im Uhrzeigersinne beschreibt. Die Kraftlinien bewegen sich also auf Kegelmänteln im gleichen Sinne einmal herum. Die Abweichungen von der mittleren Lage sind klein, da die genannten Variationen Amplituden von nur wenigen Minuten umfassen. Zu gleicher Zeit rücken die Kraftlinien etwas auseinander und zusammen, d. h. die Intensität variiert.

Die Kraftlinienbewegung hat ferner eine jährliche Periode, welche sich darin äussert, dass die Deklinationsnadel in beiden Hemisphären um einige Bruchteile einer Bogenminute östlicher zeigt, wenn die Sonne nördlich vom Äquator steht, also in unserem Sommer, und etwas westlicher, wenn sich die Sonne über der Südhalbkugel befindet, in unserem Winter. Zugleich zeigt die Inklinationsnadel in beiden Hemisphären eine Zunahme der Inklination in der Zeit von Dezember bis Januar und eine Abnahme derselben zwischen Juni bis August an. In unserem Winterhalbjahre Oktober bis März ist dabei die Intensität an allen Erdorten grösser als in den übrigen Teilen des Jahres.

b) Säkulare Variationen. Das ganze Kraftliniensystem und damit sämtliche erdmagnetische Kurven verschieben sich langsam; man hat seither nicht festzustellen vermocht, ob die Verschiebungen in einem

Sinne durch analoge entgegengesetzte aufgehoben werden und der alte Zustand wieder eintritt. Vielleicht schliessen sich auch diese Variationen zu Perioden zusammen, welche dann Zeiträume von Jahrhunderten umfassen würden.

Das Isogonensystem Europas wandert z. B. augenblicklich langsam nach Westen: dadurch rücken die Isogonen mit höheren Deklinationswerten immer mehr in den Atlantischen Ocean hinaus, so dass bei uns die westliche Deklination langsam abnimmt (jährlich um ungefähr 6 bis 7 Minuten). Der magnetische Äquator ist in beständiger Bewegung von Ost nach West begriffen und mit ihm das ganze Isoklinensystem, wodurch sich bei uns die Inklination fortwährend vermindert. Auch die Intensität bleibt nicht konstant über den Erdkörper verteilt, doch scheinen Abnahmen an gewissen Stellen durch Zunahmen an anderen kompensiert zu werden.

c) Temporäre oder plötzliche Variationen. Diese brechen scheinbar gesetzlos herein und erschüttern das ganze Kraftliniensystem. Diese „Störungen", wie man sie nennt, ergreifen oft weit ausgedehnte Distrikte der Erdoberfläche. Wenn auch vielfach terrestrische Vorgänge, wie Erdbeben, als Ursache herangezogen werden können, so weisen doch gerade diese Variationen auf ausserirdische Einflüsse hin, wir behandeln sie daher unter B).

49. Die Polarlichterscheinungen. — Im innigsten Zusammenhange mit dem magnetischen Kraftliniensystem der Erde stehen die oft sehr prächtig sich entwickelnden Lichterscheinungen, welche in beiden Polarregionen des planetarischen Magneten die höheren Schichten der Atmosphäre zu gewissen Zeiten durchleuchten. Sie sind geradezu der sichtbare Ausdruck des erdmagnetischen Zustandes und stehen namentlich mit den Variationen dieses Zustandes in so innigem Zusammenhange, dass sie Humboldt mit Recht als „magnetische Ungewitter" bezeichnen konnte. Wenn ein magnetischer Sturm über die Erde hinbraust und die Magnetnadeln erzittern, leuchten die Polarlichter, die nie ganz fehlen, mit besonderem Glanze auf.

Ihre Erscheinungsformen sind sehr mannigfaltige und hauptsächlich durch folgende Momente bestimmt:

1) Die ausgeprägte Form des Polarlichtes, das sogenannte strahlige Nord- oder Südlicht, die „Corona" (corona borealis) besteht aus leuchtenden Strahlen, deren Licht zwischen rot und orange einerseits oder gelb oder grün andererseits mannigfach variiert. Diese Strahlen flackern unbeständig hin und her und züngeln aus den höheren luftverdünnten Schichten der Atmosphäre herunter in die dichteren und umgekehrt.

2) Durch häufige und sorgfältige Beobachtung ist festgestellt worden, dass sich die Polarlichtstrahlen überall nahezu in die Richtung der magnetischen Kraftlinien stellen. Die einzelnen Strahlen zeigen also die Anordnung Figur 22.

3) Dieses Leuchten längs der Kraftlinien findet aber nicht überall in gleichem Maasse statt. Vor allem ist es stark oberhalb eines oder nach NORDENSKJÖLD oberhalb zweier konzentrischer Ringe ausgeprägt, welche die magnetischen Pole etwas excentrisch in einem gewissen Abstand umgeben. Innerhalb dieses Ringes, wo die Kraftlinien ziemlich steil und am dichtesten in den oder aus dem Erdboden steigen, sind die Strahlen herausgedrängt. Sie umstehen also die magnetische Achse wie zwei Lichtmanschetten, deren Kontur der Richtung der Kraftlinien folgt.

Aus dieser Anordnung der zum Leuchten gebrachten Teilchen unserer Atmosphäre erklären sich eine Reihe charakteristischer Eigentümlichkeiten der Polarlichter.

a) Das Auftreten des Konvergenzpunktes bei strahligen Polarlichtern. Befinden wir uns unter einer Region, innerhalb deren das Kraftlinienleuchten stattfindet, so sehen wir von allen Seiten Strahlen am Himmel emporflammen. Da die Kraftlinien innerhalb eines Bereiches, den wir von einem Beobachtungsorte aus übersehen können, untereinander parallel sind, so müssen aus Gründen der Perspektive die Strahlen für uns in einem Punkte zusammenlaufen. (Scheinbares Zusammenlaufen der Eisenbahngeleise eines geradlinigen Schienenstranges in weiter Ferne.) So entsteht am Himmel ein Konvergenzpunkt, die „Krone", von der die Strahlen ausgehen.

b) Das Bogenpolarlicht und das dunkle Segment. Befinden wir uns seitlich von einer Region, in deren höchsten atmosphärischen Schichten das Leuchten auftritt, so werden wir den uns nächsten Teil der Manschette nur als Lichtrand über dem Horizonte erblicken. Nach oben schiessen Strahlen aus, die sich aber nicht bis zum Konvergenzpunkte (dem Punkte am Himmel, nach dem das Süd- bezw. Nordende der Inklinationsnadel weist) fortsetzen. Da die Manschette nicht auf dem Erdboden aufsitzt, sondern in beträchtlichen Höhen der Atmosphäre endet, so sehen wir unter ihr hindurch in den dunkeln kontrastierenden Innenraum. So erklärt sich die auffallend dunkle Färbung des Himmels unter dem Lichtbogen, das „dunkle Segment".

c) Das Draperie-Polarlicht. Werden nur einzelne Kraftlinienschichten von dem Leuchtprozess ergriffen, so sehen wir schmale Ränder untereinander paralleler Lichtstreifen vom Himmel herabhängen.

Durchzuckt ein magnetischer Sturm den Erdkörper, so wogen die Kraftlinien wie die Halme eines Ährenfeldes hin und her und „die Lichtbänder schwellen und biegen wie vom Winde getrieben", wie dies viele Beobachter beschreiben.

d) Sichtbarkeit des Polarlichtes. Das Polarlicht tritt, wie erwähnt, nicht am häufigsten über den magnetischen Erdpolen auf, sondern über einer Zone, welche in grösserer oder geringerer Entfernung in einer geschlossenen Kurve um den magnetischen Pol herum verläuft. Verbindet man die Punkte gleicher relativer Häufigkeit der Polarlichter, d. h. konstruiert man die sogenannten „Isochasmen" (Fritz), so sieht man, dass gegen den magnetischen Pol hin die Häufigkeit der Sichtbarkeit allmählich zunimmt, noch ehe derselbe aber erreicht ist, wieder auffallend rasch abnimmt, so dass auf dem Pole selbst die Polarlichter weit seltener sind als in geringeren Breiten. Um den Nordpol herum lässt sich die Kurve maximaler Häufigkeit ziemlich genau festlegen; dass auch bei dem Südpol etwas Ähnliches stattfindet, steht fest, wenn auch das zu Gebote stehende Beobachtungsmaterial sehr spärlich ist.

B) Der Magnetismus als kosmische Kraft.

Magnetische Wirkungen ausserirdischen Ursprungs können wir nicht direkt nachweisen, wohl aber erkennen wir in dem wechselnden magnetischen Zustande unseres Erdkörpers unzweideutig das Spiel kosmischer Kräfte. Namentlich lassen die sogenannten „Störungen" in dem erdmagnetischen Kraftliniensystem auf die Einwirkungen fremder Himmelskörper schliessen. So ist der Magnetismus ein gewaltiges kosmisches Band, welches Welten mit Welten verknüpft.

50. Einfluss der Sonne auf die erdmagnetischen Elemente. — Vor allem ist es die Sonne, der Central- und Hauptkörper unseres Planetensystems, welche einen magnetischen Einfluss auf den Erdkörper ausübt. Dass es nicht die Wärmewirkung ist, welche sekundär die Verteilung der Kraftlinien beeinflusst, sondern der Sonnenkörper selbst, geht daraus hervor, dass die an den Sonnenstand gebundenen Variationen nicht dem Wärmegange (der bekanntlich hinter der scheinbaren Sonnenbewegung erheblich zurückbleibt), sondern ohne Verspätung der Stellung der Sonne selbst folgen.

Dreierlei Erscheinungen spiegeln sich in den Variationen der erdmagnetischen Elemente deutlich wieder:

a) Periode des jährlichen Umlaufes der Erde um die

Sonne. In der Winterszeit unserer Hemisphäre ist die Erde in ihrer elliptischen Bahn der Sonne näher als im Sommer. Zu gleicher Zeit ist auf allen Punkten beider Halbkugeln sowohl die Inklination wie die Intensität grösser. In der Sonnennähe werden also die Kraftlinien steiler in das Erdinnere hinabgezogen und dichter zusammengedrängt. Ebenso folgt ein Teil der Variationen der Deklination auf beiden Hemisphären in gleicher Weise dem Jahreswechsel in der Stellung der Erde zur Sonne.

b) Periode der Sonnenrotation. Der Sonnenkörper rotiert im gleichen Sinne wie die Erde um eine Achse. Die Dauer einer vollen Umdrehung umfasst $24^1/_2$ Erdentage; da aber die Erde zugleich um die Sonne wandert, so ist der gleiche Oberflächenpunkt dieser erst nach etwa 26 Tagen der Erde wieder zugewendet. Sowohl die Horizontalintensität wie die tägliche Variation der Deklinationsnadel lässt eine 26-tägige Periode erkennen, welche also auf eine magnetische Wirkung der Sonne als Ganzes hinweist.

c) Periode der Sonnenaktivität. Die Wärme- und Lichtstrahlung der Sonne ist nicht immer gleich, ebensowenig wie das Aussehen ihrer Oberfläche. Wir können deutlich Zeiten von erhöhter und verminderter Sonnenthätigkeit unterscheiden. Erstere sind durch grossen Reichtum an Flecken, Fackeln und Protuberanzen ausgezeichnet; in den Ruhepausen vermindert sich sowohl Zahl wie Grösse dieser Gebilde. Dieser Wechsel folgt ziemlich regelmässig einer Periode von 11 Jahren. Genau ebenso zeigen die Variationen der erdmagnetischen Elemente eine 11jährige Periode. Die täglichen Variationen der Deklination schliessen sich der Sonnenperiode so genau an, dass man aus der Zahl der Sonnenflecken eines Jahres die mittlere Grösse jener bis auf Bruchteile einer Bogenminute berechnen kann.

Ferner zeigt die Häufigkeit der Polarlichter in mittleren Breiten dieselbe Periode. Zur Zeit maximaler Aktivität, also zur Zeit der Sonnenfleckenmaxima, werden polarlichtähnliche Glimmerscheinungen in den höchsten Schichten der Atmosphäre fast überall auf der Erde gesehen.

Nicht nur die Sonnenthätigkeit im allgemeinen, sondern auch ihre einzelnen Momente spiegeln sich in der irdischen Kraftlinienanordnung wieder. So ist eine besonders heftige Eruption auf der Sonne fast regelmässig von grossen erdmagnetischen Störungen begleitet (magnetischer Sturm). Freilich ist es noch nicht gelungen, die einzelnen Phasen der solaren und der tellurischen Erscheinung einander eindeutig zuzuordnen. Dennoch steht es fest, dass magnetische Wirkungen der Sonne noch bei uns nachweisbar sind. Hieraus folgt durchaus nicht,

dass die Sonne sich wie ein grosser rotierender Dauermagnet verhalten müsse.

51. Magnetische Theorie der Sonnenkorona. — Es kann nach dem Vorhergehenden die Frage entstehen, ob wir an der Sonne nicht Erscheinungen beobachten, welche wir auf ihre magnetischen Eigenschaften zurückführen könnten. Ein ferner Beobachter der Erde würde an den Lichtsäulen der Polarlichter den Weg der erdmagnetischen Kraftlinien erkennen können. Ein Gebilde, welches eine grosse Ähnlichkeit hiermit hat, besitzt die Sonne in der That in der sogenannten „Corona". Diese ist zur Zeit geringer Sonnenthätigkeit eine wenig ausgedehnte, matt leuchtende Lichthülle ausserhalb der gewöhnlich sichtbaren Sonnenoberfläche, in der besonderc Einzelheiten nicht hervortreten. Zu Zeiten aber dehnt sie sich aus und nimmt eine strahlige Struktur an; sie erscheint als ein Netzwerk gebogener Strahlen, von denen einzelne weit in den gasverdünnten Aussenraum hinausschiessen. Denkt man sich das Kraftlinienbild Fig. 22 der magnetisierten Kugel Fig. 21 in allen durch den Kugelmittelpunkt gelegten Ebenen ausgeführt und gleichzeitig von einem fernen Standpunkte aus beobachtet, so würde die Gesamtheit aller Kraftlinien ein Netzwerk bilden, welches mit dem Aussehen voll entwickelter Strahlencoronen die grösste Ähnlichkeit hat. Versuche haben gezeigt, dass verdünnte Gase besonders leicht in Magnetfeldern zum Leuchten kommen (Ebert), so hier die verdünnte Sonnen- bezw. Erdatmosphäre in den Magnetfeldern ihrer Träger. Die Coronastrahlen würden gewissermaassen die sichtbar gewordenen Kraftlinien des Sonnenkörpers sein.

52. Einfluss des Mondes auf den Erdmagnetismus. — Der uns nächste Weltkörper, unser Trabant, der Mond, greift merkbar in das Kraftliniensystem seines Planeten ein. Er erzeugt eine periodische Bewegung der Deklinationsnadel, derart, dass zwischen zwei aufeinander folgenden Durchgängen des Mondes durch den Meridian eines Beobachtungsortes zwei Maxima und zwei Minima in dessen Deklination eintreten. Ebenso lässt sich für die Inklination und Horizontalintensität eine „Mondvariation" nachweisen.

53. Einwirkung der Planeten auf den Erdmagnetismus. — Man hat schon lange gewisse Variationen der erdmagnetischen Elemente mit den Stellungen der uns nächsten Planeten Venus und Mars in Beziehung gebracht. Neuerdings glaubt man nachgewiesen zu haben, dass alle Planeten magnetische Wirkungen auf die Erde ausüben (Leyst). Merkwürdigerweise ist der Einfluss des der Sonne nächsten Planeten, Merkur, des einzigen, der dichter als die Erde ist, der umgekehrte wie der aller anderen Planeten.

Die Venus zeigt wie der Mond einen Phasenwechsel, bei dem sie zu periodisch wiederkehrenden Zeiten als schmale Sichel erscheint und uns einen grossen Teil ihrer Nachtseite zukehrt. In dieser werden oft eigentümliche Lichterscheinungen beobachtet, welche man auf Polarlichter zurückzuführen geneigt ist.

Um hierüber Auskunft zu erhalten, wäre es von Wichtigkeit, nachzuweisen, ob sich aus den Beobachtungen auf eine Periodicität in der Deutlichkeit dieses Phänomens schliessen lässt. Gelänge der Nachweis eines Zusammenhanges mit der 11jährigen Sonnenthätigkeitsperiode wie bei den Polarlichterscheinungen des Planeten Erde, so wäre die innere Verwandtschaft beider Erscheinungen sehr wahrscheinlich gemacht.

4. Kapitel.

Ausmessung der Kraftfelder.

In diesem wie den folgenden beiden Kapiteln werden wir von einigen einfachen Rechnungsoperationen Gebrauch machen. Leser, welche zunächst nur die qualitativen Beziehungen kennen lernen wollen, können direkt zu Kapitel 6 übergehen.

A) Statische Methoden zur Messung magnetischer Grössen; die absoluten Einheiten.

Wir führen zunächst die bei quantitativen Bestimmungen im Gebiete des Magnetismus üblichen Grössen ein und besprechen diejenigen Messungsmethoden, bei denen wir magnetischen Kräften durch Schwerkräfte von bekannter Grösse das Gleichgewicht halten.

54. Das Kraftfeld der Schwere. — Überall auf der Erdoberfläche bemerken wir, dass frei bewegliche Massen einen Bewegungsantrieb nach „unten" erfahren. Diese Antriebe bedingen ihr Schwersein. Da die Erde in erster Annäherung Kugelgestalt besitzt, so heisst das: Alle Schwerkräfte sind nach dem Mittelpunkte der Erdkugel gerichtet, die Kraftlinien der Erdschwere laufen alle radiär von dem Mittelpunkte des Planeten aus. Sie zeigen aber gegenüber den Kraftlinien der magnetischen (und auch der elektrischen) Wirkungen die besondere Eigentümlichkeit, dass sie nicht wie diese polare Gegensätze aufkommen lassen; wir kennen bei der Schwere nur Anziehung, nicht aber Abstossung. Die von einem Gewichtsstücke auslaufenden Kraftlinien — denn auch dieses übt nach dem NEWTONschen Gesetze der allgemeinen Massenanziehung oder Gravitation, eine Anziehung auf jedes benachbarte Stück aus — sind den vom Erdmittelpunkte heraufkommenden Kraftlinien entgegengesetzt, wie die von gleichnamigen Polen ausgehenden Kraftlinien; der Planet besteht ja, soweit wir seine Masse kennen, nur aus Bestandteilen, welche sich der Schwere gegenüber durchaus wie unsere Gewichtsstücke verhalten; daher sind hier

Kraftlinienverkettungen, wie wir sie bei ungleichnamigen Polen beobachten, ausgeschlossen. Nichtsdestoweniger findet Anziehung statt. Dies zeigt mit Rücksicht auf den Kraftlinienverlauf bei gleichnamigen Polen (vergl. z. B. Fig. 29 auf Tafel I am Schlusse des Buches), dass längs der Kraftlinien der gravitierenden Massenwirkung nicht ein Zug, sondern ein Druck stattfinden muss (vis a tergo; MAXWELL).

Auf die kinematische Bedeutung dieser Thatsache werden wir später noch zu sprechen kommen.

Das Fehlen der Polarität gegenüber den Wirkungen der Schwerkraft ist auf die anorganische Natur beschränkt; die organische Natur besitzt augenscheinlich Hilfsmittel, den Druck der Kraftlinien gegen die Materie ihrer Bausteine, die Zellen, aufzuheben und sogar in einen Zug (nach oben) umzuwandeln; dies geschieht bei der Pflanze an der gegen die Wirkung der Erdschwere hinaufwachsenden Stengelspitze: Erscheinungen des sogenannten negativen Geotropismus. Die in der Botanik als die „KNIGHTschen Versuche" bekannten Experimente über das Wachsen von Pflanzen auf rotierenden Scheiben beweisen, dass hier wirklich gegenüber der Schwerkraft ein polar verschiedenes Verhalten an den „Vegetationspunkten" vorhanden ist, obgleich das Mikroskop bis jetzt keine Unterschiede in der stofflichen Beschaffenheit daselbst hat erkennen lassen. Ein im Felde der Erdschwere an beiden Enden in entgegengesetztem Sinne treibendes Pflänzchen giebt vollkommen das Bild einer kleinen, in einem homogenen Magnetfelde liegenden Magnetnadel mit ihren Kraftlinien wieder. Bringt man es aus der (vertikalen) Richtung der Schwerkraftlinien heraus, so strebt es der ursprünglichen Richtung wieder zu, Wurzel und Stengel biegen sich so lange um, bis sie die Kraftlinienrichtung wieder erreicht haben; gerade wie eine abgelenkte Magnetnadel ihrer Ruhelage zustrebt.

55. Vergleich der Grösse magnetischer Kräfte mit denen der allgemeinen Massenanziehung. — Wir wollen uns zunächst ein ungefähres Urteil über die relative Grösse der beiden Arten von Kräften, die wir miteinander vergleichen wollen, der Schwere und der magnetischen Kraft bilden. Ohne besondere Messung erkennt man die sehr wichtige Thatsache, dass die magnetischen Kräfte den Wirkungen, welche nach NEWTON alle Substanzen aufeinander ausüben (Gravitation), weit überlegen sind. Zwei Magnetstäbe, welche sich vermöge ihrer magnetischen Wirkungen aneinander hängen und ihre gesamten Gewichte mit Leichtigkeit durch den Kraftlinienschluss tragen, wirken, wenn sie unmagnetisch sind, nur ganz unmerklich aufeinander ein. Wir müssen sehr feine Hilfsmittel in Anwendung bringen (z. B. Drehwagen an Quarzfäden), um nachzuweisen, dass überhaupt schon Stahl auf Stahl an sich anziehend wirkt.

Dass uns dennoch gerade diese Anziehungskräfte der allgemeinen Gravitation im täglichen Leben so oft in der Form grosser Gewichte augenfällig werden, liegt daran, dass die eine der an der Wirkung beteiligten Massen der gesamte Planet ist. In der Grösse der wirkenden Massen liegt auch der Grund, dass die an sich im Vergleiche zu anderen Kräften verschwindend kleine Gravitationskraft imstande ist, die Gestirne aneinander zu ketten.

56. Die Grundeinheiten; das Centimeter-Gramm-Sekundensystem.— Nichts ist für die gesamte messende Naturlehre so wichtig wie ein einheitliches Maasssystem. Nach langer, schwieriger internationaler Arbeit hat man endlich ein solches für wissenschaftliche und technische Zwecke geschaffen. Man entlehnte die Grundeinheiten den Dimensionen und bestimmten Eigenschaften des Erdkörpers. Wir können alle in der Natur uns entgegentretenden einer quantitativen Bestimmung unterwerfbaren Grössen ihrem numerischen Werte nach angeben, wenn wir drei Grundeinheiten festlegen:

1) für die Länge (den tausendmillionsten [$^1/_{10^9}$] Teil eines Erdmeridianquadranten) Centimeter = cm;

2) für die Zeit (den 86 400. Teil der Dauer eines „mittleren" Sonnentages) Sekunde = sek.;

3) für die Masse (Quantität Materie in einem Kubikcentimeter, wenn derselbe mit destilliertem Wasser von + 4° C. Temperatur angefüllt ist), Gramm = gr genannt.

Diese drei Einheiten genügen, um die ganze Mechanik ohne Zuhilfenahme irgend eines anderen Begriffes aufzubauen. Für viele Zwecke ist eine andere Festsetzung geeigneter. Die Energetik führt an Stelle einer Massen- eine Energieeinheit ein. Die Energiequantität ist wie die der Substanz unzerstörbar.

Das auf diesen Grundeinheiten beruhende Maasssystem nennt man das „absolute", alle von ihm ableitbaren Maasse ebenso. Wegen der Bezeichnung seiner Einheiten trägt es auch den Namen des Centimeter-Gramm-Sekundensystem (C.G.S.-System).

57. Das absolute Kräftemaass: die Dyne. — Jede Masse folgt in dem Felde der Erdschwere überall mit einer ganz bestimmten Kraft der Richtung der Kraftlinien nach dem Erdmittelpunkte und nimmt unter deren Wirkung eine gleichförmig beschleunigte Bewegung an. Die Beschleunigung (Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit) wächst bei derselben Masse wie die Kraft; da diese auch der bewegten Masse proportional ist, so messen wir die Kraft durch das Produkt von Masse und Beschleunigung. Wir erhalten eine zweckmässige Definition der Krafteinheit, wenn wir festsetzen:

Eine Kraft hat die Grösse 1, wenn sie der Masse 1 in einer Sekunde die Beschleunigung 1 erteilt.

Die Einheitskraft hat man 1 Dyne genannt (vom griechischen *δύναμις* = Kraft). Da die Schwerkraft im mittleren Europa in 1 sek. der Masse 1 die Beschleunigung 981 erteilt, so ist ihre Wirkung 981 mal so gross als die der Krafteinheit, d. h. die Schwerkraft hat die Stärke von 981 Dyne.

Der Druck, den 1 gr auf seine Unterlage ausübt, entspricht also auch der Wirkung von 981, oder rund 1000 Dyne. Die geringe Druckkraft eines Milli-

gramms kann uns angenähert eine Vorstellung von der hier festgelegten Krafteinheit von 1 Dyne geben.

Die Schwere besitzt die nur ihr eigene Fähigkeit, alle Arten von Materien in der gleichen Weise zu beeinflussen. Während die magnetischen Kraftlinien zu Eisen, Nickel, Kobalt in ganz anderer Weise hinströmen, wie zu Wismut u. s. w., und dadurch die ponderomotorischen Wirkungen unter sonst ganz gleichen Bedingungen völlig verschiedene werden, ist die „Permeabilität" der Schwerkraftlinien für alle Substanzen dieselbe. (Bessel.) Die Permeabilität hängt von der Kraftintensität selbst ab, die bei der Schwere, verglichen mit den magnetischen Kräften, ausserordentlich gering ist, wodurch uns vielleicht seither Unterschiede in dem Verhalten der verschiedenen Substanzen entgangen sind.

58. Messung magnetischer Kräfte in Dynen mittels der Wage. — Wir wollen das einfachste Beispiel magnetischer Wechselwirkung der Messung in absolutem Maasse unterwerfen: die Anziehung ungleichnamiger Pole zweier gleich stark magnetisierter dünner Stahlstäbe, indem wir an einer gewöhnlichen empfindlichen chemischen Wage (die möglichst eisenfrei ist) diese Anziehung der Enden mit der Kraft, welche eine bestimmte Anzahl Gramme infolge der Erdschwere auf ihre Unterlage ausüben, vergleichen. Da der Druck eines Grammes gleich 981 Dyne ist, so erhalten wir die magnetische Kraft durch Dyne ausgedrückt. Die Messung soll nur über die Grössenordnung dieser Kräfte orientieren.

Versuch 35. Von zwei Stricknadeln 1 und 2, welche auf eine Bussole gleich stark ablenkend einwirken, die wir also als gleich stark magnetisiert ansehen können, hängt man die eine Nadel (Nadel 1) vertikal an die Wage [Gewicht P_1] und nähert ihr von unten her den mit einer Glasplatte bedeckten anziehenden Pol der anderen (Nadel 2). Wir können die Entfernung der aufeinander wirkenden Pole in erster Annäherung gleich der Glasdicke annehmen; Glas hat so nahe die gleiche Permeabilität wie Luft, dass die gemessene Anziehung dieselbe ist, als wenn die Pole durch eine gleich dicke Luftschicht getrennt wären. Man hebt Nadel 2 so lange, bis die Wage wieder einspielt und hebt die Anziehung der Pole durch Auflegen von Gewichten, mit kleinen anfangend, auf: Gewicht P_2. Dann ist die Anziehungskraft zwischen den Polen bei der gegebenen Entfernung gleich $f_{12} = (P_2 - P_1)$ 981 Dyne.

Numerisches Beispiel: Gewicht der magnetisierten Nadel 1 mit Aufhängung $P_1 = 9{,}23$ gr. Grösstes Gewicht, das noch getragen wurde, als die Nadel 2 bis auf Glasplattendicke genähert war: $P_2 = 9{,}35$ gr. Also magnetische Kraft $f_{12} = 0{,}12 \cdot 981 = 118$ Dyne.

59. Die Dimensionen physikalischer Grössen; Dimension der Kraft. — Von Flächen sagt man, sie seien in Bezug auf Längenausdehnungen von zwei Dimensionen, von Räumen, dass sie dreidimensional sind. Wir können dies bekanntlich in Rechnungszeichen dadurch zum Ausdruck bringen, dass wir die Dimensionzahl als Exponenten über die Grundeinheit setzen:

$$\dim \text{Fläche} = \text{cm}^2$$
$$\dim \text{Raum} = \text{cm}^3.$$

Ganz ähnlich verfahren wir mit den durch irgend welche Kombination der Grundeinheiten erhaltenen, daraus abgeleiteten Einheiten der physikalischen Grössen; so ist

$$\text{dim Geschwindigkeit} = \text{cm/sek} = \text{cm sek}^{-1}$$

als Weg in bestimmter Zeit. Wir erhalten weiter

$$\text{dim Beschleunigung} = \text{cm sek}^{-1}/\text{sek} = \text{cm sek}^{-2},$$

weil sie eine Geschwindigkeitsgrösse (Zuwachs), dividiert durch eine Zeit ist,

$$\text{dim Kraft} = \text{gr} \cdot \text{cm sek}^{-2} = \text{cm gr sek}^{-2}$$

als Produkt von Masse und Beschleunigung.

60. Abnahme der magnetischen Wirkung mit der Entfernung. — Wir fühlen, dass die Wirkung, welche zwei Magnetstäbe aufeinander ausüben, geringer wird, wenn wir eine dickere Zwischenschicht eines wenig permeablen Mittels dazwischen legen, wenn wir z. B. in Luft die aufeinander wirkenden Pole weiter voneinander entfernen. Legen wir bei dem Versuche 35 mehrere Glasplatten zwischen die sich anziehenden Stabenden, so können wir die Abnahme der Kraft nach Dynen messend verfolgen. Wäre es möglich, einen Pol herzustellen, von dem aus die Kraftlinien nach allen Seiten genau in derselben Weise ausgingen, so müsste dessen Kraft sich mit dem Quadrate der Entfernung vermindern, da sich dieselbe Anzahl von Kraftlinien auf immer grössere Kugeloberflächen verbreitet, die wie die Quadrate ihrer Halbmesser zunehmen. Also vermindert sich die auf einer bestimmten Fläche, z. B. der Flächeneinheit, anlangende Kraftlinienzahl umgekehrt mit dem Quadrate der Entfernung.

Coulomb war es, der zuerst an langen dünnen Magnetstäben durch direkte Messungen das Zutreffen dieses Quadratgesetzes nachwies. Pflanzt sich die magnetische Wirkung von Stelle zu Stelle kontinuierlich durch das umgebende Medium fort, so ist aus rein geometrischen Gründen ersichtlich (Fig. 23), dass einer Stelle in der Entfernung von r cm nur $1/r^2$ der Wirkung zugeführt wird wie einer um 1 cm von dem Verbreitungsorte 0 aus entfernten Stelle. Dies ist mit jedem von einem Punkte aus sich gleichförmig nach allen Seiten hin verbreitendem Agens der Fall, z. B. dem Licht, dem Schall, der strahlenden Wärme, vorausgesetzt, dass das vermittelnde Zwischenmedium nicht absorbierend auf das Agens wirkt.

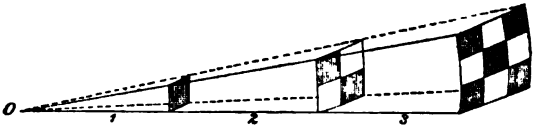


Fig. 23.

61. Beziehungen zum Newtonschen Gesetze der allgemeinen Massenanziehung. — Newton hatte (1666) für die Gravitation, mit der alle

Massen aufeinander wirken, und welche an der Erdoberfläche als Schwere zum Ausdruck kommt, angenommen, dass sie umgekehrt wie das Quadrat der gegenseitigen Entfernungen der aufeinander wirkenden Massen abnähme. Seine Annahme bestätigte sich, da sich mit ihrer Hilfe die Bewegungen der Planeten um die Sonne und des Mondes um die Erde richtig ergaben. Bei den nahezu kugelförmigen Planetenmassen konnte man sich dabei die Wirkung von einem Punkte, dem Mittelpunkte, ausgehend denken. Das Newtonsche Gesetz ist ein „Punktgesetz". Wegen seiner wichtigen Konsequenzen für die Himmelsmechanik erwarb sich dasselbe ein grosses Ansehen. Es darf daher nicht auffallen, dass man ein ähnliches Gesetz auch dort vermutete und zu begründen suchte, wo man Massen unter dem Einflusse anderer Kräfte, z. B. der magnetischen, sich bewegen sah. Während aber im ersten Falle die Planetenkörper als punktförmige Wirkungscentren angesehen werden konnten, musste man sich hier die magnetischen Massen erst in geeigneter Weise formen. Für diese galt dann, wenn sie stabförmig waren, in der That das Newtonsche Quadratgesetz. Ein weiterer Schluss etwa auf die Existenz magnetischer Massen, die den ponderablen Massen als besondere Klasse von Substanzen gegenübergestellt werden könnten, ist daraus nicht zu ziehen.

Man hat ihn freilich gezogen, verlockt durch die Fruchtbarkeit der zu entdeckenden Beziehungen, welche die Anwendung des auf das Newtonsche Gesetz gegründeten und schon zu Coulombs Zeiten hoch entwickelten mathematischen Kalküls versprach. Wir bedürfen dieser Hypothese nicht mehr. Dass sie nicht ausreicht, zeigt sich unmittelbar: das Newtonsche Gesetz kennt nur Anziehungen, die magnetischen Kräfte weisen schon durch ihre Polarität auf eine höhere Zahl von Bestimmungsstücken hin. Man musste daher zu weiteren Hilfshypothesen greifen und kam so zu dem Bilde der positiven und negativen fernewirkenden magnetischen Centren, welches lange Zeit geherrscht hat. Die magnetischen Kräfte können nur in speziellen Fällen, als von einem Punkte ausgehend, als „Centralkräfte" angesehen werden. Solche Magnetsysteme mit Kraftlinien streuenden Enden haben aber z. B. in der Technik nur eine untergeordnete Bedeutung.

62. Begriff der Polstärke. — Man hat die Analogie der magnetischen Wechselwirkung mit der Gravitation noch weiter ausgebaut. Nach Newton ist die Anziehung zweier Körper ausser von ihrer Entfernung noch von ihren Massen abhängig. Etwas Ähnliches setzte man bei zwei aufeinander wirkenden Magneten voraus und sprach von „Mengen" von Süd- oder Nordmagnetismus oder „magnetischen Massen". Wir verdanken diesen Vorstellungen gewisse Begriffsbildungen, welche so bequem in ihrer Handhabung sind, dass sie zweckmässig in das System der neueren Auffassungen mit hinüber genommen werden; hierher gehört der Begriff der Stärke eines Poles. Wir können auch, ohne auf die Hypothese fernewirkender Massen zurückzugreifen,

diesen Begriff aus der Erfahrung ableiten. Vergleichen wir die Pole verschiedener Stäbe in ihrer Wirkung auf ein und denselben Stab miteinander, so zeigen sich Verschiedenheiten unter sonst gleichen Umständen, welche nur in einer verschieden grossen Wirkung der Pole selbst begründet sein können. Wir bringen das verschiedene Verhalten numerisch zum Ausdruck, indem wir die Wirkung eines jeden Poles durch eine gewisse Zahl charakterisieren.

Versuch 36. Wir bringen unter die an der Wage hängende Magnetnadel 1 des Versuches 35 an Stelle der gleich stark magnetisierten Nadel 2 eine andere 3 von gleicher Grösse, aber grösserer oder geringerer Magnetisierung und finden in demselben Abstande, d. h. durch dieselbe Glasplatte hindurch, eine andere Kraft in Dyne: f_{31}. Wir bilden das Verhältnis: $n = f_{21} : f_{31}$. Nun ersetzen wir die hängende Nadel 1 durch eine andere, irgendwie magnetisierte Nadel 4, bestimmen ihr Gewicht P_4 und die Anziehungskräfte, welche die entsprechenden Pole der Nadeln 2 und 3 auf diese ausüben: f_{24} und f_{34} in Dyne. Bilden wir das Verhältnis $f_{24} : f_{34}$, so erhalten wir dasselbe Resultat wie vorher: $f_{24} : f_{34} = n = f_{21} : f_{31}$.

Numerisches Beispiel: $f_{31} = 118$ Dyne nach Versuch 35. $f_{31} = 283$ Dyne, also $283 : 118 = 2{,}4$. Als die 11,52 gr (P_4) schwere Nadel 4 angehängt war, ergab sich: $f_{24} = 187$ Dyne und $f_{34} = 449$ Dyne, also das Verhältnis beider Kräfte: $449 : 187 = 2{,}4$, dasselbe wie vorher.

In den numerischen Wert der Wechselwirkung, wie wir ihn zu messen gelernt haben, bringt jeder Pol einen Betrag hinein, welcher für ihn selbst maassgebend ist. Die Wechselwirkung zweier Magnetpole ist proportional dem Produkte zweier Zahlen, von denen jede die Wirkung eines Poles quantitativ bestimmt. Diese Zahlen wollen wir die Polstärken der betreffenden Magnetpole nennen.

Bezeichnen wir die Polstärken der bei den Versuchen verwendeten Magnetstäbe mit m_1, m_2, m_3, m_4, so war f_{21} proportional mit $m_2 \cdot m_1$ etwa gleich $k m_2 m_1$, wo k ein konstanter Zahlenfaktor ist; ferner war $f_{31} = k m_3 m_1$, also $n = m_2 : m_3$. Es war f_{24} etwa gleich $k^1 m_2 m_4$ und $f_{34} = k^1 m_3 m_4$. Dann musste $f_{24} : f_{34} = m_2 : m_3 = n$ sein, wie es der Versuch in der That ergab.

63. Einheit der Polstärke. — Damit die die Polstärken angebenden Zahlen möglichst direkt die von den Polen ausgehenden Kräfte erkennen lassen, müssen wir die Einheit der Polstärke in unmittelbare Beziehung zu der in § 57 festgelegten Kräfteeinheit der Dyne bringen. Es empfiehlt sich daher, die folgende Festsetzung zu treffen: Ein Pol hat dann eine Polstärke gleich 1, wenn er auf einen gleichen Pol in der Entfernung von 1 cm die Kraft von 1 Dyne ausübt.

Ein solcher Pol würde der Masse von 1 gr, wenn sie Träger des anderen Poles wäre, die Beschleunigung 1 in einer Sekunde erteilen, d. h. 981 mal schwächer als die erdanziehende Kraft auf diese Masse wirken.

Übt ein Pol auf einen Pol von der Stärke 1 in der Entfernung 1 cm die Kraft von m_1 Dyne aus, so werden wir sagen, seine Pol-

stärke sei gleich m_1. Wirkt er auf einen Pol von der Stärke m_2, so wird die Wirkung gleich $m_1 \cdot m_2$ Dyne sein. Entfernt man die beiden Pole bis auf r cm voneinander, so wird die Kraft f, mit der beide Pole aufeinander wirken, auf

$$f_{12} = \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ Dyne} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

herabgesetzt.

Die Faktoren m_1 und m_2 sind dasjenige, was die älteren Theorien als die „Quantitäten freien magnetischen Fluidums" bezeichneten. Je stärker die Pole wirken, um so grösser ist ihre Polstärke, also auch die Zahl, mit der wir diese messen. Verschwindet der Magnetismus, so ist diese Zahl gleich Null.

Die Gleichung 2) stellt den vollen Ausdruck des sog. Coulombschen Gesetzes dar.

64. Die Vorzeichen der Polstärke; der Einheitspol. — Die Stärken der Pole eines gleichförmig magnetisierten Stabes sind einander numerisch gleich und nur dem Sinne nach verschieden; denn der eine nimmt genau so viele Kraftlinien auf, als der andere aussendet.

Um der Polarität Rechnung zu tragen, benutzen wir ein Vorzeichen vor der Zahl. Positive und negative Zahlen sind einander entgegengesetzt, wie die Kraftlinien aussendenden und Kraftlinien aufnehmenden oder die nach Norden und die nach Süden weisenden Pole. Man ist übereingekommen, den den geographischen Norden suchenden Polen die positiv gemessenen Polstärken zuzuweisen.

Da + mal + ebenso wie − mal − einen positiven Wert giebt, gleichnamige Pole sich aber abstossen, da ferner + mal − ebenso wie − mal + einen negativen Wert giebt, ungleichnamige Pole sich aber anziehen, so giebt unsere Grundformel 2 in § 63 zugleich den Sinn der Kraft, wenn wir abstossende Kräfte (welche die Entfernung zu vergrössern streben) als positiv, anziehende dagegen (welche die Entfernung zu verkleinern streben) als negativ bezeichnen.

Eine besondere Rolle spielt der sogenannte Einheitspol, d. h. das Nordende eines dünnen Magnetstäbchens von solcher Länge, dass die Wirkung des einen Poles durch die des anderen nicht mehr merklich beeinflusst wird, und so starker Magnetisierung, dass die Polstärke gerade gleich einer absoluten Einheit ist.

Mittels dünner Stricknadeln, welche man durch Streichen magnetisiert, kann man sich angenähert solche Einheitspole wirklich herstellen. Ihre Polstärke ist $m = +1$ Polstärkeeinheiten.

65. Die Dimension der Polstärke. — Um die Dimension der Polstärke aus den nach ihrer Dimension bereits festgelegten Grössen der Grundeinheiten und der Kraft abzuleiten, haben wir nur auf die Verbindung zu achten, in der diese Grösse mit den genannten steht. Dieselbe ist durch die Formel 2 gegeben. Für den speziellen Fall, dass

die Polstärken der beiden aufeinander wirkenden Pole m_1 und m_2 einander numerisch gleich ($= m$) sind, erhalten wir aus 2)

$$r^2 f = m \cdot m \quad \text{oder} \quad m = r\sqrt{f}.$$

Die Kraft f hat die Dimension cm gr sek^{-2}, ihre Wurzel hat die Dimension $cm^{1/2}$ $gr^{1/2}$ sek^{-1}, dies mit einer Länge r multipliziert, giebt:

$$\text{dim Polstärke } m = cm^{3/2}\, gr^{1/2}\, sek^{-1}.$$

Diese gebrochenen Exponenten zeigen, dass wir in begriffliche Schwierigkeiten geraten würden, wollten wir von „magnetischen Massen" sprechen. Diese würden zu allen uns bekannten greifbaren, in gr zu messenden Massen in recht komplizierter Beziehung stehen.

66. Bestimmung der Polstärke in absolutem Maasse. — Man verfährt wie in § 58, indem man zunächst die Kraft in Dyne, welche der zu messende Stab auf einen gleich stark magnetisierten ausübt, durch den Vergleich mit Gewichtsstücken an der Wage bestimmt. Misst man die Entfernung der Polenden, so kann man nach dem Quadratgesetze berechnen, wie gross die Wirkung in der Entfernung von 1 cm sein würde; dieselbe hängt von dem Produkte der einander gleichen Polstärken ab, die man durch Wurzelziehen erhält.

Bei dem Versuche 35 bestimmt man die Dicke d der Glasplatte; sie ist nach unserer Annahme zugleich die Entfernung r, aus welcher die beiden Pole aufeinander wirken. Aus f und r ergiebt sich m.

Zahlenbeispiel. Dicke der Glasplatte $d = 0{,}184$ cm, demnach Polstärke $m = d\sqrt{f_{12}} =$ ca. 2 absolute Polstärkeeinheiten: $m = 2\ cm^{3/2}\, gr^{1/2}\, sek^{-1}$.

67. Begriff des magnetischen Momentes. — Wenn bei einem Magneten die Stellen, von denen Kraftlinien in dem einen oder anderen Sinne ausgehen, nahezu punktförmig sind, so greifen auch äussere Kräfte wesentlich nur an diesen Punkten an. Die ablenkende Wirkung eines Feldes ist durch den Abstand der beiden Pole bestimmt, wie weiter unten in § 74 gezeigt wird.

Man nennt das Produkt von Polstärke m und Polabstand a das Moment M des Magnetstabes:

$$M = ma \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

Ist der Magnetstab sehr lang und dünn (etwa 40 mal so lang als dick), so können wir annehmen, dass seine Pole am Ende liegen.

Dann ist $a = l$, der Länge des Stabes.

Bei kürzeren gedrungenen Magnetstäben kann man den Polabstand zu rund $^5/_6$ der Stablänge rechnen: $a = {}^5/_6\, l$.

Die Stricknadeln, deren Polstärke wir in § 66 zu ca. zwei absoluten Einheiten berechnet haben, hatten eine Länge $l = 17$ cm. Ihre Momente haben also $M = 34$ Einheiten.

Statt vom magnetischen Moment spricht man auch vom Stabmagnetismus; seine Dimension ist $cm^{5/2}\ gr^{1/2}\ sek^{-1} \times cm = cm^{5/2}\ gr^{1/2}\ sek^{-1}$. Unter „spezifischem Magnetismus" versteht man den Stabmagnetismus pro gr Substanz des Magnetstabes; er ist bei gewöhnlichen Stahlstäben selten höher als 40 absolute Einheiten. Bei obigem Beispiele, bei dem das Nadelgewicht 9,23 gr betrug, wurden also beim Magnetisieren nur etwa drei bis vier Einheiten spezifischen Magnetismus erreicht.

68. Begriff und Messung der Feldstärke. — Ausser in den wenigen ganz speziellen Fällen, wo wir mit sehr langen und dünnen Magnetstäben arbeiten, lässt sich fast nie die Wirkung in einem Felde auf bestimmte punktartige Pole zurückführen; immer sind es ausgedehntere Stellen, die Kraftlinien aussenden. Wir knüpfen dann zweckmässig direkt an den Kraftlinienverlauf im Felde selbst an, ohne die Wirkung auf fingierte Centren zurückzuführen. Bisher gaben uns die Kraftlinien nur über die relative Stärke der magnetischen Kraft an den einzelnen Stellen Aufschluss. Denken wir uns aber in das Feld dort, wo wir die Stärke der Wirkung kennen lernen wollen, einen Einheitspol $+1$ gebracht, so können wir auch ein absolutes Maass dieser Stärke erhalten. Durch den Pol erfährt freilich der ganze Kraftlinienverlauf eine kleine Änderung. Wir nehmen an, dass sehr viele Kraftlinien vorhanden sind. Dann wird dadurch, dass der verhältnismässig schwache Pol $+1$ noch einige Linien hinzubringt, das Feld im weiteren Umkreise nur unmerklich geändert. Der andere Pol -1 desselben Stabes sei hierbei weit genug entfernt. Der Pol $+1$ erfährt durch die Kraftlinienspannung einen Antrieb, der in Dynen zu messen ist und ein Maass der an der betreffenden Stelle des Feldes herrschenden Kraft giebt. Auf einen Pol von der Stärke m wird eine m mal so starke bewegende Kraft in demselben Felde ausgeübt als auf einen Pol von der Stärke $+1$. Man kann daher die Stärke innerhalb magnetischer Felder eindeutig bestimmen, wenn man dieselbe durch die folgende Festsetzung auf die absoluten Maasseinheiten zurückführt:

Man nennt die in Dynen gemessene bewegende Kraft, welche der in das Feld gebrachte Einheitspol von der Stärke $+1$ erfährt, die Stärke des Feldes oder die Feldintensität an der betreffenden Stelle.

Wir bezeichnen sie übereinstimmend mit MAXWELL durch $\mathfrak{H}$.

Versuch 37. Einen von den in § 64 erwähnten Stäben mit Polen von der Stärke $+1$ bezw. -1 hängt man an die kürzere Schale einer hydrostatischen Wage und stellt Gleichgewicht her. Man nähert von unten her den Pol eines vertikal gehaltenen Magnetstabes und legt bei verschiedenen Abständen $r_1\ r_2 \ldots$ cm der beiden Pole entsprechende Gewichte p_1, $p_2 \ldots$ gr auf, um wieder Gleichgewicht herbeizuführen. Die Feldstärken in der Verlängerung der Achse des Stabmagneten in den einzelnen Entfernungen betragen: $981\,p_1$, $981\,p_2$, $\ldots$ Einheiten.

Wir werden weiter unten finden, dass das (homogene) Feld der erdmagnetischen Kraft bei uns (in Mitteleuropa) etwa gleich 0,5 solcher Einheiten Intensität besitzt. Der Nordpol + 1 wird also mit der Kraft einer halben Dyne schräg nach unten (in der Richtung der Inklinationsnadel), der Südpol mit derselben Kraft schräg nach oben gezogen. Da eine Dyne etwa dem Zuge eines Milligramms nach unten gleichkommt, so sind die genannten Bewegungsantriebe gleich der Last eines halben Milligramms, also sehr gering im Vergleiche zum Gewichte der Nadeln selbst. Die magnetische Kraft des Erdkörpers ist also klein im Verhältnis zu seiner Massenanziehung.

69. Bewegungsantrieb eines Poles von bestimmter Polstärke in einem Felde von gegebener Feldstärke. — Die Definition der Feldstärke lässt unmittelbar die Kraft bestimmen, mit welcher der Träger einer beliebigen Polstärke m ergriffen wird, wenn wir ihn in ein Feld einführen. Wir machen dabei die Annahme, dass durch das Hineinbringen des Poles m das Feld als Ganzes ebenso unmerklich geändert wird als vorher durch den Pol + 1. Erfährt letzterer einen Antrieb gleich $\mathfrak{H}$ Dyne (gegebene Feldintensität), so erfährt der Pol $+ m$ eine Kraft $f = m\,\mathfrak{H}$ Dyne und zwar in der Richtung der Kraftlinien.

70. Dimension der Feldstärke. — Wir beurteilen die Stärke eines Feldes nach der Wirkung, welche in ihm ein Pol von bestimmter Einheitenzahl erfährt. Aus $f = \mathfrak{H}\,m$ folgt $\mathfrak{H} = f/m$. Die Dimension der Feldstärke ist also die einer Kraft, dividiert durch eine Polstärke:

$$\dim \mathfrak{H} = \frac{\mathrm{cm\,gr\,sek^{-2}}}{\mathrm{cm^{3/2}\,gr^{1/2}\,sek^{-1}}} = \mathrm{cm^{-1/2}\,gr^{1/2}\,sek^{-1}}.$$

Analog wie im Magnetfelde die Kraft $f = \mathfrak{H}\,m$ ist, finden wir bei der Schwere, dass die Kraft, das „Gewicht" $p = g \cdot \mu$ ist, wo g die Beschleunigung und μ die ponderable Masse ist. Die Beschleunigung misst also die Intensität des Schwerefeldes.

Die verschiedenen Dimensionen von g und $\mathfrak{H}$ rühren von den verschiedenen Dimensionen der Einheiten her, auf welche sich in beiden Fällen die Kräfte f beziehen: Gramme einerseits und Polstärken andererseits.

71. Bestimmung der Feldintensität durch die Kraftlinienzahl. — Das Hineinbringen eines Einheitspoles in ein Feld und die Abmessung des Bewegungsantriebes, welchen er dabei erfährt, ist eine Fiktion wie dieser selbst und soll nur zur Erläuterung des Begriffes der Feldstärke dienen. In praxi würde sich der Ausführung, ganz abgesehen von anderen Schwierigkeiten, immer der schon erwähnte Umstand entgegenstellen, dass wir das Feld deformieren, dasselbe also niemals so ausmessen, wie es wirklich ist.

Zur vergleichsweisen Abschätzung der Stärke eines magnetischen Wirkungsbereiches hatten wir schon früher die Anzahl von Kraftlinien verwendet, welche ein Flächenstück von 1 cm² in senkrechter Richtung durchsetzt. Es ist Faradays Verdienst, diese Methode der Abzählung

von Kraftlinien durch folgende Festsetzung in eine exakte Methode zur Bestimmung magnetischer Feldstärken umgewandelt zu haben:

Von den unendlich vielen, wirklich existierenden Kraftlinien sollen an jeder Stelle nur gerade so viele pro cm^2 hervorgehoben werden, als die Feldstärke daselbst absolute Einheiten besitzt; oder mit anderen Worten: Wo eine Kraftlinie auf den cm^2 entfällt, da, sagen wir, herrscht die Feldintensität 1, wo wir $\mathfrak{H}$ Kraftlinien senkrecht durch die Flächeneinheit stossen sehen, herrscht die Feldintensität $\mathfrak{H}\, cm^{-1/2} gr^{1/2} sek^{-1}$.

Damit dies zutrifft, müssen die Kraftlinien in bestimmter Weise ausgewählt werden. Wir besprechen sogleich eine solche ideelle Konstruktion für das einfachste Magnetfeld, dasjenige eines punktartigen Poles; auf kompliziertere Konstruktionen nach diesem Gesichtspunkte werden wir später eingehen.

Um das Schwerefeld nach dieser Übereinkunft darzustellen, müssten wir nach § 70 in Mitteleuropa 981 vertikale Linien durch eine horizontale Fläche von 1 cm^2 ziehen.

72. Kraftlinienzahl, welche von einem Pole von gegebener Stärke ausgeht. — Von dem Pole eines dünnen Stabmagneten gehen in Wirklichkeit unendlich viele Kraftlinien nach allen Seiten hin geradlinig aus. Um mit der im vorigen Paragraphen eingeführten Festsetzung im Einklang zu bleiben, thun wir aber gut, in unserer Vorstellung nur an einer begrenzten Anzahl festzuhalten. Wir wollen berechnen, wieviel Kraftlinien von dem Pole, der die Stärke von m absoluten Polstärkeeinheiten haben möge, ausgehend gedacht werden müssen.

Nach dem Coulombschen Gesetze wirkt dieser Pol in der Entfernung r auf einen Pol von der Stärke $+1$ mit der Kraft m/r^2. In der Entfernung r hat also das von dem Pole herrührende Feld die Stärke

$$\mathfrak{H} = \frac{m}{r^2}.$$

Diese Feldintensität $\mathfrak{H}$ herrscht gleichmässig auf einer Kugel von dem Halbmesser r, also der Oberfläche $4\pi r^2$. Überall, wo die Feldstärke $\mathfrak{H}$ vorhanden ist, haben wir uns je $\mathfrak{H}$ einzelne Kraftlinien durch den Quadratcentimeter gehend zu denken. Die genannte Kugeloberfläche wird also im ganzen von $\mathfrak{H} \times 4\pi r^2$ oder $4\pi m$ Kraftlinien durchsetzt. Da keine anderen Magnetpole unserer Voraussetzung gemäss mitwirken, so können auf dem Wege vom Pole bis zur betrachteten Kugeloberfläche keine Kraftlinien verloren gegangen noch hinzugekommen sein; wir müssen also sagen:

Von einem Pole von der Stärke m $cm^{3/2} gr^{1/2} sek^{-1}$ müssen $4\pi \cdot m$ Kraftlinien ausgehen.

Da $\pi = 3{,}14159 \ldots$ ist, so gehen rund $12^1/_2$ mal mehr Kraftlinien von einem Pole aus oder in ihn hinein, als seine Polstärke Einheiten besitzt. Haben wir umgekehrt alle unsere Kraftliniendarstellungen dieser Regel entsprechend eingerichtet, so können wir unmittelbar aus der Anzahl der an einer Stelle des Bildes erscheinenden oder verschwindenden Kraftlinienzahl einen Rückschluss auf die hier zu denkende Polstärke machen, auf die „Ergiebigkeit der Quell- bezw. Sinkstelle", wie MAXWELL treffend sagt.

73. Ablenkung einer Deklinationsnadel durch einen Magnetstab. — Bringt man einen Magnetstab vom Momente M in die erste oder zweite Hauptlage in Bezug auf eine Deklinationsnadel (vergl. § 38), so wird die Nadel abgelenkt. Die ablenkende Wirkung kann man sich von den Polpaaren der beiden Magnete ausgehend denken, die rücktreibende Kraft rührt von der Horizontalkomponente $\mathfrak{h}$ des Erdmagnetismus her. Die Wirkung der Pole lässt sich nach dem COULOMBschen Gesetze berechnen. Die Drehung resultiert aus der Zusammensetzung aller einzelnen Kräfte. Ist die Länge des Magnetstabes und der Nadeln gering, die Entfernung r ihrer Mittelpunkte dagegen gross, so nimmt die Ablenkung sehr nahe umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung r ab. Bei Gleichsetzung der sich an der um den Winkel φ abgelenkten Nadel das Gleichgewicht haltenden Kraftkomponenten findet man, dass bei der

1. Hauptlage: $M/\mathfrak{h} = {}^1/_2 r^3 \operatorname{tg} \varphi$
2. Hauptlage: $M/\mathfrak{h} = r^3 \operatorname{tg} \varphi$ ist.

Man prüft diese Relationen mit Hilfe der WILHELM WEBERschen Rinne, einer mit einer Längenteilung versehenen Holzrinne, in deren Mitte eine Bussole angebracht ist; je nachdem man die Rinne senkrecht zum magnetischen Meridian oder in diesen selbst stellt, kann man in der ersten oder der zweiten Hauptlage die Ablenkungen messen. Das Moment der Deklinationsnadel fällt aus der Rechnung heraus.

B) Dynamische Methoden zur Messung magnetischer Grössen; die Schwingungsmethoden.

Ausser durch Gleichgewichtsbetrachtungen können wir magnetische Grössen durch die oscillatorischen Bewegungen messen, welche eintreten, wenn ein durch Magnetkräfte im Gleichgewicht gehaltener Körper aus seiner Ruhelage herausgebracht wird.

74. Kräftepaar, welches auf eine Magnetnadel im homogenen Felde wirkt. — In einem homogenen Felde von der Feldstärke $\mathfrak{H}$ wird eine um eine zu den Kraftlinien senkrechte Achse drehbare Magnetnadel immer in die Richtung der Kraftlinien gestellt. Ist m die Polstärke, so greift an jedem Pole eine Zugkraft von $\mathfrak{H}\, m$ Dyne an. Wird die Nadel in eine zu den Kraftlinien senkrechte Lage gebracht, so

wirkt an einem Hebelarme von der Länge $a/2$ (a: Polabstand) das statische oder Drehungsmoment $\mathfrak{H} m a/2$ nach der einen Richtung, an dem anderen Ende von derselben Länge das Drehungsmoment $\mathfrak{H} m a/2$ nach der entgegengesetzten Richtung. Im ganzen ist also die in die Ruhelage zurücktreibende Wirkung durch den Ausdruck $2 \mathfrak{H} m a/2 = \mathfrak{H} m a$ bestimmt. Hier ist $m a = M$ das Moment der Magnetnadel (§ 67). Bildet diese den Winkel φ mit der Kraftlinienrichtung, so kommt nur eine Komponente des Zuges $\mathfrak{H} m$ beiderseitig zur Geltung und zwar die zur Nadelrichtung senkrechte (die in die Nadelrichtung fallenden entgegengesetzt gleichen Komponenten heben sich gegenseitig auf); ihr Wert ist $\mathfrak{H} m \cdot \sin \varphi$. Danach ist die zur Ruhelage zurücktreibende Wirkung

$$\mathfrak{H} M \cdot \sin \varphi.$$

Dieser Ausdruck gleicht demjenigen, welcher beim (physischen) Pendel die zur Ruhelage (Vertikalrichtung = Kraftlinienrichtung) hintreibende Wirkung bestimmt. Hier tritt an Stelle von $\mathfrak{H}$ die die Feldstärke der Erdschwere am Beobachtungsorte charakterisierende Grösse g, die Beschleunigung, an Stelle des magnetischen Momentes M das sogenannte Drehungsmoment (Masse des Pendels mal Abstand seines Schwerpunktes von der Drehungsachse). Eine aus der Ruhelage abgelenkte Magnetnadel muss also in einem homogenen Felde Pendelschwingungen ausführen.

75. Methode der Oscillationen zur Vergleichung von Feldstärken. — Eines der Pendelgesetze sagt aus, dass sich die Quadrate der Schwingungszahlen wie die Stärke der Kräfte, welche auf das Pendel wirken, verhalten. Bleibt das Moment M der schwingenden Nadel unverändert, so kann man ihre Oscillationen zur Vergleichung der Stärke verschiedener Stellen desselben Feldes benutzen.

Dabei verstehen wir unter Schwingungszahl die Anzahl aufeinander folgender Durchgänge durch die Gleichgewichtslage; wir zählen also die halben Schwingungen. Als Beispiel wollen wir mit der Oscillationsmethode das Coulombsche Gesetz des umgekehrten Quadrates der Entfernung prüfen:

Versuch 38. Ein über 1 m langer, kräftig magnetisierter Stahlstab wird in vertikaler Stellung befestigt; am Boden wird die Richtung des magnetischen Meridians bezeichnet. In einer Horizontalebene, welche $^1/_{10}$ bis $^1/_{12}$ der Stablänge vom oberen Ende des Stabes entfernt ist, lässt man eine kurze, an einem Coconfaden horizontal schwebende Magnetnadel nördlich oder südlich vom Stabe in dessen Meridianebene schwingen, je nachdem das Nord- oder Südende des Stabes nach oben gekehrt ist. Man bestimmt die Quadratzahlen der Schwingungen und misst die Entfernungen r zwischen Nadelmittelpunkt und Stabachse. Zuletzt entfernt man den Stab und lässt die Nadel im freien erdmagnetischen Felde schwingen; das sich dabei ergebende Quadrat der Schwingungszahlen ist ein Maass der Horizontalkomponente des Erdmagnetismus, dessen Feld sich dem des Stabes bei den

Beobachtungen überlagert. Wir ziehen diese Quadratzahl von den erst erhaltenen ab. Die Reste verhalten sich wie die Kräfte, d. h. umgekehrt wie die Quadrate der entsprechenden Entfernungen r.

76. Grössen, welche die Schwingungsdauer einer Nadel bestimmen. — Bei dem physischen Pendel spielt neben dem erwähnten Drehungsmomente noch diejenige Grösse eine Rolle, welche von der Natur und der Anordnung der beim Pendel bewegten Massen abhängt, das sogenannte Trägheitsmoment T, d. i. die Summe aller Massenteilchen, jedes multipliziert mit dem Quadrate seines Abstandes von der Drehungsachse.

In den Ausdrücken für T kommen die Massen und die die Konfiguration der einzelnen Teilchen bestimmenden Abmessungen des Körpers vor. So ist das Trägheitsmoment eines prismatischen Stabes von der Länge l und der Breite b in Bezug auf eine durch seine Mitte parallel zu den Höhenkanten verlaufende Achse:

$$T = \frac{l^2 + b^2}{12} \cdot P \text{ cm}^2 \text{ gr},$$

wenn P die ponderable Masse in gr ist (bei homogener Massenverteilung). Bei einem cylindrischen Stabe von der Länge l und dem Halbmesser ϱ ist

$$T = \left(\frac{l^2}{12} + \frac{\varrho^2}{4}\right) \cdot P \text{ cm}^2 \text{ gr}$$

in Bezug auf eine senkrecht zur Längsrichtung des Stabes durch den Mittelpunkt gehende Achse.

Auch bei schwingenden Magnetstäben kommt das Trägheitsmoment in Betracht. Wir wollen experimentell nachweisen, dass das Verhältnis der die Schwingungen veranlassenden Grösse $\mathfrak{H} M$ zu dem Trägheitsmomente T die Schwingungsdauer bestimmt.

Versuch 39. Man magnetisiert eine grössere Anzahl Nähnadeln und sucht drei gleich starke durch folgendes Prüfungsmittel aus. Ein kurzes Stück Strohhalm befestigt man mit Wachs an einem langen Coconfaden und sticht nacheinander je eine der Nadeln durch den Halm, so dass sie in einer Horizontalebene schwingt und beobachtet bei jeder die Anzahl Schwingungen in einer bestimmten Zeit. Sind ihre Momente M gleich, so ergeben sich in allen drei Fällen dieselben Zahlen. Nun lässt man je zwei, dann alle drei Nadeln gleichzeitig in dem Strohhalm mit gleichsinniger Polrichtung schwingen. Gegen die Masse der Nadel ist die der Aufhängevorrichtung zu vernachlässigen. Man verdoppelt bezw. verdreifacht also das Trägheitsmoment der in Bewegung zu setzenden Massen. Zugleich aber steigert man in demselben Verhältnisse das magnetische Moment des Systems. Denn das Feld der Horizontalkomponente von der Stärke $\mathfrak{h}$ findet jetzt je zwei bezw. drei Pole von der Stärke m zum Angriff. Auch das Moment hat sich verdoppelt, verdreifacht.

Der Versuch lehrt, dass die Schwingungszahl sich nicht ändert. Dieselbe kann also nur durch den Quotienten der beiden Grössen $\mathfrak{h} M$ und T bestimmt sein.

Eine genauere Prüfung lehrt, dass das Quadrat der Schwingungszahl n (pro Sekunde) numerisch durch den Ausdruck bestimmt ist:

$$n^2 = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\mathfrak{H} M}{T} \text{ (sek}^{-2}\text{)} \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

77. Bestimmung von Feldstärken in absolutem Maasse durch Oscillationen. — Durch Wägung kann man die Polstärke m bei dünnen Magnetstäben messen und ihre Momente $M = m\,a$ berechnen. Sind sie cylindrisch und von der Länge l bei einem Halbmesser von ϱ cm, so kann man bei bekanntem Gewicht P ihr Trägheitsmoment nach § 76 berechnen. Die Schwingungszahl n giebt nach Formel 4 die Feldstärke $\mathfrak{H}$.

Versuch 40. Bestimmung der Intensität des erdmagnetischen Feldes in absolutem Maasse. Wir befestigen eine Nadel von bekanntem Momente M in ihrer Mitte an einem dünnen Faden: sie stellt sich in die Richtung der erdmagnetischen Kraftlinien. Wir bringen sie aus ihrer Ruhelage heraus: sie schwingt zurück. Wir bestimmen die Zahl der Schwingungen und berechnen $\mathfrak{H}$. Wir finden in Deutschland ungefähr

$$\mathfrak{H} = {}^1/_2\,\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-1},$$

d. h. es kommt auf den cm^2 ${}^1/_2$ Kraftlinie oder je eine Kraftlinie auf 2 cm^2 Fläche. Das Modell (Fig. 19), bei dem 35 Kraftlinien durch eine Fläche von 70 cm^2 gehen, stellt also, richtig orientiert, auch quantitativ das erdmagnetische Feld dar.

78. Bestimmung magnetischer Momente in absolutem Maasse durch Schwingungsbeobachtungen. — Wir haben die Stärke $\mathfrak{H}$ des erdmagnetischen Feldes berechnet. Multiplizieren wir den erhaltenen Wert mit dem Cosinus des Inklinationswinkels, so finden wir nach § 41 die Horizontalkomponente des Erdmagnetismus zu rund

$$\mathfrak{h} = 0{,}18\ \mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-1}$$

für das mittlere Deutschland. Mit Hilfe dieses Wertes können wir nun umgekehrt die Momente und damit die Polstärken gegebener Magnetstäbe nach der Formel § 76 bestimmen, falls wir die Trägheitsmomente T derselben kennen. Wir bestimmen die Schwingungszahlen der an einem Faden aufgehängten Stäbe, wenn sie in der Horizontalebene unter dem Einflusse der Horizontalkomponente des Erdmagnetismus schwingen.

Beispiel. Von den prismatischen Magnetstäben, mit deren Hilfe die Kraftlinienbilder (Figg. 10, 11, 15, 16, 17, 18) hergestellt wurden, hatte jeder $l = 7{,}8$ cm Länge und $b = 0{,}4$ cm Breite und ein Gewicht $P = 22{,}05$ gr. Hieraus berechnet sich das Trägheitsmoment eines jeden $T = 112$ cm^2 gr. Wurden sie an dünnen Coconfäden aufgehängt, so machten sie unter dem Einflusse der Horizontalkomponente $\mathfrak{h} = 0{,}18$ des Erdmagnetismus 12 Schwingungen in einer Minute; die Schwingungszahl beträgt also $n = 0{,}2$. Aus der Formel 4 folgt $M = \pi^2 n^2 T/\mathfrak{h} = 246$. Da der Polabstand $a = {}^5/_6\,l = 6{,}5$ cm, und $M = m\,a$ ist, so betragen die Polstärken dieser Magnetstäbe $m = 38$ Einheiten ($\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-1}$).

79. Bestimmung der Horizontalkomponente des Erdmagnetismus in absolutem Maasse nach Gauss und Weber. — Die in § 77 angegebene Bestimmung der Feldstärke des Erdmagnetismus leidet an dem Übelstande, dass in das Resultat das Moment des verwendeten

Magnetstabes mit eingeht. Stabmagnete sind aber namentlich mit der Temperatur sehr veränderlich. Daher ist es wichtig, dieselben aus dem Endresultate zu eliminieren. Dies gelang Gauss und Weber durch die Kombination der Schwingungsmethode, welche das Produkt $M\mathfrak{h} = A$ liefert, mit der Ablenkungsmethode des § 73, welche den Quotienten $M/\mathfrak{h} = B$ liefert, wenn man zu den Ablenkungsversuchen denselben Magneten verwendet, den man vorher im erdmagnetischen Felde hatte schwingen lassen. Durch Division ergiebt sich

$$\mathfrak{h} = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

und M fällt heraus.

Die Ausdrücke A und B enthalten nur Grössen, welche durch die Grundeinheiten der Länge, Masse und Zeit direkt ausdrückbar sind. Dadurch wurde die wichtige magnetische Grösse $\mathfrak{h}$ ebenfalls auf das absolute Maass zurückgeführt.

5. Kapitel.

Abbildung von Kraftfeldern.

Im vorigen Kapitel wurde gezeigt, wie man magnetische Felder in absolutem Maasse ausmessen kann. Wir gehen jetzt zu ihrer bildlichen Darstellung über. Von FARADAY und MAXWELL sind eine Reihe wichtiger Hilfsbegriffe eingeführt worden, welche zur übersichtlichen Beschreibung der Feldzustände sehr geeignet sind. Ihnen wenden wir uns zuerst zu. Danach wollen wir die Verfahren angeben, welche die konstruktive Abbildung eines Feldes in einer Ebene gestatten und die namentlich in der Technik sehr wichtig sind, wobei wir uns auf einige einfache aber typische Fälle beschränken.

A) Hilfsbegriffe.

In allen neueren Darstellungen der magnetischen wie der elektrischen Erscheinungen spielen die Begriffe der Kraftlinienbündel, Kraftröhren und des Kraftflusses eine hervorragende Rolle. Wenn auch wir sie an dieser Stelle einführen, so heben wir zugleich hervor, dass sie für uns zunächst nur eine rein geometrische Bedeutung haben. Es sind Hilfskonstruktionen, welche ein Feld in bequemer Weise abzugliedern gestatten. Ihre Bedeutung liegt darin begründet, dass sie unmittelbar aus der allen neueren Theorien zu Grunde liegenden Vorstellung der Kontinuität des magnetischen Zustandes hervorgehen, so dass sie sich naturgemäss als notwendige Hilfsbegriffe dieser Theorien ergeben.

80. Das Kraftlinienbündel. — Bisher hatten wir nur die einzelnen Kraftlinien für sich ins Auge gefasst; nun wollen wir eine grössere Zahl von nebeneinander in derselben Richtung verlaufenden Linien zugleich betrachten. Wären die Kraftlinien in aller Strenge nur nach einer Richtung ausgedehnte Linien, so würde aus der Zusammenfassung von mehreren nie ein auch der Quere nach ausgedehntes Gebilde ent-

stehen. Sie beschreiben aber den Verlauf eines gewissen Zustandes, der die oben genannten Druck- und Zugspannungen im Medium veranlasst. Dieser ist nur innerhalb eines gewissen, wenn auch geringen Raumes denkbar. Durch Aneinanderlegen vieler Kraftlinien entsteht also ein dickerer Kraftlinienstrang, ein sogenanntes „Kraftlinienbündel" von einem endlichen Querschnitt. In ihm sind Kraftlinien vereinigt, welche benachbarte Teile des Raumes durchziehen; ist das Bündel von kleinem Querschnitt, so können wir annehmen, dass alle in ihm enthaltenen einzelnen Linien dieselbe Richtung haben. Ein bestimmtes Kraftlinienbündel bleibt in seinem ganzen Verlaufe aus denselben Kraftlinien zusammengesetzt. Denn nur an Magnetpolen selbst können diese aus dem Bündel aus- oder neue in dasselbe eintreten.

Dafür, dass die Magnetkraftlinien eine, wenn auch geringe Querdimension haben, besitzen wir kein direktes Merkmal. Ziehen wir aber die in vieler Hinsicht völlig analogen elektrischen Kraftlinien zum Vergleiche heran, so finden wir hier ein solches in der Natur gegeben. Es zeigt sich die merkwürdige und für das Verständnis der betreffenden Erscheinungen beachtenswerte Thatsache, dass auf einem Atom, oder vielmehr an einer chemischen Valenzstelle desselben niemals weniger, aber, was für uns das Wichtigste ist, auch niemals mehr als eine ganz bestimmte Anzahl von elektrischen Kraftlinien endet.

81. Begriff der Kraftröhre. — Von dem Kraftlinienbündel kommen wir zu dem in der ganzen Theorie sehr wichtigen Begriff der „Kraftröhre". Wir denken uns in dem Magnetfelde irgendwo eine in sich zurücklaufende einfach zusammenhängende und sich in der Kraftlinienrichtung nicht selbst überdeckende Linie (Fig. 24). Die durch die einzelnen Punkte p_1, p_2, p_3 . . . derselben hindurchgehenden Kraftlinien l_1, l_2, l_3 . . . heben wir besonders hervor. Alle Linien umschliessen in ihrer Gesamtheit einen röhrenförmigen Raum, der ein Kraftlinienbündel enthält; auf seinem äusseren Mantel liegen die Punkte p_1, p_2, p_3 . . . und damit die Linie, von der wir ausgingen. Die einzelnen Mantellinien sind unsere Kraftlinien l_1, l_2, l_3 . . . Eine solche von Kraftlinien eingehüllte Röhre nennen wir eine Kraftröhre.

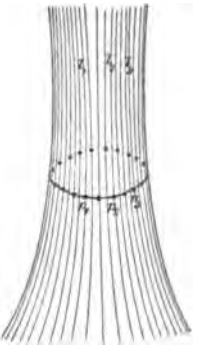


Fig. 24.

Maxwell nennt sie Sphondyloide (vom griechischen *σφόνδυλος*, sprich: sphondylos, der Wirbelknochen des Rückgrats, so dass Sphondyloid also eigentlich einen markröhrenähnlichen Raum bedeutet). Bei der Vorstellung des Markes, als Sitz der Kraft genommen, konnte Maxwell also in der That diese röhrenförmigen Raumgebilde so benennen. Der von ihm und anderen englischen Autoren in dem gleichen allgemeinen Sinne vielfach gebrauchten Bezeichnung „Solenoid" wollen wir eine ganz bestimmte Bedeutung beilegen s. w. u.

In solche Kraftröhren können wir uns das ganze Feld zerlegt denken. Sie gehen von den Nordpolen aus zu den Südpolen hin, gerade wie die Kraftlinien selbst; wo diese auseinander weichen, die Feldintensität also schwächer wird, nimmt der Röhrenquerschnitt zu, wo sie zusammentreten und durch ihre grössere Dichte eine erhöhte Feldintensität anzeigen, schnürt sich die Kraftröhre zusammen. Denn sowohl ihr Mantel wie ihr Kern besteht immer aus denselben Kraftlinien.

82. Begriff des Kraftflusses. — Da im freien Felde Kraftlinien weder neu auftreten noch verschwinden, so geht durch jeden Querschnitt derselben Kraftröhre stets dieselbe Anzahl von Kraftlinien hindurch. Die Zahl dieser Einzelkraftlinien ist eine für die Röhre charakteristische Grösse; sie lässt sich leicht berechnen. Ist $\mathfrak{H}$ die Feldintensität an einer Stelle des Feldes, welche von einer bestimmten Kraftröhre getroffen wird, so ist $\mathfrak{H}$ zugleich die Anzahl Kraftlinien, welche die Flächeneinheit an dieser Stelle senkrecht treffen würde. Ist der Röhrenquerschnitt daselbst ω cm², so gehen durch diesen zur Kraftlinienrichtung senkrecht gedachten Querschnitt $\mathfrak{H}\omega$ Kraftlinien hindurch.

Schon früher hatten wir bei der Beschreibung des Kraftlinienverlaufes Bezeichnungen benutzt, welche den Erscheinungen der Flüssigkeitsbewegungen entnommen waren; sie eignen sich besonders deshalb dazu, weil der Kraftlinienverlauf dieselbe Kontinuität wie Flüssigkeitsströmungen zeigt. Dieser Analogie ist auch die folgende Bezeichnung entsprungen:

Man nennt das Produkt Feldintensität $\mathfrak{H}$ mal Kraftröhrenquerschnitt ω den Kraftfluss durch die Röhre an der Stelle des Querschnittes ω:

$$F = \mathfrak{H}\omega. \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5)$$

Dabei ist die „Kraft" nicht als etwas Fliessendes gedacht; nur ihre von Stelle zu Stelle vermittelte kontinuierliche Verbreitung durch das Zwischenmedium, in dem sich das Feld ausbildet, soll mit dem Worte Kraftfluss angedeutet sein.

Da $\mathfrak{H}$ durch die Kraftlinienzahl pro cm² gemessen wird, so ist $F = \mathfrak{H}\omega$ die Zahl der in der Röhre enthaltenen Kraftlinien.

83. Satz von der Erhaltung des Kraftflusses. — Wir setzten den Kraftfluss durch eine Röhre an einer Stelle $F = \mathfrak{H}\omega$. Ist an einer anderen Stelle der Querschnitt ω' (z. B. grösser als ω) die Feldstärke $\mathfrak{H}'$, so ist der Kraftfluss daselbst $F' = \mathfrak{H}'\omega'$.

Befinden sich zwischen den beiden Stellen keine Quellpunkte oder Sinkstellen, also keine Pole mehr, so sind unterwegs keine Kraftlinien ein- oder ausgetreten. Dieselbe Kraftlinienzahl, welche vorher den Querschnitt ω durchsetzte, verbreitet sich jetzt über die Fläche ω';

auf die Flächeneinheit kommen hier also im Verhältnis $\omega : \omega'$ weniger Kraftlinien, die Feldstärke $\mathfrak{H}'$ ist in demselben Maasse kleiner geworden, wie ω' grösser geworden ist, es ist also

$$\mathfrak{H}' \omega' = \mathfrak{H} \omega \text{ oder } F' = F.$$

Der Kraftfluss einer Röhre ändert sich nicht zwischen Querschnitten, welche keine Pole enthalten.

Der Kraftfluss bleibt erhalten. Die an irgend einer Stelle ermittelte Zahl $F = \mathfrak{H} \omega$ gilt für die ganze Röhre, F ist eine für jede Kraftröhre charakteristische Grösse.

In dem hydrodynamischen Analogon würde F die Durchflussmenge pro Zeiteinheit darstellen. Ist die Flüssigkeit inkompressibel, so fliesst durch jeden Querschnitt einer Rohrleitung dieselbe Menge; $\mathfrak{H}$ würde durch die Geschwindigkeit repräsentiert sein.

84. Maxwells Einheitssolenoide. — Kraftröhren, durch welche der Kraftfluss $F = 1$ hindurchgeht, werden Einheitsröhren genannt. MAXWELL führte die Bezeichnung „Solenoid" ein (von $\sigma\omega\lambda\acute{\eta}\nu$, sprich: solén = Röhre); wir wollen diese Bezeichnung speziell auf Kraftröhren vom Kraftfluss 1 anwenden und sprechen daher von „Einheitssolenoiden" oder kurz „Solenoiden". Durch eine solenoidale Zerlegung des Feldes kann man sich in bequemer Weise einen Überblick über die Feldstärkeverteilung verschaffen. Die Solenoide brauchen nicht, wie in Fig. 24, kreisförmigen Querschnitt zu haben; jedes durch beliebige Scheidewände begrenzte Raumstück kann als Solenoid gelten, wenn nur auf seinen Wänden überall Kraftlinien liegen und durch dasselbe der Kraftfluss 1 hindurchgeht.

Da durch jedes Solenoid der Kraftfluss 1 sich ausgleicht, so sind ihre Querschnitte in cm^2 dem Reciproken der Feldstärke unmittelbar gleich; wo diese abnimmt, werden sie weiter, sie verengen sich in dem Maasse, als die Feldstärke an anderen Stellen wächst. Da ferner ein + Pol von der Stärke m nach unserer Festsetzung $4\pi m$ Kraftlinien entsendet, sein gesamter Kraftfluss also auch $4\pi m$ ist, so gehen von ihm auch $4\pi m$ Solenoide aus. Diese zeigen uns also auch die Ergiebigkeit der einzelnen Quellpunkte und den Konsum der Sinkstellen im Felde direkt an.

B) Kraftflussdiagramme.

Wir wollen für einige spezielle Fälle die im letzten Paragraphen angedeutete Zerlegung des Feldes in Einheitssolenoide vornehmen. Richten wir die Anordnung der Scheidewände so ein, dass wir die Querschnitte leicht berechnen können, so geben uns die Solenoide ein bequemes Mittel, auch die Feldstärken an jeder Stelle in absolutem

Maasse zu bestimmen. Eine gewisse Schwierigkeit tritt nur dann auf, wenn wir die Raumfigur des Feldes in einer Ebene abzubilden versuchen. Am einfachsten entwirft man ein Querschnittsdiagramm, aus dem die Feldstruktur durch Rotation um eine geeignet gewählte Achse hervorgeht.

85. Diagramm des unipolaren Feldes. — Ein Pol von der absoluten Stärke $m = 24/4\pi = 1{,}910$ Einheiten befinde sich in einem homogenen Medium. Nach § 72 sendet er $4\pi m = 24$ Kraftlinien aus, oder der von ihm ausgehende gesamte Kraftfluss beträgt 24 absolute Einheiten. Wir müssen daher den Aussenraum des Magnetpoles derart in 24 Einzelräume zerlegen, dass durch jeden hindurch ein Kraftfluss $F = 1$ geht. Die Abbildung dieser Einteilung in der Ebene veranschaulicht Fig. 25 auf der angehefteten Tafel I: Wir legen durch den Pol $m = 1{,}910$ Einheiten eine irgendwie gerichtete gerade Linie als Achse und zeichnen um m einen Kreis mit beliebigem Durchmesser. Den Achsendurchmesser teilen wir in ebenso viel gleiche Teile als der gesamte von m ausgehende Kraftfluss Einheiten besitzt, in unserem Falle also in 24. Durch jeden Teilpunkt legen wir eine Senkrechte zu der Achse und verlängern sie bis zum beiderseitigen Schnitt mit der Kreislinie. Durch diese Schnittpunkte ziehen wir Strahlen von m aus. Sie repräsentieren einige von den allseitig von m ausgehenden Kraftlinien. Denken wir uns die ganze Figur um die Achse gedreht, so beschreibt der Hilfskreis die Oberfläche einer Kugel, die gezeichneten Strahlen aber die Oberflächen von ineinander geschobenen Kegelflächen, welche den Raum in einzelne konzentrische Fächer zerlegen. Auf der Kugeloberfläche schneiden diese Kegel Zonen aus, welche nach einem bekannten Satze der Stereometrie untereinander flächengleich sind.

Da sich vom Pole m aus der gesamte Kraftfluss 24 nach allen Seiten hin gleichmässig verbreitet, jede Flächeneinheit der Kugel also von der gleichen Kraftflussmenge durchsetzt wird, so führt jedes der genannten 24 Fächer genau den Kraftfluss 1 mit sich.

Durch jeden bei der Rotation der Figur um ihre Achse von den gezeichneten 24 Strahlen aus dem Felde ausgeschnittenen Kegelraum geht daher dieselbe Zahl von Kraftlinien nach aussen.

In der Figur sind also gerade diejenigen Kraftlinien gezeichnet, welche im Raume an den Grenzen gleichzahliger Kraftlinienbündel liegen.

86. Bestimmung der Feldstärken nach dem Diagramm. — Ist die Konstruktion im richtigen natürlichen Grössenverhältnis gezeichnet, so dass die Längeneinheit uns wirklich in Centimetergrösse erscheint, oder kennt man den Maassstab (in der Figur 25 verjüngt eingezeichnet), so

bietet dieses Diagramm den Vorteil, dass man aus ihm die Feldstärken überall mittels des Zirkels und einer kleinen Umrechnung direkt entnehmen kann.

Misst man an einer Stelle die Breite b des Flächenstreifens zwischen den beiden benachbarten Kraftlinien des Diagramms und den Abstand r dieser Stelle von der Achse, so würde der Streifen, welchen b bei der Rotation der Figur um die Achse beschreibt, die Fläche $2\pi r \cdot b$ haben.

Die die Breite messende Strecke b (vergl. die gestrichelten Linien in der Fig. 25 an den Stellen a und b) steht ja nahezu senkrecht zu den beiden benachbarten von m aus divergierenden Strahlen.

Durch diese Fläche geht der Kraftfluss 1 hindurch, also ist

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2\pi r b} \text{ absolute Einheiten.}$$

So findet man an der dem Pole $m = 1{,}910$ Einheiten näheren Stelle a: $r = 3{,}4$, $b = 0{,}8$ Längeneinheiten durch Abgreifen dieser Strecken mit dem Zirkel auf dem in das Diagramm eingezeichneten Maassstab. Hieraus berechnet sich $\mathfrak{H}$ zu rund $0{,}059$ cm$^{-1/2}$ gr$^{1/2}$ sek^{-1}. Der direkte Abstand von dem Pole m ist 5,7 cm. Das Quadratgesetz würde liefern $\mathfrak{H} = 1{,}910/(5{,}7)^2 = 0{,}059$, also dasselbe. An der weiter entfernten Stelle b ist: $r = 16{,}2$; $b = 1{,}9$ cm; danach $\mathfrak{H} = 0{,}0052$ cm$^{-1/2}$ gr$^{1/2}$ sek^{-1}. Die direkte Berechnung liefert: $\mathfrak{H} = 1{,}910/(19{,}3)^2 = 0{,}0051$.

Diese Art, die Feldstärke an jeder Stelle des Feldes aus dem Diagramm zu entnehmen, scheint hier noch keinen besonderen Vorteil zu gewähren. Die Verhältnisse liegen zu einfach; man könnte ebensogut den Polabstand mit dem Zirkel abgreifen und sein Quadrat in die bekannte Polstärke dividieren. Der Wert dieser Methode und Darstelluug durch solche Diagramme überhaupt besteht aber darin, dass sie auch in den komplizierteren Fällen anwendbar bleibt, welche durch Kombination verschiedener Felder miteinander entstehen, wie dies das nächste Beispiel sogleich zeigen wird.

An jeder Stelle des Diagramms eines Poles ist die Feldstärke umgekehrt proportional dem Abstande der beiden benachbarten Kraftlinienstrahlen. Diese Strahlen divergieren verschieden stark. Statt nur die Begrenzungslinie der Räume zu zeichnen, durch welche die Einheit des Kraftflusses hindurchgeht, können wir unsere Diagramme auch enger anlegen und das Feld in mehr als $4\pi m$ Teile zerlegen.

Wollten wir z. B. in dem durch das Diagramm Fig. 25 dargestellten Falle die Räume zur Abbildung bringen, welche $^1/_{10}$ Kraftflusseinheiten enthalten, so brauchten wir den Durchmesser des Hilfskreises nur in 10 mal so viele, also 240 gleiche Abschnitte zu teilen und die entsprechenden Senkrechten und Strahlen zu zeichnen.

Je enger die Linien nebeneinander von dem Pole auslaufen, um so weniger divergieren sie, um so mehr dürfen wir sie innerhalb kurzer Strecken als einander parallel verlaufend betrachten.

Auch dann ist die Feldstärke in jedem Punkte umgekehrt pro-

portional dem gegenseitigen Abstande zweier benachbarter Diagrammstrahlen.

Ist b' diese Entfernung an einer Stelle im Abstande r' von der Achse, so giebt die Strecke b' bei der Rotation eine Fläche $2\pi r' \cdot b'$. Durch diese geht ein Kraftfluss von $^1/_{10}$ Einheit hindurch, also ist

$$\mathfrak{H} \cdot 2\pi r' b' = \frac{1}{10}, \text{ oder}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{10 \cdot 2\pi r' b'}.$$

87. Diagramm des bipolaren Magnetfeldes. — Zwei gleich starke aber entgegengesetzte Pole seien innerhalb eines homogenen Mediums gegeben. Wir wollen ihr Feld, das in Fig. 12 durch Eisenfeilicht dargestellt war, durch ein Diagramm wiedergeben. Der eine Pol N habe die Stärke: $m = +\frac{20}{4\pi} = +1{,}592\ \text{cm}^{3/2}\,\text{gr}^{1/2}\,\text{sek}^{-1}$, der andere Pol S die absolute Polstärke $m = -\frac{20}{4\pi} = -1{,}592\ \text{cm}^{3/2}\,\text{gr}^{1/2}\,\text{sek}^{-1}$. Wir zeichnen zuerst für jeden einzelnen das entsprechende Diagramm (vergl. den unteren Teil der Fig. 26, Tafel I). Der Durchmesser des um jeden Pol herumgelegten Kreises wird in 20 gleiche Teile geteilt, da von jedem Pol der Kraftfluss $4\pi \cdot 1{,}592 = 20$ in das umgebende Medium übergeht. Als Achse benutzen wir dabei die Verbindungslinie der beiden Pole. Die nach den Schnittpunkten der Kreise gezogenen Strahlen geben das Kraftliniendiagramm für jeden Pol. Denkt man sich die ganze Figur um die Achse gedreht, so beschreiben die genannten Strahlen 2 mal 20 sich gegenseitig durchdringende kegelförmige Fächer; durch 20 von ihnen sendet der Pol N je eine Kraftflusseinheit in das Medium hinaus, durch die übrigen 20 zieht der Pol S je eine solche Einheit zu sich heran. Die so abgeteilten Räume müssen ineinander übergehen, d. h. miteinander verschmelzen, wenn gleichzeitig N als Quellpunkt, S als Sinkstelle in dem Medium wirkt. Wir bringen diese Kombination der beiden Felder in unserem Diagramme zum Ausdruck, wenn wir die Querdiagonalen in den rautenförmigen Figuren ziehen, welche durch das Durchschneiden der Kraftlinien beider Systeme entstehen, wie wir im nächsten Paragraphen näher begründen wollen. Wir erhalten Linien, welche von N ausgehen und sich zu S hinüberschwingen, zunächst freilich gebrochene Linien, die wir aber leicht zu Kurven abrunden können. Ihnen nähern wir uns immer mehr, wenn wir jedes Fach wieder in 10, 100 u. s. w. Fächer abteilen, von denen jedes eine Zehntel, Hundertel u. s. f. Kraftflusseinheit befördert.

Bei der Rotation beschreiben die gezeichneten Kurven 20 schalenförmige Räume, welche sich vom Nordpol nach dem Südpol hinüber-

ziehen. Jedes Fach führt eine Kraftflusseinheit vom N-Pole zum S-Pole hinüber; diese Schalen sind die Einheitssolenoide.

Das innerste Solenoid hat spindelförmige Gestalt; eine Spitze desselben liegt bei N, die andere bei S. Das äusserste, 20., geht mit seiner Spitze von N aus nach links und breitet sich ins Unendliche aus; von rechts her kehrt der Kraftfluss dann gewissermaassen wieder aus dem Unendlichen zurück und fliesst in dem sich zu einer Spitze verengenden innersten Solenoid nach S ein. Die Begrenzungslinien sind Kraftlinien; der Verlauf derselben stimmt sehr nahe mit den Feilichtketten der Fig. 12 überein; nur sind hier ganz bestimmte Linien hervorgehoben.

88. Kombination zweier Kraftflussdiagramme. — Die Kraftliniendiagramme zweier Pole in demselben Felde mögen so eng gezogen sein, dass wir innerhalb kleiner Strecken die von jedem auslaufenden Linien als parallel ansehen können (vergl. § 86). Die beiden Geraden K_1 in Fig. 27 sollen z. B. von einem Nordpole auslaufen, die beiden Parallellinien K_2 nach einem Südpole hinstreben. Die von dem erstgenannten Pole an der Stelle P herrührende Feldstärke $\mathfrak{H}$ ist nach § 86 umgekehrt proportional dem Abstande b_1, die von dem Südpole herrührende Kraft $\mathfrak{H}_2$ auf einen bei P gedachten Einheitspol ist umgekehrt proportional dem Abstande b_2. Die Winkel α unten und oben in dem durch die Linienpaare K_1 und K_2 begrenzten Parallelogramme sind einander gleich. Aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke zwischen $s_1 b_2$ einerseits und $s_2 b_1$ anderseits folgt, dass

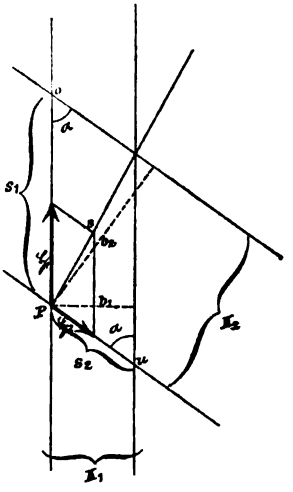


Fig. 27.

$$s_1 : s_2 = b_2 : b_1$$

oder dass

$$s_1 : s_2 = \mathfrak{H}_1 : \mathfrak{H}_2 \text{ ist.}$$

Eine Diagonale, welche durch das aus $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ konstruierte Kräfteparallelogramm hindurchgeht, fällt also mit der Diagonale des aus den Seiten s_1 und s_2 gebildeten Parallelogrammes zusammen: die Resultierende der beiden Kräfte $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ geht durch den dem Punkte P gegenüberliegenden Schnittpunkt der Parallelogrammfigur, welche aus der Kombination der Strahlen beider Felder hervorgeht.

Legen wir also zwei Kraftliniendiagramme übereinander, so ergiebt sich zur Auffindung der resultierenden Kraftlinienrichtungen die einfache Regel: Man zieht in den einzelnen Durchschneidungsfiguren der aufeinander folgenden Strahlenpaare die Querdiagonalen.

Die Regel konnte bei der Fig. 26 nur ein angenähertes Bild des wirklichen Kraftlinienverlaufes geben, da dort die einzelnen Strahlen noch erheblich von der Parallelität abwichen. Erst wenn wir die den Bruchteilen von Kraftflusseinheiten entsprechenden Hilfslinien mitzeichnen und auf deren gegenseitige Schnittfiguren die Regel anwenden, kommen wir der Wirklichkeit näher.

Sind beide Pole gleichnamig, so müssen wir in Fig. 27 die vom unteren nach dem oberen Punkte gerichtete Diagonale ziehen.

Da sich die Seiten eines Parallelogrammes zur Diagonale umgekehrt wie die zugehörigen Höhen verhalten, so ist zunächst

$$s_1 : s = \frac{1}{b_1} : \frac{1}{b},$$

wenn wir mit s die Diagonalenlänge, mit b ihre Höhe, d. h. ihre senkrechte Entfernung von einem Endpunkte o oder u bezeichnen. Ist die resultierende Kraft $\mathfrak{H}$, so folgt aus der Ähnlichkeit der entsprechenden Parallelogramme

$$\mathfrak{H}_1 : \mathfrak{H} = s_1 : s = \frac{1}{b_1} : \frac{1}{b}.$$

Ebenso ist

$$\mathfrak{H}_2 : \mathfrak{H} = s_2 : s = \frac{1}{b_2} : \frac{1}{b},$$

oder

$$\mathfrak{H}_1 : \frac{1}{b_1} = \mathfrak{H} : \frac{1}{b} \text{ und } \mathfrak{H}_2 : \frac{1}{b_2} = \mathfrak{H} : \frac{1}{b}$$

oder endlich

$$\mathfrak{H}_1 b_1 = \mathfrak{H} b = \mathfrak{H}_2 b_2.$$

Die Linienpaare K_1 und K_2 Fig. 27 schneiden bei der Rotation Kegelschalen aus dem Raume heraus, deren Querschnitte so gross sind, dass $\mathfrak{H}_1 b_1 \cdot 2\pi r = 1$ und $\mathfrak{H}_2 b_2 \cdot 2\pi r = 1$ ist, denn durch jede Schale geht eine Kraftflusseinheit hindurch. Bei dieser Rotation schneidet die resultierende Linie s und ihre durch o und u gehenden Nachbarn Schalen aus, für welche

$$\mathfrak{H} b \cdot 2\pi r = \mathfrak{H}_1 b_1 \cdot 2\pi r = \mathfrak{H}_2 b_2 \cdot 2\pi r$$

ebenfalls gleich 1 ist. Die Grösse $\mathfrak{H} b \cdot 2\pi r$ stellt aber den Kraftfluss durch die neuen Schalenräume dar, welcher sich von einem Pole zu dem anderen hinüberzieht.

89. Berechnung der Feldstärke an einer beliebigen Stelle des bipolaren Magnetfeldes nach seinem Diagramme. — Nach dem im vorigen Paragraphen erhaltenen Resultate genügt es, den Querschnitt eines schalenförmigen Solenoides des bipolaren Feldes zu berechnen, um die resultierende Feldstärke in absolutem Maasse zu erhalten.

Ist an einer Stelle in der Entfernung r von der Achse die Breite des Streifens zwischen zwei aufeinander folgenden Diagrammlinien gleich b, so ist die Querschnittsfläche der betreffenden Schale gleich $2\pi r \cdot b$ und die Feldstärke daselbst

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2\pi r \cdot b}.$$

An der bezeichneten Stelle des Diagramms Fig. 26, für welches derselbe Maassstab wie für Fig. 25 gilt, ist: $b = 3{,}5$; $r = 13{,}2$ cm, also $\mathfrak{H} = 0{,}003445$ cm$^{-1/2}$ gr$^{1/2}$ sek^{-1}. Hier würde es schon erheblich viel schwieriger sein, nach dem Quadratgesetz die Grösse und Richtung der resultierenden Kraft zu berechnen.

90. Diagramm ungleich starker Magnetpole. — Wir können wie vorher die Felder gleich starker, so auch die ungleich starker Magnetpole durch Diagramme zur Anschauung bringen. Die Achse derselben wird naturgemäss durch die Lage der Pole bestimmt. Zunächst wird für jeden einzelnen Pol das unipolare Diagramm entworfen, das Feld beider ergiebt sich durch Ziehen der entsprechenden Diagonalen.

a) Diagramm zweier ungleichnamiger Pole. — Ein Nordpol N von $+\frac{20}{4\pi} = 1{,}592$ Einheiten und ein schwächerer Südpol s von $-\frac{5}{4\pi} = -0{,}3979$ Einheiten mögen gleichzeitig in bestimmter Entfernung vorhanden sein. Ersterer entsendet 20 Kraftflusseinheiten, letzterer nimmt fünf aus der Umgebung in sich auf. Fig. 28, Tafel I lässt zunächst die Einzeldiagramme jedes Poles erkennen. Die resultierenden Kraftlinien des kombinierten Feldes ergeben sich nach folgenden Gesichtspunkten: Fassen wir irgend einen Durchschnitt zweier Kraftlinien beider Systeme ins Auge, so wird der daselbst vorhanden gedachte positive Einheitspol von N fortgestossen und zu s hingezogen; daraus ergiebt sich die Richtung der zu zeichnenden Diagonalen. Die beiden innersten, der Achse nächsten, einander zugekehrten Kegelräume beider Pole lassen ihren Kraftfluss unmittelbar ineinander überfliessen, da er in beiden Räumen gleichgerichtet ist, von N weg nach s hin. Daraus ergiebt sich das Abbiegen der innersten Kraftlinien von den ursprünglichen Richtungen. Alle anderen Linien folgen diesem Zuge. Das erhaltene Bild lässt unmittelbar noch folgende Einzelheiten erkennen: Die von N ausgehenden Kraftlinien ziehen sich nach s hinüber, um in immer weiteren Bogen in s einzumünden. Bei der Rotation

der Figur entstehen fünf conachsiale Schalen, in denen je eine Kraftflusseinheit von N nach s hinübergeht. Mehr Einheiten vermag s nicht aufzunehmen. Daher umziehen die folgenden Linien den Südpol s, ohne an ihn sich anzuheften. 15 Einheitssolenoide gehen von N aus, ohne ihren Abschluss im Diagramm zu finden; sie führen ihren Kraftfluss in die entfernteren Regionen des Feldes hinaus.

Das ganze Kraftflusssystem, welches von N ausgeht, ist durch die Wirkung des benachbarten ungleichnamigen Poles s etwas nach rechts hin verschoben und abgelenkt. Durch die Zugspannungen längs, und die Druckspannungen quer zu den Kraftlinien werden die beiden Pole aufeinander zu gezogen („Anziehung"). Sind beide Pole frei beweglich, so wird s gegen N und umgekehrt N gegen s gezogen.

An N haften aber auch noch Kraftlinien, deren Zug nach der entgegengesetzten Seite wirkt. Die relativen Beschleunigungen, mit denen sich beide Pole bewegen würden, sind also ungleich gross.

Das Diagramm bringt demnach das sonst auf eine Verschiedenheit der „magnetischen Massen" zurückgeführte Verhalten beider Pole zum Ausdruck.

Auch hier ergiebt sich aus Streifenbreite b und Abstand r von der Achse die Stärke $\mathfrak{H}$ an jeder Stelle des Feldes.

b) Diagramm zweier gleichnamiger Pole. Wiederum sei die Polstärke des einen Poles $\frac{20}{4\pi} = 1{,}592$, die des anderen $\frac{5}{4\pi} = 0{,}3979$ Einheiten, beide seien aber gleichnamig, einem Nordpole N sei also ein schwächerer Nordpol n gegenübergestellt. Am Kreuzungspunkte der Linien der entsprechenden unipolaren Felder wirken jetzt beide Kräfte von den Polen hinweg. Wir haben in dem der Fig. 28 völlig gleichen Netze die anderen Diagonalen an jeder Stelle zu ziehen und erhalten die Fig. 29. Die Kraftlinien beider Pole biegen sich gegenseitig voneinander fort. Dadurch bleibt eine Linie zwischen ihnen übrig, welche weder mit dem einen noch mit dem anderen Pole in Verbindung tritt. Vor ihr liegt eine Indifferenzzone J. Der Pol N ergiesst die von ihm ausgehenden 20 Kraftflusseinheiten in den Raum hinaus, der Pol n seine fünf Einheiten, ohne dass eine Mischung beider stattfände.

Der Querdruck der Kraftlinien würde beide Pole voneinander entfernen, wenn ihre Träger beweglich wären, und zwar würde n caet. par. stärker nach rechts gedrängt, als N nach links, weil diesen nach rechts hin gehende Kraftlinien noch etwas zurückhalten.

Denkt man sich Druck und Zug miteinander vertauscht, so stellt das Diagramm ein Doppelsternpaar dar, dessen Komponenten unter der Wirkung der Massenanziehung gegeneinander gravitieren.

91. Diagramme homogener Felder. — In homogenen Feldern verlaufen die Kraftlinien in gleicher Dichte parallel nebeneinander.

Wollen wir dasselbe Konstruktionsprinzip wie für die centrischen Systeme auch hier anwenden, so müssen wir eine der Kraftrichtung parallele gerade Linie als Achse wählen und um diese cylindrische Schalen von solchem Querschnitt konstruieren, dass jede von ihnen gerade eine Kraftflusseinheit hindurchlässt. In der Ebene bilden sich die Grenzen dieser Cylinderschalen als gerade Linien ab, welche der Achse parallel gehen. Für die Abstände r_1, r_2, r_3 . . . dieser Linien von der Achse muss die einfache Beziehung bestehen:

$$\mathfrak{H} \cdot \pi r_1^2 = 1, \quad \mathfrak{H}(\pi r_2^2 - \pi r_1^2) = 1,$$

oder

$$\mathfrak{H} \cdot \pi r_2^2 = 2, \quad \mathfrak{H} \cdot \pi r_3^2 = 3, \ldots . \text{ u. s. w.}$$

Haben wir das Diagramm nach dieser Regel angelegt, so können wir seine Linien durch Diagonalenziehen ganz ähnlich mit Linien centrischer Systeme vereinigen, wie wir dies im Vorhergehenden für die Linien solcher Systeme unter sich gethan haben. Für die resultierenden Linien gilt dann auch die Formel:

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2\pi r \cdot b}.$$

In Figur 30 ist ein homogenes Feld von der absoluten Stärke $\mathfrak{H} = 0{,}007771$ cm$^{-1/2}$ gr$^{1/2}$ sek^{-1} zur Darstellung gebracht worden. Die Radien der aufeinander folgenden Cylinderschalen mussten dazu die Länge

$$r_1 = \sqrt{\frac{1}{\pi \mathfrak{H}}} = 6{,}4 \text{ cm}; \quad r_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi \mathfrak{H}}} = 9{,}0 \text{ cm};$$

$$r_3 = \sqrt{\frac{3}{\pi \mathfrak{H}}} = 11{,}1 \text{ cm}; \ldots .$$

$$r_9 = \sqrt{\frac{9}{\pi \mathfrak{H}}} = 19{,}2 \text{ cm haben.}$$

Die Richtung der Kraftlinien ist von rechts nach links gedacht. In grösserer Ferne stehe also rechts ein starker *N*-Pol, links ein starker *S*-Pol weit ausserhalb der Grenzen des Diagrammes.

Mit diesem Felde ist das eines Nordpoles von $+ m = + \frac{10}{4\pi}$ $= 0{,}7958$ cm$^{3/2}$ gr$^{1/2}$ sek^{-1} Stärke kombiniert. An den Durchschnittspunkten der Linien beider Felder wird der $+1$ Pol im homogenen Felde nach links getrieben, vom Nordpole *N* abgestossen. Daraus ergiebt sich die Richtung, in der die resultierenden Linien zu zeichnen sind. Der aus dem *N*-Pole hervorquellende Kraftfluss von zehn Einheiten wird durch die Strömung des homogenen Feldes ganz nach

links hinübergebogen. Dadurch wird zunächst die innerste gleichgerichtete kegelförmige Grenzfläche 1,1 gegen die Achse gedrückt und alle folgenden sind aus ihrer ursprünglichen Lage entsprechend nachgeschoben. Die gegen die Strömung geöffneten Schalen 7 bis 10 sind ganz umgebogen. Die 10 Schalen, die von N ausgehen, haben sich so vollkommen der Richtung des Feldes angepasst, dass weiter links das Feld wieder ganz homogen wird.

Die Kraftflusscylinderschalen des homogenen Feldes weichen vor N wie vor einem Hindernisse aus und umziehen den hier sich geltend machenden Quellpunkt in weiten Bogen; erst die entfernteren behalten ihren Lauf ungestört bei. Gerade bei dem vorliegenden Beispiele zeigt sich das Zutreffen des Strömungsbildes recht deutlich.

Betrachtet man das Bild unter dem Gesichtspunkte der Zug- und Druckeigenschaften der Kraftlinien, so ist klar, dass N in dem homogenen Felde nach links fortgezogen werden muss. Dies entspricht der Wanderung eines beweglichen Nordpoles in einem Felde im Sinne der Kraftlinien (vergl. § 28). Das Umgekehrte würde stattfinden, wenn wir einen Kraftfluss einsaugenden Südpol, eine Sinkstelle eingezeichnet haben würden.

92. Kombination von mehr als zwei Feldern. — Jedes der erhaltenen Felder lässt sich wieder mit anderen Feldern vereinigen. So können selbst sehr komplizierte Fälle magnetischer Wechselwirkung durch successive Konstruktion dargestellt werden. Man führt diese zweckmässig auf Pauspapier aus, so dass die Einzeldiagramme direkt miteinander zur Deckung gebracht werden können. Diese müssen natürlich im gleichen Maassstabe ausgeführt werden. Besonders instruktiv ist es, das bipolare Feld eines Stabmagneten mit dem homogenen erdmagnetischen Felde zu kombinieren, was dem Leser selbst überlassen werden möge.

6. Kapitel.

Struktur der Feldträger und Feldmedien.

Bisher hatten wir uns nur mit dem Aussenraum der magnetisierten Körper, d. h. mit den Kraftlinien selbst beschäftigt. Wir lernten sie nach ihren qualitativen Eigenschaften kennen, zeigten, wie man die sie bestimmenden Grössen messen und sie auf Grund ziffermässig gegebener Daten konstruktiv darstellen kann. Jetzt wollen wir uns über das Innere der Magnete selbst Aufschluss zu verschaffen suchen. Dabei werden sich gewisse Struktureigentümlichkeiten zeigen, die wir bei jedem von Kraftlinien durchströmten Körper voraussetzen müssen.

A) Die Magnetisierung.

93. Der Magnetismus als molekulare Eigenschaft. — Versuch 41. Eine gut magnetisierte Stahlstricknadel wird in Eisenfeilicht gelegt: An den Enden haften kräftige Bärte, in der Mitte, an der Indifferenzzone bleibt kein Eisenteilchen hängen. Man bricht die Nadel mitten durch und wiederholt mit den Hälften den Versuch: An den Enden der Stücke, auch an denen, welche vorher die Indifferenzzone bildeten, bleibt Feilicht haften. Jedes Stück hat in seiner Mitte eine neue Indifferenzzone angenommen. Man zerbricht wiederum jede Hälfte: Jedes neue Bruchstück erweist sich immer wieder als ein vollkommener Stabmagnet mit zwei magnetischen Enden und einer unmagnetischen Zwischenzone.

Da man diesen Versuch beliebig weit fortsetzen kann, so drängt sich die Vorstellung auf, jeder kleinste Bestandteil eines Magnetes sei für sich schon ein Magnet. Die kleinsten Massen, in welche physikalische Methoden die Substanzen der Körper zu zerlegen vermögen, nennt man Moleküle. Man stellt sich daher einen Magneten aus sogenannten „Molekularmagneten“ aufgebaut vor, indem man den Molekülen selbst magnetische Eigenschaften zuschreibt.

Dass polar differenzierte Eigenschaften schon den kleinsten Bestandteilen eines Magneten zukommen, ist eine sehr auffallende Eigentümlichkeit des magnetischen Zustandes. Wir machten schon früher auf polar verschiedenes Verhalten kleinster Teilchen der Schwere gegenüber aufmerksam, welches der unbelebten Natur fremd zu sein scheint, aber im Pflanzenreich uns entgegentritt. Schneidet man eine Weidenrute in einzelne kurze Stücke und lässt diese getrennt weiter wachsen, so treiben die oberen Schnittflächen eines jeden Stückes Stengel, die unteren dagegen Wurzeln; an derselben Stelle des ursprünglichen Zweiges treten also die beiden polar verschiedenen Tendenzen auf, ebenso wie sich an einer magnetisch scheinbar indifferenten Stelle eines Magnetstabes beim Zerbrechen plötzlich nord- und südpolare Eigenschaften zeigen.

94. Magnetische Molekülketten. — Nach dem vorigen Versuche müssen wir uns den Gegensatz von Nord- und Südpol, von Quellpunkt und Sinkstelle, den wir an einem Magneten bemerken, in dessen Inneres fortgeführt denken. Die Molekularmagnete können hier aber nicht regellos durcheinander liegen, sondern müssen so geordnet sein, dass wenigstens in der Nähe der Indifferenzzone der von je einem *n*-Pole ausgehende Kraftfluss durch einen unmittelbar benachbarten *s*-Pol aufgenommen wird; denn in dieser Zone sehen wir ja weder Kraftlinien austreten noch in das Innere des Magneten einmünden. Nur gegen die Enden hin überwiegen auf der einen Seite *n*-Pole, nach der anderen *s*-Pole, deren Kraftfluss nicht ausschliesslich im Magneten selbst verläuft; daher treten an den Enden Kraftlinien aus und ein. Am einfachsten denken wir uns die Molekularmagnete in Ketten geordnet, deren einzelne Glieder gleichgerichtet sind und sich mit ihren *n*- und *s*-Polen aneinander hängen. Dann wird im Inneren der Kette der Kraftfluss von Molekül zu Molekül weitergegeben, nur das erste und das letzte derselben zeigt einen freien, d. h. an den Aussenraum grenzenden Pol, der seine Kraftlinien in diesen aussendet, oder solche aus dem Felde in sich aufnimmt.

Die Art und Weise, wie die magnetischen Elemente eines Körpers angeordnet sind, nennt man seine „Magnetisierung".

95. Modelle eines aus Molekularmagneten zusammengesetzten Stabmagneten. — Folgende Modelle sollen die Struktur eines Magneten veranschaulichen.

1) Eine Reihe gleich grosser, parallel-epipedischer Klötzchen (etwa Baukastensteine) streicht man an einem Ende rot (*n*-Ende), am anderen blau (*s*-Ende) an. Sie stellen die Molekularmagnete dar. Man setzt sie zu Ketten und diese zu einer ungefähr rechteckigen Figur, dem Stabmagneten, zusammen. In der Mitte liegen die einzelnen Bausteine des Magneten mit ihren Achsen einander parallel, einer schliesst sich unmittelbar an den anderen. Nach den Enden zu gestaltet man die Orientierung unregelmässiger, doch so, dass am einen Ende hauptsächlich *n*-Pole, am anderen *s*-Pole nach aussen weisen.

2) Auf einem rechteckigen Brette befestigt man in gleichen Abständen mehrere Parallelreihen von Nähnadeln mit ihren Spitzen vertikal nach oben. Einen Stahldraht

schneidet man in ebenso viele Stücke von etwas geringerer Länge als der Nadelabstand beträgt. In die Mitte eines jeden Stückes schlägt man mit dem Locheisen einen Körnerpunkt; dabei biegen sich die beiden Schenkel etwas um, so dass sie mit dem Körnerpunkt auf die Nadelspitzen gesetzt, nicht herunterfallen, da ihr Schwerpunkt nach unten gerückt ist. Man magnetisiert die Stahldrahtstücke und setzt sie auf die Nadeln; sie ordnen sich zu Ketten und zu in sich mehr oder weniger stabilen Gruppen (Ewing); ein Ende des Systems weist nur n-Pole, das andere nur s-Pole auf. Nähert man dieses Modell eines Magnetstabes einer Deklinationsnadel in den beiden Hauptlagen (§ 38), so verhält es sich gerade wie ein wirklicher Stabmagnet.

96. Die gleichförmige Magnetisierung. — Bei einem Magneten treten im allgemeinen nicht nur an den Polenden Kraftlinien aus (vergl. z. B. Fig. 4, p. 17). Dementsprechend können auch im Inneren die Molekülketten nicht regelmässig angeordnet sein; sie zerstreuen sich nach den Enden zu und nur in der Mitte liegen die einzelnen Molekularmagnete einander parallel. Man spricht daher von einer „entmagnetisierenden Wirkung der Enden", welche diese Lockerung in dem molekularen magnetischen Verbande herbeiführt. Stabmagnete, überhaupt Magnete mit freien Enden, sind mehr oder weniger „ungleichförmig" magnetisiert.

Wir können den inneren Kraftlinienverlauf aber auch so regulieren, dass jedes einzelne Volumenelement des Magneten in magnetischer Beziehung den anderen Elementen völlig gleicht: „Gleichförmige Magnetisierung". Bei sehr langen dünnen Magnetstäben z. B. ist die entmagnetisierende Wirkung der Enden gering, die Ketten der Molekularmagnete und ihr Kraftfluss verlaufen einander und der Stabachse parallel, Kraftlinien treten nur an den Enden aus.

Wir erhalten das Bild eines solchen gleichförmig magnetisierten Stabes, wenn wir die in § 95 beschriebenen Klötzchen sämtlich in geradlinigen gleich langen Ketten nebeneinander anordnen.

An den Stirnflächen eines gleichförmig magnetisierten Körpers ergiessen sich um so mehr Kraftlinien in das Feld, je mehr Ketten an denselben enden. Da alle einzelnen Elemente gleich gross zu denken sind, so ist die Polstärke m des gleichförmig magnetisierten Stabes proportional seinem Querschnitte ω. Dasselbe gilt für jede einzelne Längsfaser des Stabes; ihre Polstärke entspricht ihrem Querschnitt. Bei jedem Stück des Magneten ist ferner das magnetische Moment (§ 67) um so grösser, je länger es ist, denn um so weiter sind die allein als Pole wirkenden Kettenenden voneinander entfernt. Ein gleichförmig magnetisierter Stab hat also die Eigentümlichkeit, dass er selbst wie jedes aus ihm herauszuschneidende stabähnliche Stück ein Moment besitzt, welches seinem Querschnitt ω und seiner Länge l, also seinem Volumen v proportional ist.

97. Das Toroid. — Der Ausbildung einer vollkommen gleich-

förmigen Magnetisierung treten immer die Enden der Magnetstäbe hindernd entgegen; an diesen verlassen die Kraftlinien den molekularen Verband und zerstreuen sich, was mit einer Divergenz der Molekülketten verbunden ist. Um im Inneren einer Eisen- oder Stahlmasse überall die gleiche Magnetisierung herzustellen, müssen wir sie endenlos, also in sich zurücklaufend gestalten. So kommen wir zu geschlossenen Ringen, welche ringsum derart magnetisiert sind, dass an der Umgrenzungsfläche des Ringes die Kraftlinien überall tangential verlaufen und nirgends heraustreten. Solche Ringe von kreisförmigem Querschnitt und kreisförmiger Achse nennt man Toroide (von französisch le tore = Ring, Wulst). Da ein solches Toroid keine Kraftlinien aussendet, so übt es auch keine magnetischen Wirkungen aus. Sein Feld beschränkt sich lediglich auf sein Inneres.

Durch Kreisstrich (§ 19) können wir einen solchen geschlossenen Ring im Inneren vollkommen gleichförmig magnetisieren. Wirksamere Mittel lernen wir im zweiten Abschnitt kennen.

98. Das geschlitzte Toroid. — Auch wenn das Toroid nicht ganz geschlossen, sondern durch eine Lücke unterbrochen ist, können wir in ihm eine gleichförmige Magnetisierung annehmen, vorausgesetzt, dass die Unterbrechung eine nicht zu weite ist. Denn dann werden die an der einen Schnittfläche austretenden Kraftlinien von der anderen unmittelbar wieder aufgenommen und verhältnismässig nur wenige von ihnen können sich in den Raum hinaus zerstreuen.

Man nennt solche fast geschlossene, von Kraftlinien durchzogene Ringe „geschlitzte Toroide".

Die beiden Beispiele einer gleichförmigen Magnetisierung des geschlossenen und des geschlitzten Toroid spielen in der Technik eine grosse Rolle. Da sie ohne bestimmt angebbare Pole sind, ist es unmöglich, die wichtigen an ihnen auftretenden Eigenschaften nach der Theorie der fernewirkenden Centren zu behandeln.

99. Magnetisches Moment pro Volumeneinheit. Intensität der Magnetisierung. — Das Verhältnis des magnetischen Momentes eines gleichförmig magnetisierten Körpers oder eines beliebigen Stückes desselben zu seinem Volumen ist eine ganz bestimmte Grösse, welche für die Art seiner Magnetisierung charakteristisch ist. Denn durch sie ist die Polstärke der einzelnen Teilchen und die Zahl der Molekularmagnete bestimmt.

Man nennt dieses Verhältnis „das magnetische Moment pro Volumeneinheit" oder die Stärke, Intensität der Magnetisierung. Ist m die Polstärke eines solchen Stabes vom Querschnitt ω und der Länge l, so ist die Magnetisierungsintensität $\mathfrak{J}$:

$$\mathfrak{J} = \frac{m\,l}{\omega\,l} = \frac{m}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Wir können die Intensität also auch als Polstärke auf der Flächeneinheit des freien Endes definieren. Wir beachten wegen weiterer Folgerungen, dass nach 6) $m = \mathfrak{J}\omega$ ist. Ein Stab, der bis zu der Intensität $\mathfrak{J}$ gleichförmig magnetisiert ist, sendet also an seinem N-Ende im ganzen $4\pi\mathfrak{J}\omega$, pro Flächeneinheit $4\pi\mathfrak{J}$ Kraftlinien aus.

Auch bei einem nur angenähert gleichförmig magnetisierten Körper kann man von einem magnetischen Moment der Volumeneinheit, seiner Magnetisierungsintensität $\mathfrak{J}$ sprechen. Bei einem langen Magnetstabe ist $\mathfrak{J}$ in der ganzen Indifferenzzone konstant; gegen die Enden zu ändert sich dieser Wert.

100. Dimension der Magnetisierungsintensität. — Da die Magnetisierungsintensität $\mathfrak{J}$ durch das Verhältnis eines magnetischen Momentes zu einem Volumen definiert ist, so hat es nach § 67 die Dimension

$$\dim \mathfrak{J} = \frac{\mathrm{cm}^{5/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-1}}{\mathrm{cm}^3} = \mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-1},$$

also dieselbe Dimension wie die Feldstärke § 70.

B) Magnetische Influenz.

101. Verhalten des weichen Eisens im Felde; Magnetisierung durch Influenz. — Wir hatten bisher weiches Eisen lediglich dazu benutzt, um magnetische Kraftlinien von einem Magnetpole aus an entferntere Stellen des Feldes zu leiten. Jetzt wollen wir zeigen, dass auch Eisen in seinem Inneren bis zu einer bestimmten Intensität magnetisiert werden kann. Der magnetische Zustand dauert hier nur so lange an, als die magnetische Kraft von aussen her wirkt. Wir müssen uns daher vorstellen, dass sich im Inneren von Eisenmassen magnetische Molekülketten erst in dem Augenblicke ausbilden, wo magnetisierende Kräfte zu wirken beginnen, und dass sie nach dem Aufhören derselben wieder zerfallen.

Versuch 42. Ein Stab weichen Eisens wird in einem Stativ vertikal befestigt, auf sein oberes Ende ein Stück starken Papieres gelegt und von oben her diesem der Pol eines kräftigen Stahlmagneten oder magnetischen Magazins genähert; das Papier verhindert, dass eine direkte Berührung von Magnet und Eisen eintritt. (Hierdurch unterscheidet sich dieser Versuch von dem des § 13, p. 10). Wird von unten eine Schale mit Eisenfeilicht herangebracht, so zeigt das Eisen magnetische Eigenschaften so oft es sich in dem Bereiche des Kraftlinienverlaufes des Dauermagneten befindet; es wird „temporär" ein Magnet.

Versuch 43. Vor dem N-Pole eines kräftigen Stabmagneten wird ein schmales, aber gleich hohes Stück weichen Eisens, über beide ein Kartonblatt gelegt, und auf diesem das Kraftlinienbild erzeugt. Das Eisenstück zieht die Kraftlinien zu sich hin, sie treten an dem dem Magneten näheren Ende ein, an dem entfernteren aus. Das erstere wirkt also als Sinkstelle, das entferntere als neuer Quellpunkt. Es ist gerade so, als ob am näheren Ende das Eisenstück einen s-Pol erhalten hätte, am anderen einen n-Pol. Legt man das Eisen vor den S-Pol des Magneten, so tritt das Umgekehrte ein.

Versuch 44. In beiden Lagen untersucht man den Kraftlinienverlauf in der Umgebung des Eisenstückes mit der Nadel Fig. 7, p. 28 und zeichnet den Kraftlinienverlauf.

Versuch 45. Man legt einen dünnen Stab aus weichem Eisen zwischen die Pole zweier kräftiger Magnete, ohne dieselben zu berühren. Eisenfeilicht zeigt an den Enden des Eisenstabes das Vorhandensein von Polen an. Nun zerschneidet man ihn, ohne ihn aus dem Felde zu nehmen, in einzelne Stücke, die man mit geringen Zwischenräumen zu einer fortlaufenden Kette ordnet. Zwischen je zwei Enden haben sich Pole ausgebildet, welche den Kraftlinienstrom von Stück zu Stück weitergeben wie bei einem Magnetstabe. Entfernt man die Dauermagnete, so ist die Polarität der Stücke verschwunden.

In dem Felde eines Magneten ändert weiches Eisen den Lauf der Kraftlinien dadurch ab, dass es an einem seiner Enden eine Sinkstelle, am anderen einen Quellpunkt ausbildet, und so selbst als Magnet erscheint, der dem erzeugenden Pole immer die entgegengesetzte Polarität zukehrt. Man nennt diesen Vorgang „Magnetisierung durch Influenz".

Die Magnetisierung verschwindet, sowie der influenzierende Magnet entfernt wird; doch bleibt gewöhnlich eine Spur derselben zurück: „Remanenz". So ist der Magnetismus des natürlichen Magneteisens wahrscheinlich der erdmagnetischen Wirkung zuzuschreiben.

Auch Stahl lässt sich durch Influenz magnetisieren.

Versuch 46. Zwischen die ungleichnamigen Pole zweier kräftiger in gegenseitige Verlängerung gelegter Magnetstäbe wird eine unmagnetische Stahlstricknadel gehalten, doch so, dass sie die Pole nicht berührt. Klopft man sie mit einem Holzhammer, um für einige Augenblicke den molekularen Verband in ihr zu lockern, so zeigt sie sich nach dem Herausnehmen aus dem Felde dauernd magnetisiert.

Versuch 47. Hält man einen unmagnetischen Stahlstab in die Richtung der erdmagnetischen Kraft und schlägt mit einem Hammer einige Male auf sein oberes Ende, so kann man an seinen beiden Enden magnetische Pole schon mit einer mässig empfindlichen Bussole nachweisen.

Auf die Influenz muss man Rücksicht nehmen, wenn man prüfen will, ob ein Stück Eisen oder Stahl magnetisch ist oder nicht. Nähert man es den Polen einer empfindlichen Bussole, so sammelt es in jedem Falle die von dieser ausgehenden Kraftlinien; jedes Polende wird also zu dem Stück durch den Zug längs der Kraftlinien hingezogen. Nur wenn die Linien eines Poles der Nadel von einer Stelle des Stückes zurückgestossen werden, kann man sicher sein, dass dieses schon vorher Kraftlinien ausgesendet hat, also sein Inneres einen gewissen Grad von Magnetisierung besass.

102. Magnetische Schirmwirkung. — Dass der Kraftlinienverlauf eines Feldes durch Influenz abgeändert werden kann, ist besonders dann wichtig, wenn man Kraftlinien an irgend einer Stelle konzentrieren oder im Gegenteil sie von Kraftlinien säubern will, um sie „magnetisch zu schirmen". Wir geben hier einige typische und prak-

tisch wichtige Fälle als Beispiele, indem wir einen Ring aus weichem Eisen in das Feld bringen.

a) Kraftlinienverlauf in einer durch die Ringachse gehenden Ebene. Wir stellen den Ring vertikal zwischen die Polenden eines aufrecht stehenden Hufeisenmagneten.

Ein Hufeisenmagnet von 8—10 cm Schenkelweite wird in einem als Fuss dienenden Holzklotze so befestigt, dass die Schenkelenden vertikal nach oben stehen. Über diese wird ein Brett geschoben, in dem zwei Ausschnitte für den Magneten und zwischen diesen eine Längsvertiefung zur Aufnahme des Eisenringes angebracht sind. Der Ring hat die Form eines kurzen Cylinders (Trommel) von 4—5 cm Durchmesser und 2—3 cm Breite. Der Ringdurchmesser wird in die Verbindungslinie der Magnetpole gestellt. Damit man den Verlauf der Kraftlinien bis in das Innere des Ringes hinein verfolgen kann, wird in diesem ein Stück Kartonpapier von entsprechender Grösse in horizontaler Richtung eingeklemmt.

Die Kraftlinien gehen von beiden Magnetpolen nach dem Ringe hin und münden in die nächstliegenden Teile desselben ein. Er sammelt die Kraftlinien in grosser Zahl, so dass auch entferntere heranbiegen und sogar von innen her in das Ringmaterial eindringen.

Dieses Kraftliniensammeln an einer solchen Eisentrommel spielt bei der Dynamomaschinenkonstruktion eine grosse Rolle.

b) Kraftlinienverlauf in der Ringmittelebene.

Man legt den Ring horizontal auf das Brett, wie es Fig. 31 von oben gesehen zeigt und ein Kartonblatt mit kreisförmigem Ausschnitt über denselben; in das Ringinnere legt man auf ein Stück Kork von der Höhe der das Brett überragenden Schenkelenden eine kreisförmige Papierscheibe.

Vergleicht man das Kraftlinienbild Fig. 31 mit Fig. 3, welche den Kraftlinienverlauf zwischen den beiden Polen ohne Ring veranschaulicht, so sieht man, wie sich die aus dem *n*-Pole austretenden Kraftlinien sofort zu dem Ringe wenden und sich auch aus entfernteren Teilen des Feldes zu seiner Peripherie hinziehen, wo sie zu enden scheinen. Wir wissen, dass sie sich durch sein Inneres fortpflanzen, welches vermöge seiner grösseren Permeabilität einen bequemeren Durchgang als das umgebende Feld darbietet. Auf der anderen Seite treten sie alle mit analoger Krümmung wie beim Eintritt wieder aus und ziehen dem *s*-Pole zu. Oben und unten finden sich am Ringe Punkte, an denen die Kraftlinien nicht mehr einlaufen, sondern dem Mantel parallel

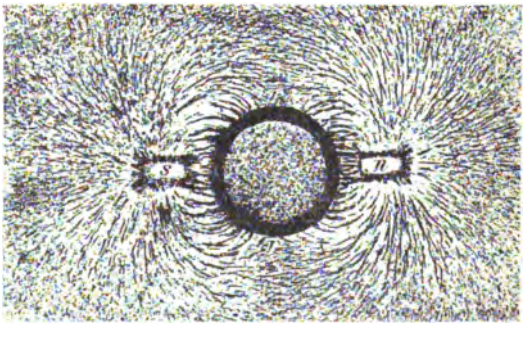


Fig. 31.

gehen; daselbst befinden sich also zwei Indifferenzzonen *JJ* des magnetisierten Ringes.

Im Inneren sehen wir die Eisenteilchen gar nicht mehr von richtenden magnetischen Kräften ergriffen; sie liegen hier vollkommen regellos durcheinander. Wiewohl dasselbe kräftigen Magnetpolen so nahe liegt, ist es doch völlig vor magnetischer Wirkung geschützt. Hierauf beruht eine sehr wichtige Eigenschaft solcher Mäntel aus weichem Eisen: Sie wirken als Schirme magnetischen Kräften gegenüber.

Wir verstehen jetzt auch das abweichende Verhalten einer Platte von weichem Eisen bei dem Versuche 27: Das Eisen hatte die Kraftlinien des ablenkenden Magnetstabes in sich aufgenommen und nach seinen Rändern weitergeleitet, so dass die Wirkung auf den beweglichen Versuchsmagneten ausblieb oder doch sehr gering wurde.

103. Schirmung einer Magnetnadel durch weiches Eisen. — Die aus dem Kraftlinienverlaufe sich ergebende schützende Wirkung weicher Eisenmassen selbst vor kräftigen, meist störenden magnetischen Wirkungen ist so wichtig, dass wir durch direkte Messung für einen gegebenen Fall ihre Grösse bestimmen wollen:

Versuch 48. Über ein stark magnetisiertes Magnetstäbchen von ca. 3 cm Länge wird ein nach unten gebogener Streifen Kartonpapier befestigt, dessen untere Enden horizontal umgebogen sind. Das Stäbchen wird mit einem Körnerpunkte nahe seiner Mitte auf eine Nadelspitze gestellt; durch das Gewicht des Kartonstreifens wird der Schwerpunkt genügend weit nach unten verlegt, so dass das Stäbchen nicht herabfällt, sondern sich in der Horizontalebene auf der Nadel dreht. Diese wird von einem kleinen Holzsäulchen getragen, welches auf einem Fusse vertikal befestigt ist. Von starkem Eisenrohre (Gasleitungsrohr) von etwa $3^1/_2$ cm lichter Weite schneidet man ein etwa 10 cm langes Stück ab und glüht es gut aus.

Man legt die ungleichnamigen Pole zweier kräftiger Stabmagnete einander so gegenüber, dass man das Rohrstück noch bequem zwischen sie bringen kann; dabei sollen die Magnetstäbe in gegenseitiger Verlängerung, bei rechteckigem Querschnitt auf der hohen Kante liegen.

Stellt man die Nadel mitten zwischen beide Pole in der Höhe der Achsen beider Stäbe, so misst das Quadrat ihrer Schwingungszahl N nach § 75 die Stärke des angenähert homogenen Feldes zwischen den Magnetpolen.

Nun schiebt man von oben her den Eisenmantel über die Nadel, ohne an sie anzustossen und nur so tief, dass die Kartonenden unten vorstehen: Die Schwingungen erfolgen sehr viel langsamer; werden jetzt n in derselben Zeit ausgeführt, so ist die Feldstärke im Verhältnis von $N^2 : n^2$ durch den Schutzmantel herabgesetzt. Die Schwingungen bleiben durch den Papierstreifen selbst für ein grösseres Auditorium verfolgbar. Das Stäbchen an einem Faden aufzuhängen, empfiehlt sich weniger, weil es leicht an die Innenwand des Eisencylinders gezogen und dort festgehalten wird.

Bei feinen Messungen, bei denen magnetische Wirkungen von Starkstromanlagen der Technik, sei es direkt, sei es durch die in der Erde „vagabundierenden" Rückströmungen in unseren Verkehrscentren sich immer mehr störend geltend machen, ist der eiserne Magnetschirm ein wichtiges Schutzmittel.

104. Begriff der magnetischen Polarisation. — FARADAY zeigte, dass nicht nur Stahl und weiches Eisen, sondern alle Substanzen bis zu einer bestimmten Intensität magnetisierbar sind; nur müssen bei diesen die magnetisierenden Kräfte meist sehr gross sein, wenn die Magnetisierungsintensität nachweisbare Werte annehmen soll. Wir können also alle Zwischenmittel, welche ein Magnetfeld erfüllen, als von Molekülketten durchzogen ansehen. Dann müssen sich diese Medien aber in einem gewissen Zwangs- oder Spannungszustande befinden; denn die an den kleinsten Teilchen geweckten Polaritäten wirken aufeinander. Man spricht daher von einem gewissen Zustand der „magnetischen Polarisation", in dem Stahl, weiches Eisen, sowie alle anderen Substanzen sich befinden, wenn sie magnetischen Wirkungen ausgesetzt sind. Es entsteht die Frage, ob wir uns diese Zwangszustände in einem magnetisch polarisierten Medium so beschaffen denken können, dass sich aus ihnen die Zug- und Druckwirkungen erklären, welche, wie wir oben zeigten, längs und quer zu den das Medium durchziehenden Kraftlinien auftreten. Wir betrachten zunächst zwei nebeneinander liegende im gleichen Sinne polarisierte Elemente.

Versuch 49. Zwei dünne, nur wenige Centimeter lange Stäbchen aus weichem Eisen tragen an einem Ende Ösen, mit denen sie an lange dünne Seidenfäden geknüpft sind. Lässt man sie in gleicher Höhe nebeneinander herabhängen und nähert sie einem kräftigen Stabmagnetpole, so spreizen sie auseinander. Beide nehmen einen Teil des von dem Magnetpole ausgehenden Kraftflusses auf und erhalten dadurch an ihren unteren Enden dem Pole entgegengesetzte, an ihren oberen Enden gleichsinnige Influenzpole. Die gleichnamigen Pole unten und oben stossen aber die Stäbe selbst voneinander zurück; es tritt ein Querdruck auf, welcher einer Komponente der Schwerkraft das Gleichgewicht hält.

Denkt man sich ein Medium aus lauter nebeneinander liegenden Ketten solcher Elemente zusammengesetzt, so müssen die einzelnen Ketten ähnliche Querdrucke aufeinander ausüben. Gerade sie bezeichnen aber den Weg, den der magnetische Kraftfluss durch das Medium hindurch einschlägt. Aus der Polarisation der einzelnen Elemente ergiebt sich demnach ein Querdruck zu den Kraftlinien.

Man könnte versucht sein, auch den Zug längs der Kraftlinien in ähnlicher Weise zu erklären. Denn wir sehen bei jedem Stabmagneten, wie Kraftlinien auch an dem Stücke entlang von einem Pole zum anderen gehen; die beiden Pole desselben Stückes müssen anziehende Wirkungen aufeinander ausüben. Wenn die Eisenfeilichtketten zwischen

zwei kräftigen Polen sich beim Klopfen zusammenziehen und immer mehr in das Innere des Feldes hineinrücken, so können wir einen Teil dieser Wirkung auf den Verkürzungszug der in der Richtung der Ketten aneinander gereihten polarisierten Teilchen zurückführen.

Doch ist diese Erklärung nur eine scheinbare, da gerade das zu Erklärende, der Kraftlinienzug, schon vorausgesetzt wird. Die Annahme einer Polarisation allein vermag also die Mechanik der Druck- und Zugwirkungen im Felde noch nicht zu erklären. Darum hat man eine weitere Analyse des Vorgangs versucht und hat die später zu besprechenden mechanischen Bilder ersonnen.

105. Paramagnetische und diamagnetische Substanzen. — Nicht alle Substanzen verhalten sich wie das weiche Eisen, dass sie die aus dem Medium der umgebenden Luft an sie herantretenden Magnetkraftlinien verdichten. Wir hatten schon früher (§ 14) diese Erscheinung auf eine grössere Durchlässigkeit des weichen Eisens für Kraftlinien zurückgeführt. Gewisse Substanzen, wie z. B. das Wismut, haben eine geringere magnetische Permeabilität als die umgebende Luft. Vor ihnen weichen die aus der Luft kommenden Kraftlinien aus und nehmen zum grossen Teil ihren Weg durch dieselbe. Man nennt sie „diamagnetische Medien" im Gegensatz zu „paramagnetischen", die sich wie das weiche Eisen verhalten.

Modelle paramagnetischer und diamagnetischer Körper im homogenen Felde. Wir wollen die grössere Permeabilität der paramagnetischen, die geringere der diamagnetischen Substanzen und die dadurch bewirkte Änderung des Kraftlinienverlaufes eines homogenen Feldes durch zwei Modelle illustrieren:

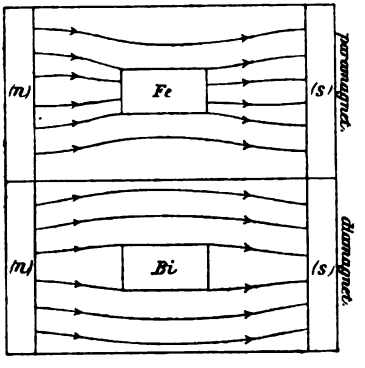


Fig. 32.

Auf zwei rechteckige Bretter von 48 cm Länge und 24 cm Breite (Fig. 32) sind an den Schmalseiten je zwei 2 cm hohe Leisten befestigt, von denen die eine rot, die andere blau angestrichen ist. Sie stellen die Pole *n* und *s* eines Magneten dar. In der Mitte der Bretter sind Holzklötze von etwa 15 cm Länge und 10 cm Breite befestigt. Durch die Randleisten sind Drähte gesteckt, an denen Pfeile im Sinne *n*—*s* angelötet sind; sie stellen die Kraftlinien dar. Am Rande, oben und unten, ziehen sie von einer Leiste zu der gegenüberliegenden direkt hinüber; in der Mitte aber gehen kürzere Drähte zu den Holzklötzen. Alle sind in der aus der Figur ersichtlichen Weise gebogen.

Aus dem Kraftlinienverlaufe Fig. 32 ergiebt sich folgendes:

a) Bei den paramagnetischen Substanzen wie Eisen (Fe), drängen sich die vom Nordpole *n* ausgehenden Kraftlinien gegen den in der Mitte des Feldes liegenden Körper zusammen, nehmen zum

grossen Teile durch diesen ihren Weg und divergieren erst wieder beim Austreten aus dem „Paramagnetikum". Dem n- und s-Pole des Magneten gegenüber entstehen also Sinkstellen und Quellpunkte, d. h. entgegengesetzte Pole. Ist der Körper im Felde drehbar, so sucht ihn der Kraftlinienzug parallel der Verbindungslinie $n—s$ zu stellen: „achsiale", besser „polare Stellung".

b) Bei den diamagnetischen Substanzen wie Wismut (Bi) werden die vom Nordpole ausgehenden Kraftlinien von dem benachbarten Ende des Körpers zurückgedrängt, als wäre hier ein gleichnamiger Pol vorhanden; sie nehmen ihren Weg vornehmlich durch das umgebende Medium, welches sie leichter durchdringen können. Auf der anderen Seite gehen die Kraftlinien wieder zusammen, sowie sie an dem Diamagnetikum vorbei sind, gerade als ob sie hier von einer Sinkstelle angesaugt würden.

Dem n-Pole des Magneten gegenüber scheint ein Quellpunkt, also wieder ein n-Pol aufzutreten, dem s-Pol gegenüber eine Sinkstelle, ein s-Pol. Wenn der Körper drehbar ist, wird ihn also der Kraftlinienquerdruck senkrecht zu der Verbindungslinie $n—s$ zu stellen suchen: „äquatoriale Stellung".

Die polare Stellung der paramagnetischen, die äquatoriale der diamagnetischen Substanzen kann man durch kurze, an dünnen Coconfäden aufgehängte Stäbchen aus dem betreffenden Materiale demonstrieren. Die Erzeugung der dazu nötigen sehr starken Felder werden wir erst im zweiten Abschnitt besprechen.

Das Verhalten der beiden Arten von Substanzen den Kraftlinien gegenüber kann man durch das folgende Beispiel von Flüssigkeitsbewegungen recht anschaulich machen: Ein geradliniger flacher breiter Wassergraben sei dicht mit Schilf bewachsen, so dass der Strömung in dem ganzen Bette ein grosser Widerstand geboten wird. Schachtet man in der Mitte ein rechteckiges Stück aus und entfernt hier alle Hindernisse, so werden sich die Wasserfäden nach dieser Stelle grösserer Permeabilität zusammenziehen wie die Kraftlinien beim weichen Fe (Fig. 32). Stellen sich umgekehrt dem Wasserstrome keine Hindernisse entgegen, und ist nur in der Mitte eine Schilfinsel, so umgehen die Wasserfäden den grösseren Widerstand wie die Kraftlinien das Bi.

Ändert man die Permeabilität des umgebenden Mediums, so muss man demnach den Paramagnetismus eines Körpers in Diamagnetismus überführen können und umgekehrt; man sieht dann den Körper aus der polaren in die äquatoriale Stellung zwischen denselben Polen übergehen.

C) Magnetischer Induktionsfluss.

106. Magnetische Induktion. — Im Inneren eines magnetischen Körpers findet eine Kraftlinienverkettung von Molekül zu Molekül statt. Ist die Magnetisierung eine gleichförmige, so wird diese innere Kraft-

linienströmung durch die Intensität $\mathfrak{J}$ gemessen (§ 99). Befindet sich ein solcher Körper in einem Magnetfelde von der Stärke $\mathfrak{H}$, so lagert sich über die Strömung im Inneren noch der Kraftlinienstrom des äusseren Feldes, der durch die Anzahl Kraftlinien $\mathfrak{H}$ auf den cm^2 gemessen wird.

Wir werden später sehr einfache Hilfsmittel kennen lernen, welche solche Übereinanderlagerungen von Feldern ermöglichen.

Für den magnetischen Zustand ist die Gesamtsumme der Kraftlinien maassgebend. Die wichtige Grösse, welche diese misst, nennt man die magnetische „Induktion". Um ihre Bedeutung möglichst klar hervortreten zu lassen, knüpfen wir an ein einfaches Beispiel an. Gegeben sei ein bis zur Intensität $\mathfrak{J}$ gleichförmig magnetisiertes Toroid. Wir schlitzen es an einer Stelle auf, doch sei die Unterbrechung so schmal, dass die Gleichförmigkeit seiner Magnetisierung darunter nicht leidet. Dann überbrücken nach § 99 $4\pi\mathfrak{J}$ Kraftlinien jeden cm^2 der Lücke; sie setzen sich in gleicher Zahl durch das Innere hindurch fort. Wir lagern über diesen inneren Kraftlinienstrom noch einen durch äussere magnetische Ursachen hervorgerufenen. Derselbe enthalte $\mathfrak{H}$ Kraftlinien auf jedem cm^2, die äussere Feldstärke sei also gleich $\mathfrak{H}$ absoluten Einheiten.

Dann finden wir in der Lücke $4\pi\mathfrak{J} + \mathfrak{H}$ Kraftlinien auf jedem cm^2. Diese Kraftlinienströmung setzt sich in das Innere fort. Der magnetische Zustand ist also durch die Zahl

$$\mathfrak{B} = 4\pi\mathfrak{J} + \mathfrak{H}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

der magnetischen Induktion charakterisiert.

Da alle Substanzen bis zu einem gewissen Grade $\mathfrak{J}$ magnetisierbar sind, so erkennt man, dass diese Grösse $\mathfrak{B}$ eigentlich immer die maassgebende ist; wenn wir bisher die Betrachtungen an die Feldstärke $\mathfrak{H}$ anknüpften, so setzten wir stillschweigend $\mathfrak{J} = 0$, was bei der geringen Magnetisierbarkeit der Luft, die in den meisten Fällen das Feldmedium bildete, gestattet war.

107. Dimension der magnetischen Induktion. — Da der Zahlenfaktor 4π dimensionslos ist, so stellt sich $\mathfrak{B}$ als Summe zweier Grössen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{H}$ dar, welche beide dieselbe Dimension $cm^{-1/2} \cdot gr^{1/2} \cdot sek^{-1}$ (§ 100 und § 70) haben; die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ hat also dieselbe Dimension wie Magnetisierungsintensität einerseits und Feldstärke andererseits. Wenn wir $\mathfrak{B} = 4\pi\mathfrak{J} + \mathfrak{H}$ schrieben, setzten wir voraus, dass die von $\mathfrak{J}$ herrührenden Kraftlinien dieselbe Richtung wie die darüber gelagerten $\mathfrak{H}$ Kraftlinien der äusseren magnetischen Ursachen hatten. Wären sie von entgegengesetzter Richtung gewesen, so hätten

wir $\mathfrak{H}$ abziehen müssen. $\mathfrak{B}$ hat demnach auch einen bestimmten Richtungssinn, gerade wie die Feldstärke $\mathfrak{H}$.

108. Induktionsröhren und Induktionsfluss. — Zeichnen wir Linien, deren Tangentenrichtung in jedem Punkte mit der Richtung der magnetischen Induktion zusammenfällt, so erhalten wir sogenannte „Induktionslinien". Wie bei den Kraftlinien misst die Zahl der durch die Flächeneinheit gehenden Linien die Stärke der Induktion. Jedes von Induktionslinien vollkommen umhüllte röhrenartige Gebilde können wir als „Induktionsröhre" bezeichnen.

Das Produkt von Induktion $\mathfrak{B}$ mal dem Röhrenquerschnitt ω wird nach Analogie des Kraftflusses als „Induktionsfluss" I zu bezeichnen sein $I = \mathfrak{B}\,\omega$. Da wir es nach § 106 immer mit Induktion zu thun haben, so können wir in einem Felde eigentlich nur Induktionsröhren zeichnen, und alle Diagramme des 5. Kapitels sind eigentlich Induktionsflussdiagramme. Nur wenn wir für ein Medium $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ setzen dürfen, geht der Induktionsfluss in den Kraftfluss über; da dies bei schwach magnetisierbaren Substanzen (Luft) möglich ist, durften wir unsere Diagramme als Kraftflussdiagramme bezeichnen. Im allgemeinen ist daher der Induktionsfluss I längs derselben Röhre konstant.

109. Maass der magnetischen Permeabilität. — Die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ bietet ein bequemes Hilfsmittel, um die magnetische Permeabilität ziffermässig auszudrücken. Da $\mathfrak{B}$ die Gesamtzahl von Kraftlinien darstellt, welche die Querschnittseinheit eines in einem Magnetfelde befindlichen Körpers durchsetzt, so giebt das Verhältnis

$$\mu = \mathfrak{B}/\mathfrak{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

ein Maass dafür, wie stark der Körper die Kraftlinien des Feldes $\mathfrak{H}$ zu sich herangezogen und in sich verdichtet hat. Diese Wirkung des Körpers führten wir auf seine grössere Permeabilität zurück. Wir messen sie daher durch das Verhältnis der wirklichen Gesamtzahl $\mathfrak{B}$ der Kraftlinien zu der durch die Flächeneinheit gehenden Linienzahl $\mathfrak{H}$, wie sie auftreten würde, wenn die Substanz nicht in dem Felde vorhanden wäre. Da $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ von derselben Dimension sind, so ist die Permeabilität μ dimensionslos, d. h. eine reine Zahl. Setzen wir sie für das Medium, in dem wir gewöhnlich arbeiten, für Luft gleich 1, so ist

für alle paramagnetischen Substanzen $\mu > 1$,
für alle diamagnetischen Substanzen $\mu < 1$.

Beispielsweise kann für weiches gutes Schmiedeeisen μ Werte bis zu 2000—3000 erreichen, für Wismut dagegen ist $\mu = 0{,}99982$. Für

ein Medium von der Permeabilität $\mu = 1$ geht der Induktionsfluss in den Kraftfluss über, die Induktionsröhren durchschneiden den Feldraum genau so wie die Kraftröhren.

110. Die Susceptibilität. — Wie wir im vorigen Paragraphen die Induktion zur Feldstärke in direkte Beziehung setzten, so empfiehlt es sich für gewisse Betrachtungen die Intensität der Magnetisierung $\mathfrak{J}$ mit der Feldstärke $\mathfrak{H}$ zu vergleichen. Man nennt das Verhältnis von Intensität $\mathfrak{J}$ zu Feldstärke $\mathfrak{H}$ die magnetische „Susceptibilität" $\varkappa$, so dass

$$\varkappa = \mathfrak{J}/\mathfrak{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

ist. Diese Susceptibilität ist also nach unserer Annahme für Luft gleich 0;

für paramagnetische Substanzen ist $\varkappa$ positiv $(\varkappa > 0)$,
für diamagnetische Substanzen ist $\varkappa$ negativ $(\varkappa < 0)$.

Bei weichem Eisen liegt der Wert von $\varkappa$ zwischen 200 und 300. Da $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{H}$ von gleicher Dimension sind, so ist auch $\varkappa$ wie μ eine reine Zahl.

111. Beziehungen zwischen Permeabilität und Susceptibilität. — Da die Permeabilität $\mu = \mathfrak{B}/\mathfrak{H}$, die Susceptibilität $\varkappa = \mathfrak{J}/\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B} = 4\pi\mathfrak{J} + \mathfrak{H}$ ist, so ist

$$\mu\mathfrak{H} = 4\pi\varkappa\mathfrak{H} + \mathfrak{H}$$

oder

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

Umgekehrt ist

$$\varkappa = \frac{\mu - 1}{4\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

Diese Formeln gestatten, die eine der beiden den magnetischen Zustand charakterisierenden Zahlen μ oder $\varkappa$ aus der anderen zu berechnen. Bald ist die eine, bald die andere bequemer zu verwenden.

Beide Grössen μ und $\varkappa$ sind nicht wirkliche Konstanten, sie hängen vielmehr selbst wieder von der Feldstärke $\mathfrak{H}$ ab, so dass dieselbe Substanz im allgemeinen in starken und in schwachen Magnetfeldern etwas andere Permeabilität und Susceptibilität aufweist.

D) Das Grundgesetz des magnetischen Induktionsflusses.

112. Der magnetische Kreis. — Wenn wir oben die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ durch die Summe $\mathfrak{B} = 4\pi\mathfrak{J} + \mathfrak{H}$ definierten, hatten wir eine bestimmte Stelle des Feldes im Auge, an der sich die magnetischen Zustände des inneren Kraftlinienstromes und des äusseren Feldes übereinander lagerten. In vielen, namentlich praktisch wich-

tigen Fällen hat es sich aber als zweckmässiger erwiesen, den in sich zurücklaufenden Kraftlinienstrom als Ganzes zu betrachten. Dies ist möglich, da wir eine Grösse besitzen, welche längs eines Induktionslinienbündels einen konstanten und für dieses charakteristischen Wert besitzt: den Induktionsfluss $I = \mathfrak{B}\omega$. Der Induktionslinienstrom eines Magneten setzt sich in das Innere fort, ohne dass Induktionslinien verloren gehen, noch neue hinzutreten; die Gesamtzahl von Linien (gemessen durch $\mathfrak{B}$) ändert sich nicht. Für die Induktionsröhren gilt — wie für die Kraftröhren im Medium von der Permeabilität 1 —, dasselbe Erhaltungsgesetz in Bezug auf den Induktionsfluss. Es ist allgemeiner als das Gesetz von der Erhaltung des Kraftflusses, da es die Fälle mit umfasst, in denen Medien mit verschiedener Permeabilität μ aneinander grenzen und dadurch Sinkstellen und Quellpunkte auftreten. Wo Induktionsröhren aus einem Medium von geringer Permeabilität, z. B. Luft, in ein solches von hoher Permeabilität, z. B. Eisen oder Stahl übergehen (starke Induktion $\mathfrak{B}$), verengen sie sich, wo sie umgekehrt in ein schwach paramagnetisch oder gar diamagnetisches Medium eintreten (schwache Induktion $\mathfrak{B}$), erweitern sie sich entsprechend. Eine solche Induktionsröhre ist in ihrer ganzen Länge ein in sich zurücklaufender, also ringförmiger Raum mit der Eigenschaft, dass für jeden seiner Querschnitte die Grösse I, der Induktionsfluss, den gleichen Wert hat. Legen wir viele solche Röhren nebeneinander, so erhalten wir sogenannte „magnetische Kreise".

Hufeisenmagnete mit Ankerschliessung, geschlossene und geschlitzte Toroide stellen magnetische Kreise dar. Die die Luftstrecke an der Unterbrechungsstelle der letzteren durchdringenden Kraftlinien setzen sich in das Innere des Toroides fort; hier ist die Induktion sehr viel grösser, da eine hohe Magnetisierung hinzutritt. Die Magnetsysteme der Dynamomaschinen, die Eisenringe und Eisenmäntel der Transformatoren sind andere solche magnetische Kreise.

113. Begriff der magnetomotorischen Kraft. — Es giebt eine Grösse, welche als Maass der magnetisierenden Gesamtwirkung längs einer geschlossenen Induktionsröhre angesehen werden kann. Bewegt sich der Einheitspol + 1 an einer Stelle, wo die Feldstärke $\mathfrak{H}$ Einheiten beträgt, um einen Weg s in der Richtung der magnetischen Kraft vorwärts, so wird von dieser die Arbeit $\mathfrak{H} \times s$ geleistet (Kraft mal Weg). Legt der Einheitspol in der Induktionsröhre neue Wegstrecken in der gleichen Weise zurück, so werden wieder Arbeiten geleistet, welche sich addieren lassen. Hat der Pol einen vollen Umgang durch die Röhre von einem Ausgangspunkt aus bis zu diesem zurück vollendet, so ist eine ganz bestimmte für die Induktionsröhre charakteristische Gesamtarbeit geleistet worden. Man hat sie die „magnetomotorische Kraft" M genannt. Sie ist gleich einer Arbeit bezogen auf

die Polstärke 1, d. h. eine Arbeitsgrösse (Kraft × Weg) dividiert durch eine Polstärke, hat also die Dimension:

$$\dim \mathrm{M} = \frac{\mathrm{cm\,gr\,sek^{-2} \cdot cm}}{\mathrm{cm^{3/2}\,gr^{1/2}\,sek^{-1}}} = \mathrm{cm^{1/2}\,gr^{1/2}\,sek^{-1}}.$$

Man hat es demnach nicht mit einer „Kraft", sondern einer „Arbeits"grösse zu thun; insofern ist die Bezeichnung nicht ganz zutreffend, aber ebenso wie die der entsprechenden elektrischen Grösse (elektromotorische Kraft) eingebürgert.

114. Begriff des magnetischen Widerstandes. — Wir definieren als magnetischen Widerstand ϱ den reciproken Wert der magnetischen Permeabilität oder „Leitfähigkeit", setzen also

$$\varrho = 1/\mu \text{ oder } \varrho = \mathfrak{H}/\mathfrak{B} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 12)$$

Eine Substanz hat einen um so grösseren magnetischen Widerstand, je kleiner ihre Permeabilität ist; für Luft, Papier, Messing ist ϱ gross, für weiches Eisen klein. Wie sehr der Kraftlinienstrom selbst durch dünne Schichten eines Zwischenmittels mit grossem magnetischen Widerstande aufgehalten und dadurch der Kraftlinienschluss in seiner Festigkeit herabgesetzt wird, machen wir uns zunächst an einem mehr qualitativ-quantitativen Versuche klar.

Versuch 50. Vor die Schenkel n und s eines kleinen Hufeisenmagneten (Fig. 33) wird ein halbkreisförmig begrenzter Anker aus weichem Eisen gelegt, welcher unten eine Öse trägt, in welche eine an einem Haken befestigte Wagschale gehängt wird. Ausser diesem undurchbrochenen Anker fertigt man einen anderen von derselben Gestalt und gleichem Gewicht, bei dem nur die beiden äusseren Lappen l_1 und l_2 (Fig. 33) aus Eisen bestehen. In der Mitte ist ein Stück Messing eingelegt; die Messingöse h ist durch zwei Schrauben s_1 und s_2 an l_1 und l_2 befestigt und dient gleichzeitig zum festeren Zusammenhalten der beiden Eisenhälften. Wir haben hier also einen Anker, bei dem in den Weg des durch die stark paramagnetischen Teile l_1 und l_2 hindurchgehenden Kraftlinienstromes ein Körper m von grossem magnetischen Widerstande ϱ eingeschaltet ist: der „durchbrochene Anker". Wir bestimmen die Tragfähigkeit des Hufeisenmagneten a) bei Anhängen des gewöhnlichen Eisenankers; b) des durchbrochenen Ankers; c) wenn eine Papierschicht zwischen Eisenanker und Magnetschenkelenden gelegt wird; d) dasselbe bei dem durchbrochenen Anker.

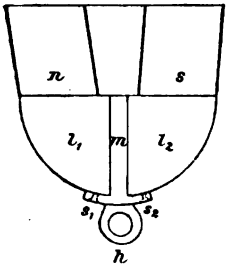


Fig. 33.

Numerisches Beispiel:

Tragfähigkeit eines Hufeisenmagneten.

a) 2,220 kg nebst 20 gr, d. i. das Gewicht des Ankers und der Wagschale;
b) 0,580 kg, nur etwa $^1/_4$ der vorigen;
c) 1,100 kg, etwa die Hälfte wie in a);
d) 0,190 kg, nur $^1/_{12}$ der normalen Tragfähigkeit.

Die Tragfähigkeit ist nicht der Kraftlinienzahl proportional; der Versuch lässt aber immerhin die starke Abnahme des Induktionsflusses bei gleich bleibender magnetomotorischer Kraft (der Schenkelpole) erkennen, wenn der Widerstand im Kreise wächst.

Der Widerstand, den ein Stück eines magnetischen Kreises von geringerer Permeabilität in diesen hineinbringt, ist um so grösser, je länger der schlecht leitende Teil, um so geringer, je grösser sein Querschnitt ist; denn bei grossem Querschnitt kann sich derselbe Induktionsfluss über eine grosse Fläche verbreiten; das schwer zu magnetisierende Stück wird weniger auf Magnetisierung in Anspruch genommen, als wenn der ganze Kraftlinienstrom auf einen sehr kleinen Querschnitt zusammengedrängt würde. Bezeichnen wir mit ϱ_0 einen für das Material charakteristischen Faktor, die Länge des Stückes mit l und mit ω seinen Querschnitt, so können wir den magnetischen Widerstand

$$w = \varrho_0 \frac{l}{\omega} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 13)$$

setzen. ϱ_0 ist der Widerstand eines Würfels aus dem betreffenden Material von 1 cm Länge bei 1 cm² Querschnitt.

Man nennt diese Grösse ϱ_0 den „spezifischen magnetischen Widerstand". Sind mehrere Teile von den Einzelwiderständen $w_1, w_2, w_3 \ldots$ zu einem magnetischen Kreise vereinigt, so ist der Gesamtwiderstand des ganzen Kreises

$$W = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots \ldots \ldots \quad 13,a)$$

115. Grundgesetz des magnetischen Kreises. — Ist längs eines aus Induktionsröhren gebildeten magnetischen Kreises die magnetomotorische Kraft M und der Widerstand auf dem ganzen Wege W, so ist der Induktionsfluss I durch das Verhältnis der beiden Grössen M und W bestimmt.

Der Induktionsfluss I, d. h. der gesamte Kraftlinienstrom innerhalb einer Induktionsröhre ist gleich der magnetomotorischen Kraft M, dividiert durch den gesamten magnetischen Widerstand W, welchen der geschlossene Kraftlinienstrom vorfindet:

$$I = \frac{M}{W} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 14)$$

Dieses Gesetz wurde von I. und E. Hopkinson und G. Kapp 1886 formuliert. Es bildet ein Analogon zum sogenannten Ohmschen Gesetze in der Elektricitätslehre. Während aber bei diesem der Widerstand eine wirkliche Konstante ist, so muss nach § 111 der magnetische Widerstand $\varrho = 1/\mu$ als Funktion der Feldstärke angesehen werden.

E) Die Energetik der magnetischen Kraftfelder.

116. Magnetisierungsarbeit. — Bei dem Magnetisieren eines Stahlstückes muss eine gewisse Menge von Energie aufgewendet werden, die wir im einfachsten Falle durch das Produkt von Kraft und Weg messen.

Wird bei den Strichmethoden der magnetisierende Stab parallel mit sich selbst über ein Stück Stahl hingeführt, so findet, sowie sich Pole an diesem ausbilden, ein teilweiser Kraftlinienschluss statt. Wenn beim Streichen sich die Höhe des Schwerpunktes des bewegten Stabes auch nicht ändert und wir von den Reibungskräften, die zu überwinden sind, absehen, so muss doch gegen die Zug- und Druckwirkungen der Kraftlinien selbst eine Arbeit geleistet werden. Magnetisieren wir mit dem N-Pole, so erfordert das Wegziehen von dem an einem Ende hervorgerufenen s-Pole und, nach Überschreiten der Mitte, das Annähern an den n-Pol eine Arbeit.

Das Magnetisieren beruht darauf, dass in einen Stahlstab eine gewisse Menge von Energie einer besonderen Form hineingegeben wird.

Die dazu erforderliche Arbeit nennt man die „Magnetisierungsarbeit". Durch diese verändert sich die wägbare Masse des Stahlstabes nicht (§ 20).

Nach dem Prinzip von der Erhaltung der Energie geht bei dieser Übertragung nichts verloren. Die übertragene Energie bleibt so lange dauernd an der Stahlmasse haften, als sie sich nicht in andere Energieformen verwandelt.

Beim abwechselnden Magnetisieren in dem einen und dem anderen Sinne, beim „Ummagnetisieren", wird der magnetisierte Körper warm. Ein erheblicher Teil der Magnetisierungsarbeit verwandelt sich in Wärmeenergie.

117. Lokalisierung der Feldenergie. — Die zur Magnetisierung verwendete Energie wird zum Teil zu Umlagerungen der Moleküle verwendet, die sich zu den Ketten zusammenschliessen, welche das Innere eines magnetischen Körpers vor dem des unmagnetischen auszeichnen. Ein anderer Teil der Magnetisierungsarbeit ist in dem Felde des Magneten aufgespeichert. Der Aussenraum eines Magneten ist an einem Polende für das Feld des gleichnamigen Poles eines anderen Magneten in gewissem Grade undurchdringlich.

Undurchdringlichkeit ist der Ausdruck für das Vorhandensein von Volumenenergie. Wir müssen uns die magnetische Energie in den einzelnen Raumelementen eines Magnetfeldes lokalisiert denken.

Daselbst bestehen Druck- und Zugspannungen, die wir direkt nachweisen können (Quincke). Das optische Verhalten der Feldmedien ist geändert, alles Anzeichen dafür, dass in den einzelnen Elementen derselben besondere Energien Platz gegriffen haben.

118. Mechanisches Beispiel der Energielokalisation. — An einem elastischen Drahte sei eine im Vergleich zu seinem Eigengewichte

grosse Last p angehängt; durch dieselbe wird der Draht um eine dem Gewicht p proportionale Länge l gedehnt $p = \varepsilon l$. Der (innerhalb weiter Grenzen) konstante Faktor ε hängt von dem Material, der Länge und dem Querschnitt des Drahtes, also von der besonderen Beschaffenheit des Mediums, welches als Energieträger dienen soll, ab. Um den Draht um weitere dl cm zu dehnen, ist eine Teilarbeit dA = Kraft $\times$ Weg $= p \cdot dl = \varepsilon l \cdot dl$ aufzuwenden, also ein Betrag, der sowohl von dl wie von l selbst abhängt. Der zu einer bestimmten Vermehrung der Längendehnung dl erforderliche Arbeitsaufwand dA ist um so grösser, je stärker die bereits verwendete Kraft p ist. Der bei einem gewissen Dehnungszustande des Drahtes in ihm vorhandene Arbeitsvorrat ist proportional dem Quadrate von l. Denn aus der Formel für dA folgt

$$A = \frac{1}{2} \varepsilon l^2,$$

da für $l = o$ keine Dehnungsenergie in dem Drahte aufgespeichert ist; l bestimmt also den im Drahte lokalisierten Betrag der elastischen Energie.

Wir können dA in zweierlei Weise in Faktoren zerlegen:

$$dA = \varepsilon l \cdot dl \text{ und } dA = l \cdot d(\varepsilon l).$$

Ebenso kann A geschrieben werden:

$$A = \varepsilon \cdot \frac{l^2}{2} \text{ und } A = (\varepsilon l) \cdot \frac{l}{2}.$$

Jede Energieart hat die Eigentümlichkeit, aus zwei Faktoren zu bestehen. Die Zerlegung $A = (\varepsilon l) \cdot l/2$ hat den Nachteil, dass die beiden Faktoren nicht unabhängig von einander sind.

119. Das Maass der magnetischen Feldenergie. — Dass bei dem Anhäufen magnetischer Energie in einem Felde etwas Ähnliches wie in dem im § 118 zur Erläuterung herangezogenen Beispiele stattfindet, lassen unsere Kraftlinienbilder, die Deformationen, welche sie durch Hineinbringen eines Poles, z. B. des Einheitspoles erleiden, und die von uns konstatierten Druck- und Zugwirkungen im Felde erkennen. Da ein Pol in einem Felde eine um so grössere Druckwirkung (Kraft in Dynen) erfährt, je dichter die Kraftlinien verlaufen, d. h. je grösser die Feldstärke $\mathfrak{H}$ ist, so ist das Hineinbringen neuer Kraftlinien und damit neuer Energie in ein Feld um so schwerer, je mehr die Feldstärke bereits angewachsen ist.

$\mathfrak{H}$ sei die mittlere Stärke eines beschränkten Raumes, z. B. eines Kubikcentimeters des Feldes, dessen Endflächen senkrecht zu den Kraftlinien in 1 cm Entfernung voneinander stehen; das Feld sei an der betrachteten Stelle so nahe homogen, dass durch jeden cm^2 innerhalb des

Würfelraumes, welcher senkrecht zur magnetischen Kraft steht, $\mathfrak{H}$ Kraftlinien gehen; die Permeabilität sei zunächst gleich 1.

Wollen wir einen Pol von der Stärke m in diesen Raum hineinbringen, so müsste derselbe noch $4\pi m$ neue Kraftlinien aufnehmen. Im allgemeinen wird dieser Zuwachs der Feldstärke so gross sein, dass von den schon vorhandenen Kraftlinien einige herausgedrängt werden. Fig. 30 auf Tafel I stellt uns dies anschaulich dar. Wird in das homogene Feld von oben her der Nordpol $+N$ gegen die Wirkung der Kraftlinien hereingebracht, so werden Kraftlinien selbst noch aus dem von der Figur umfassten Raume herausgedrängt. Erst in weiter Ferne wird das Vorhandensein des Poles $+N$ unmerklich.

Man kann sich aber auch umgekehrt die Stärke des Poles so klein denken, dass das ursprüngliche Feld nur unmerklich deformiert wird, und jedenfalls schon ausserhalb des ihn unmittelbar umschliessenden Raumes von 1 cm³ der Zustand wieder der ursprüngliche ist. Bezeichnet dann $d\mathfrak{H}$ die durch diesen Pol hinzugebrachte Kraftlinienzahl, also $d\mathfrak{H}/4\pi$ seine Polstärke, so ist $\mathfrak{H}\cdot d\mathfrak{H}/4\pi$ die dem Eindringen widerstrebende Kraft (in Dyne). Wenn wir den Pol um 1 cm gegen die Feldkraftlinien voranschieben, so sind dann seine Linien sämtlich mit in den betrachteten Raum aufgenommen. Wir haben dabei den Angriffspunkt der den Pol zurücktreibenden Kraft von einer Stelle unmittelbar vor dem betrachteten cm³ bis zu einem Punkte vor der gegenüberliegenden Innenwand verschoben. Die erforderliche Arbeit ist daher $dA = \mathfrak{H}\cdot d\mathfrak{H}/4\pi\cdot 1$. Um diesen Betrag hat sich die Energie an der betrachteten Feldstelle in dem Raume von 1 cm³ vermehrt. Ist die Permeabilität des Mediums nicht gleich 1, sondern gleich μ, z. B. grösser, so ist die Aufnahmefähigkeit des betrachteten Feldteiles μ mal so gross, d. h. die bei derselben Leistung aufzuwendende Arbeit μ mal kleiner

$$\frac{dA}{\mu} = \mathfrak{H}\cdot\frac{d\mathfrak{H}}{4\pi},$$

oder es ist für den allgemeinen Fall

$$dA = \frac{\mu}{4\pi}\,\mathfrak{H}\cdot d\mathfrak{H},$$

oder da $\mu\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ ist (§ 109),

$$dA = \frac{1}{4\pi}\,\mathfrak{B}\cdot d\mathfrak{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15)$$

So lange μ als konstant angesehen werden darf (bei schwachen magnetisierenden Kräften und zuvor nicht magnetisiertem Medium) kann man auch schreiben:

$$dA = \frac{1}{4\pi}\,\mathfrak{H}\cdot d(\mu\mathfrak{H}) = \frac{1}{4\pi}\,\mathfrak{H}\cdot d\mathfrak{B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16)$$

Ähnlich ergeben sich auch für den Energievorrat pro cm^3 A selbst die Formeln:

$$A = \frac{1}{8\pi}\,\mu\,\mathfrak{H}^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 17)$$

$$A = \frac{1}{8\pi}\cdot\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{H}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 18)$$

Die Ausdrücke für die beiden hier und in § 118 betrachteten Energieformen haben Ähnlichkeit mit denen der kinetischen Energie einer mit der Geschwindigkeit v in einer bestimmten Richtung bewegten Masse m:

$$K = m\cdot\frac{v^2}{2} \text{ oder } K = m\,v\cdot\frac{v}{2}.$$

Die Analogie ist aber nur eine formale. Ebensowenig, wie man die in einem gedehnten Körper aufgehäufte Energie als kinetische bezeichnen wird, ist ohne weiteres zu folgern, dass die in einem Magnetfelde aufgehäufte Energie von der Form der genannten „mechanischen“ Energie sei.

7. Kapitel.

Kinetische und mechanische Theorien der Kraftfelder.

Die Wirkung, welche ein Pol in einem Magnetfelde erfährt, ist durch drei Bestimmungsstücke ausgezeichnet: Richtung, Sinn und Grösse. Wir haben daher oben (§ 31) die magnetische Kraft geometrisch durch einen „Vektor" dargestellt; ein Magnetfeld ist durch eine Schar von Vektoren bestimmt. Es entsteht die Frage: Können wir nichts Näheres über die Zustände von vektoriellem Charakter, welche in den einzelnen Punkten eines magnetisierten Mediums bestehen, angeben; giebt es im speziellen nicht einfache Bewegungsvorgänge von demselben Charakter? Die letztere Fragestellung wurde besonders durch jene Richtung naturwissenschaftlicher Erkenntnis nahe gelegt, welche oft mit grossem Erfolge Erscheinungen wie z. B. die von Licht und Wärme, welche ältere Theorien mit Hilfe hypothetischer Fluida zu erklären versuchten, durch Bewegungsvorgänge darstellten. Die kinetischen und die sich an sie anschliessenden mechanischen Theorien haben eine grosse, namentlich heuristische Bedeutung gewonnen; wir wollen die wichtigsten, welche für unser Gebiet aufgestellt wurden, entwickeln. Dabei müssen wir die Beschreibung von rein Thatsächlichem verlassen und notgedrungen mehr oder weniger hypothetische Elemente mit in die Darstellung aufnehmen.

A) Die Symmetrieeigenschaften der magnetischen Felder.

Bei dem Versuche, in den magnetischen Eigenschaften gewisse, aus der Mechanik bekannte Vorgänge wiederzuerkennen, giebt uns die Natur eine Reihe von Thatsachen an die Hand, welche ziemlich eindeutig die Art dieser Vorgänge bestimmen und Unsicherheiten bei der Wahl des mechanischen Bildes ausschliessen. Wir haben wie der Mineraloge zu verfahren, welcher aus den Eigenschaften eines Krystalls auf die Struktur seines Inneren schliesst. Auch bei Magnetfeldern

giebt es Erscheinungen, welche nur durch eine bestimmte Symmetrie des dieselben tragenden Mediums erklärbar sind; die Zustände in den einzelnen Elementen müssen diesen Symmetrieverhältnissen entsprechen (CURIE).

120. Der achsiale Charakter der Magnetkraftlinien. — Die einfachste Vektorgrösse ist die der Überführung, Translation einer kleinen Masse von einem Raumpunkte in einen anderen in bestimmter Richtung um eine gewisse Strecke. Wir begegnen ihr bei allen Strömungserscheinungen und könnten uns daher den Vektorcharakter der gerichteten Zustände eines Magnetfeldes durch Strömungen längs der Kraftlinien desselben hervorgebracht denken. Wir haben vielfach Bezeichnungen gebraucht, welche an dieses Bild anknüpften, haben aber wiederholt darauf hingewiesen, dass dieses „Strömen der Kraftlinien" eben nur ein Bild sei. Gewisse Erscheinungen lassen uns erkennen, dass wir mit diesen einfachsten Vektorgrössen nicht ausreichen, sondern Vektoren anderer Natur zur Erklärung heranziehen müssen. So zeigt sich z. B., dass die Polarisationsebene geradlinig polarisierten Lichtes gedreht wird, wenn wir den Lichtstrahl den Kraftlinien eines magnetisierten Mediums entlang schicken (FARADAY). Hieraus zog schon 1856 Sir WILLIAM THOMSON (Lord KELVIN) den Schluss, dass längs der Magnetkraftlinien ein Zustand bestehen müsse, welcher kinematisch mit dem längs einer Achse vergleichbar ist. In der That hat die Achsendrehung ebenfalls vektoriellen Charakter. Die Richtung der Drehungsachse bestimmt die Vektorrichtung, der Drehungssinn entscheidet darüber, ob der Vektor hin oder her zu durchlaufen ist; die Drehungsgeschwindigkeit endlich kann durch die Maasszahl der Längeneinheiten, welche wir dem Vektor geben, ausgedrückt werden. Wir können also auch sagen: Die magnetischen Kräfte haben die Symmetrieeigenschaften einer Winkelgeschwindigkeit. Drehungen verhalten sich Spiegelungen gegenüber anders als die zuerst betrachteten Vektorgrössen der einfachen Translation, die wir durch Pfeile symbolisch darstellten. Dass etwas Ähnliches auch für Magnetfelder gilt, wollen wir bei den besonderen Formen derselben zeigen, welche wir im II. Abschnitt besprechen. F. KOLÁČEK, dem wir die sehr treffende Bezeichnung „achsialer Charakter der Magnetkraftlinien" verdanken, zieht zum Beweise, dass sich um die Kraftlinien als Achse etwas drehen müsse, das gleichfalls erst später zu besprechende, sogenannte HALLsche Phänomen heran.

121. Drehungsvektoren. — Liegt den magnetischen Erscheinungen etwas zu Grunde, was als Bewegung aufgefasst, die Form einer Drehbewegung hat, so muss einem bestimmten Drehungssinn ein bestimmter

Sinn der Kraftlinienrichtung eindeutig zugeordnet sein. Bezüglich des letzteren hatten wir bereits früher (§ 28) eine Festsetzung getroffen; dieselbe zieht daher notwendig eine solche für den Drehungssinn nach sich:

Um eine Kraftlinie erfolge eine Drehung in dem Sinne, dass einem die Linie in positiver Richtung (von *N*- nach *S*-Pol) entlang blickenden Auge die Drehung im Uhrzeigersinne erscheint.

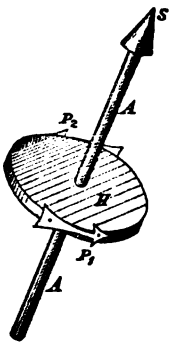


Fig. 34.

Die Zweckmässigkeit dieser Voraussetzung wird sich erst im II. Abschnitt ergeben.

Modell: Um sich in späteren Fällen immer leicht das hier festgesetzte gegenseitige Verhältnis von Drehungssinn und Kraftlinienrichtung anschaulich zu machen, fertigt man sich am besten ein kleines Modell (Fig. 34) an:

Der runde Stab *A* trägt oben eine Spitze *S* und in der Mitte eine Holzscheibe *H*, an deren Rand zwei Pfeile P_1 und P_2 aus Weissblech befestigt sind; blickt man längs *A A* in der Richtung des Pfeiles *S* (Kraftlinienrichtung), so scheint die durch P_1 und P_2 angezeigte Drehung der von unten gesehenen Scheibe *H* im Uhrzeigersinne zu erfolgen.

(Drehung der Weinranke beim Emporklettern am Stabe; daher „wein-gleich rechtswendige" Drehung.)

122. Prinzip von der Koexistenz elementarer Bewegungen. — Um zu erkennen, in welcher Weise sich die Verhältnisse gestalten, wenn wir zwei Magnetfelder, z. B. die zweier Magnetstäbe, einander superponieren, ziehen wir ein sehr einfaches, in der Physik vielfach gebrauchtes und stets sich bewährendes Prinzip heran, welches für unseren Fall lautet:

Wenn das eine Feld an einer Stelle des Raumes eine bestimmte Drehbewegung anstrebt und ein zweites Feld an derselben Stelle eine andere, so resultiert in dem ergriffenen Medium eine Bewegung, welche der unverkürzten Zusammenwirkung beider Einzelbewegungen entspricht.

Ein ähnliches Prinzip benutzt die Wellenlehre, Akustik und Optik; es sagt aus, dass verschiedene Wellenzüge in demselben Medium koexistieren können.

Sind beide von einem Punkte ausgehenden Drehungsvektoren gleich gerichtet, so ist die Resultierende gleich der Summe der beiden einzelnen Vektoren. In allen anderen Fällen vereinigen sie sich zu einer in bestimmter Richtung liegenden resultierenden Drehbewegung, deren Grösse nach folgender Konstruktion leicht angebbar ist.

123. Zusammensetzung von Drehbewegungen; das Parallelogramm der Drehungsvektoren. — Da jede Drehbewegung durch einen Vektor nach Richtung, Sinn und Grösse dargestellt wird, so wird das Zu-

sammentreffen zweier Drehungen an einem Feldpunkte durch zwei von diesem Punkte ausgehende Strecken geometrisch beschrieben. Repräsentieren diese durch die Maasszahl ihrer Länge, ihre Richtung und den vom Feldpunkte aus gerechneten Sinn die beiden Drehungsvektoren, so wird die resultierende Drehbewegung durch die Diagonale des aus den beiden Strecken herzustellenden Parallelogramms dargestellt. Ist also in Fig. 35 q_1 ein Drehungsvektor des einen Magnetfeldes, q_2 der eines anderen an dem gemeinsamen Punkte sich überlagernden zweiten Feldes, so ist Ω die Diagonale in dem Parallelogramm, welches q_1 und q_2 als Seiten hat; dieselbe besitzt Richtung, Grösse und Sinn; sie kann wiederum als Drehungsvektor aufgefasst werden. Derselbe stellt eine Drehbewegung dar, welche die beiden zusammentreffenden Antriebe q_1 und q_2 gerade ersetzt.

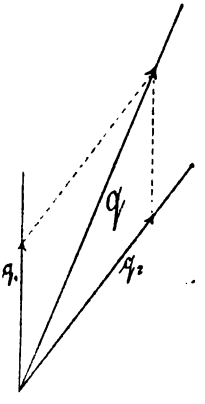


Fig. 35.

Der Beweis dieses kinematischen Satzes wird schon in den elementaren Lehrbüchern in den verschiedensten Formen gegeben. Am einfachsten überzeugt man sich von seiner Richtigkeit, wenn man die Bewegung eines beliebigen Punktes bei einer kleinen Drehung um jede der drei Achsen betrachtet.

Fallen beide Vektoren q_1 und q_2 in dieselbe Richtung, so ist die Diagonale bei gleichem Sinne gleich der Summe, bei entgegengesetztem Sinne gleich der Differenz der beiden Vektoren. Wir entnehmen daraus die einfache Regel:

Wo sich gleichgerichtete Kraftlinien übereinander lagern, und daraus neue Kraftlinien hervorgehen, werden die Drehbewegungen verstärkt, wo sich entgegengesetzte superponieren, werden die Drehungsgeschwindigkeiten vermindert. Bilden die ursprünglichen Kraftlinienrichtungen Winkel miteinander, so ergiebt der Satz von dem Parallelogramm der Drehbewegungen die im 5. Kapitel vielfach angewendete Zeichnungsregel zusammengesetzter Kraftfelder.

124. Begriff der Dauerbewegungen. — Wenn wirklich um jede Kraftlinie als Achse eine Drehbewegung stattfindet, so entsteht scheinbar eine Schwierigkeit für die Erklärung dadurch, dass diese Bewegung so lange ungeschwächt andauern müsste, als die durch sie dargestellte magnetische Kraft ihren Wert ungeändert beibehält. Wenn auch Magnetstäbe mit freien, Kraftlinien streuenden Enden relativ schnell ihren Magnetismus verlieren, so können doch geschlossene magnetische Kreise (Hufeisenmagnete mit Ankerschluss) Jahre lang sich auf nahe derselben Magnetisierungsintensität erhalten. Hier müssten die Drehbewegungen ohne Geschwindigkeitsverlust dauernd bestehen. Dies

scheint unseren Erfahrungen zu widersprechen, denen zufolge jede Bewegung durch Reibung allmählich vernichtet wird, wenn wir sie nicht immer wieder von neuem anregen. Indessen erwächst hieraus kein entscheidender Grund gegen das Vorhandensein der genannten Feldbewegungen, wenn wir auf die besondere Natur derselben Rücksicht nehmen. Wir bemerken allerdings täglich, dass die kinetische Energie bewegter, endlicher, ausgedehnter Massen durch Reibungswiderstände in andere Energieformen, hauptsächlich die der Wärme übergeht, und dabei der Intensitätsfaktor dieser Energie, die Geschwindigkeit, eine entsprechende Verminderung erfährt.

Die mechanische Wärmetheorie führt die Wärmeerscheinungen auf Bewegungen der kleinsten Teilchen, der Moleküle, zurück. Wenn wir auch die Transformation von Bewegungsenergie endlicher Massen in Wärme durch die Reibung überall beobachten, so braucht doch in der Welt der Moleküle eine ähnliche Transformation nicht mehr stattzufinden; man hat sich immer die „Molekularbewegungen" als reibungslos denken können, ohne mit Erfahrungsthatsachen in Widerspruch zu geraten. Die MAXWELLschen Drehbewegungen sind an die kleinsten Teilchen gebunden. Wir können diesen demnach sehr wohl der Reibung nicht mehr unterworfene „Dauerbewegungen" um Achsen zuschreiben.

Aus der Annahme solcher Drehbewegungen hat RICHARZ neuerdings mit Glück die magnetischen Eigenschaften des Eisens hergeleitet, indem er dabei von den Erscheinungen der elektrischen Valenzladungen ausging. Die begriffliche Schwierigkeit bei der Einführung solcher unendlich lang andauernder Bewegungen ist nicht grösser als die anderer Vorstellungen, mit denen wir vielfach operieren. So führt man gewisse Eigenschaften der Krystalle, ungleichmässig gekühlter Gläser oder dünnflüssiger Laven auf Spannungszustände zurück, welche sich in diesen Körpern durch Jahrtausende hindurch erhalten, obgleich die Molekularbewegungen der Wärme jene Spannungen längst ausgeglichen haben müssten. Für uns geben die Himmelskörper ein Beispiel lang andauernder Bewegungen.

Achsiale Bewegungen, wie wir sie hier im Felde annehmen, haben besondere Stabilitätseigenschaften, wie schon die einfachen Kreiselbewegungen zeigen (Gesetz der freien Achsen). Solche in sich zurücklaufende Bewegungen, „cyklische Bewegungen", wie sie H. VON HELMHOLTZ treffend nennt, können ihren Trägern eine gewisse Festigkeit verleihen, die diese sonst nicht haben. Lord KELVIN hat dies durch sinnreiche Modelle erläutert und gezeigt, dass ein System von Kreiselbewegungen geradezu Eigenschaften besitzen kann, welche von den elastischen fester Körper gar nicht zu unterscheiden sind.

„Dauerbewegungen als scheinbare Substanzen," lautete der Titel eines Vortrages, den der Altmeister VON HELMHOLTZ für die Naturforscher-Versammlung zu Nürnberg im Jahre 1893 angekündigt hatte, der aber leider nicht gehalten wurde. Im Nachlasse fand sich nur die Einleitung zu demselben vor; der Verfasser ist so glücklich, gesprächsweise erfahren zu haben, dass die eigen-

tümlichen Erhaltungseigenschaften der „cyklischen Bewegungen", von denen von Helmholtz selbst schon früher die Wirbelbewegungen behandelt hatte, den Gegenstand des Vortrages bilden sollten; vergl. weiter unten unter C) und D).

Bisher fehlt uns noch jedes Mittel, uns direkt von dem Vorhandensein der elementaren Drehbewegungen in den Magnetfeldern zu überzeugen; sie gehören zu der Klasse der sogenannten „verborgenen Bewegungen" (von Helmholtz), welche in den Prinzipien der Mechanik von Heinrich Hertz eine hervorragende Rolle spielen.

Die in diesem Werke nur andeutungsweise gegebene höchst bedeutungsvolle kinetische Theorie der elektromagnetischen und elektrodynamischen Felderscheinungen wird im II. Teile des Buches ausführlich zur Darstellung gebracht werden.

B) Mechanische Interpretation der dynamischen Erscheinungen der Magnetkraftlinien.

Wenn sich ein Magnetfeld wie ein von Drehbewegungen der kleinsten Teilchen erfüllter Raum verhält, so liegt es nahe, die Druck- und Zugwirkungen in demselben aus der Mechanik dieser Bewegungen zu erklären. Dazu müssen wir den Einzelbewegungen eine gewisse Menge von Energie, d. h. ihren Trägern Masse oder eine bestimmte „Trägheit" zuschreiben. Wir kommen so zu Maxwells Wirbeltheorie. Die Annahme der Maxwellschen Molekularwirbel hat zu Werten der Dichte des bewegten Mediums geführt, die mit den aus anderen Erscheinungen gefolgerten in guter Übereinstimmung stehen (Grätz). Wir wollen zeigen, wie die Anwendung der Centrifugalgesetze auf die Drehbewegungen qualitativ die ponderomotorischen Wirkungen im Felde ergeben; die strenge Maxwellsche Ableitung (1861) folgt im zweiten Teile.

125. Druck- und Zugspannungen eines rotierenden Elementes. — Dass bei Rotationsbewegungen Zugspannungen längs der Achse, welche eine Verkürzung, und Druckspannungen quer dazu, welche eine Querschnittsvergrösserung anstreben, auftreten, möge zunächst an einem Modelle erläutert werden, das wir uns als Element einer Kraftröhre denken können (Ol. Lodge).

An der unteren Fläche des horizontalen Grundbrettes C (Fig. 36) einer Centrifugalmaschine ist die Rolle r um eine vertikale Achse leicht drehbar; sie wird durch den Schnurlauf L von der grossen (rechts ausserhalb der Figur gelegenen) Antriebsscheibe in rasche Rotation versetzt. An der Rollenachse ist mittels der Flügelschraube F eine in der Figur schraffiert gezeichnete elastische cylindrische Trommel befestigt. Dieselbe besteht aus zwei kreisförmigen Holzdeckeln D, D, über welche das dickwandige Gummirohr G gezogen ist. An $D\,D$ ist der übergeschobene Gummimantel durch die Drähte s_1 und s_2 befestigt. Der obere Deckel enthält zwei durch Korke $K\,K$ geschlossene Durchbohrungen, der untere den achsialen Führungsstift A. Der letztere dreht sich in einer Bohrung des festliegenden Halters H. An dem unteren Ende e der Achse A können Gewichte an-

gehängt werden. Durch die Öffnungen im Deckel wird, wenn die Trommel sehr dickwandig und in kleinem Maassstabe ausgeführt ist, Quecksilber, sonst, namentlich bei grösseren Dimensionen (12 cm Höhe, 10 cm Durchmesser) Glycerin, eingefüllt.

Wird das mit Flüssigkeit gefüllte cylindrische Element G (Fig. 36) in Rotation um seine Achse A versetzt, so bauchen sich seine elastischen Wände aus. Dabei verkürzt es sich, so dass der Boden scheinbar vom Deckel angezogen wird. Die Verkürzungstendenz ist so gross, dass erhebliche an e angehängte Gewichte mit emporgehoben werden; gleichzeitig findet ein Druck quer zur Achse gegen die Gefässwände statt. Denken wir uns viele solche Cylinder dicht nebeneinander rotierend, so würden sie sich gegenseitig zurückdrängen: „Verkürzungszug längs, Druckwirkung quer zu den Kraftlinien".

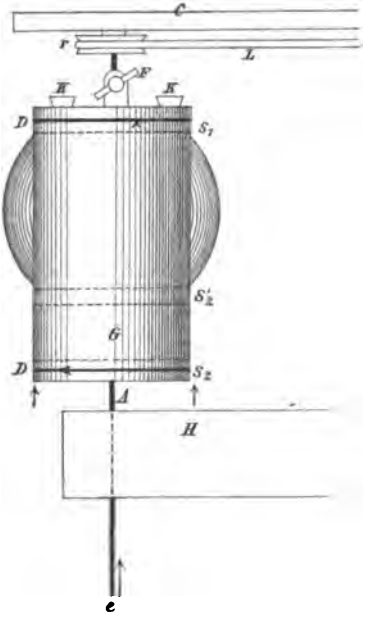


Fig. 36.

Dieses Modell giebt ein instruktives Beispiel dafür, wie durch einen Bewegungsmechanismus eine scheinbare Fernewirkung zu stande kommen kann; die vermittelnden Bewegungen selbst sind uns „verborgen". Wir können das Modell als „gyroskopisches Kraftröhrenmodell" bezeichnen. Die in ihm enthaltene kinetische Energie ist in jedem Augenblick dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{q}$ proportional (vergl. weiter unten in D); das Gleiche gilt nach § 119 von $\mathfrak{H}$ in Bezug auf die magnetische Feldenergie; also können wir die Feldstärke $\mathfrak{H}$ wirklich mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{q}$ in Parallele stellen.

126. Erklärung der ponderomotorischen Wirkungen der Magnete durch die Annahme der Dauerbewegungen. — Wir denken uns ein Magnetfeld vollkommen von den in sich zurücklaufenden Bewegungen erfüllt. Dass ein solcher Bewegungsmechanismus möglich ist, ohne dass sich die Einzelbewegungen gegenseitig stören, zeigen die Wirbelerscheinungen (vergl. weiter unten unter C).

Lagern sich zwei Felder übereinander, so wachsen mit den Drehungsgeschwindigkeiten die Zugkräfte längs und die Druckkräfte quer zu den Kraftlinien. Ist der Träger des einen Systems fest, der des anderen beweglich, so erfährt letzterer ponderomotorische Wirkungen.

α) Verhalten eines Nordpoles in einem magnetischen Felde. Fig. 37 stelle einen Schnitt durch ein beliebiges festliegendes Kraftlinienfeld dar; der Sinn desselben sei der des Pfeiles, welcher jeder Kraftlinie beigeschrieben ist;

wir haben uns also unten einen Nordpol, aus dem die Kraftlinien entspringen, oben einen Südpol zu denken, in den sie einmünden. In diesem Felde befinde sich ein Nordpol *n*. Er wirkt als Quellpunkt neuer Kraftlinien, welche allseitig von ihm ausstrahlen. Acht derselben sind in der Figur gezeichnet; bei *v* verlaufen sie gleichsinnig mit denen des festliegenden Feldes. Hier verstärken sich die magnetischen Wirkungen, welche sich additiv übereinander lagern: es erhöht sich also die Feldenergie, ebenso wächst die Zugkraft längs der Kraftlinien.

Bei *h* laufen die Linien des Poles gegen die des Feldes an, so dass dessen Energie herabgedrückt, die Zugkraft vermindert wird. Dadurch wird der Pol nach *v*, d. h. nach vorn, im Sinne der Kraftlinien des Feldes gezogen.

Ein in ein Magnetfeld mit feststehendem Träger getauchter magnetischer Nordpol erfährt einen Bewegungsantrieb im Sinne der Kraftlinien des Feldes.

Die seitlich austretenden Kraftlinien verstärken diese Wirkung; alle nach vorn gerichteten Linien von *n* vereinigen ihren Zug mit dem der Feldkraftlinien, alle nach hinten auslaufenden stemmen sich gegen die ihnen entgegen fliessenden (vergl. Fig. 30). In der Fig. 37 ist diese Bewegungstendenz durch einen dick ausgezeichneten kurzen Pfeil angedeutet. Wird der Pol in dieser Bewegung gehemmt, so entsteht ein Druck wie bei einer am Fallen gehinderten Masse im Felde der Erdschwere.

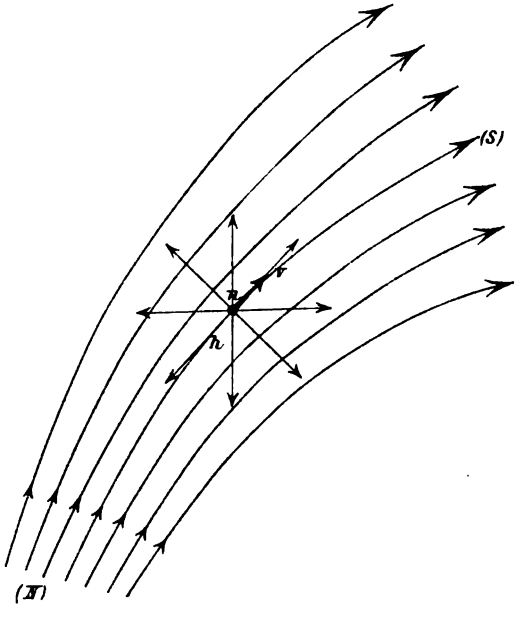


Fig. 37.

β) Verhalten eines Südpoles in einem magnetischen Felde. Bringen wir in dasselbe feststehende magnetische Feld einen Südpol *s* (Fig. 38), so müssen genau die umgekehrten Wirkungen auftreten. Denn ein solcher macht sich als Sinkstelle geltend, er sendet nicht Kraftlinien aus, sondern saugt sie in sich ein. Dies ist durch die auf *s* hin gerichteten Pfeile, an den acht Kraftlinien angedeutet, welche zur Darstellung des Polfeldes in die Fig. 38 eingezeichnet wurden. Wieder können wir eine Region vor dem Pole und eine hinter demselben in Bezug auf die von (*N*) nach (*S*) gerichteten Kraftlinien des Hauptfeldes unterscheiden. Die von *h* her an den Pol herantretenden Linien des feststehenden Feldes vereinigen sich mit seinen eigenen; beide Felder verstärken sich: erhöhte Feldenergie, vergrösserte Zugspannung. Das Umgekehrte findet bei *v* statt. Die Folge davon ist, dass der Pol *s* nach rückwärts (*h*) gezogen wird.

Ein in ein Magnetfeld mit feststehendem Träger gebrachter magnetischer Südpol erfährt einen Bewegungsantrieb im entgegengesetzten Sinne der Kraftlinien des Feldes.

In der Figur 38 ist diese Bewegungstendenz durch einen kurzen an s angebrachten starken Pfeil zum Ausdruck gebracht.

127. Kinematische Bilder von Kraftröhren. — Es könnte schwierig erscheinen, sich von der unendlichen Schar von Drehbewegungen in einem magnetischen Kraftfelde eine anschauliche Vorstellung zu bilden. Betrachten wir indessen eine einzelne Kraftröhre, so bewegen sich die Teilchen auf ihrer Mantelfläche an allen Stellen in demselben Sinne. Wenn jedes bei seiner Drehung um seine Kraftlinie auch sofort wieder in das Innere der Röhre tritt, so wird es doch an der Oberfläche augenblicklich durch ein anderes gleich beschaffenes und gleich bewegtes Teilchen ersetzt. Wir erhalten auf der Kraftröhre ein System in demselben Sinne fortlaufender Bewegungen, also ein sehr einfaches kinematisches Bild.

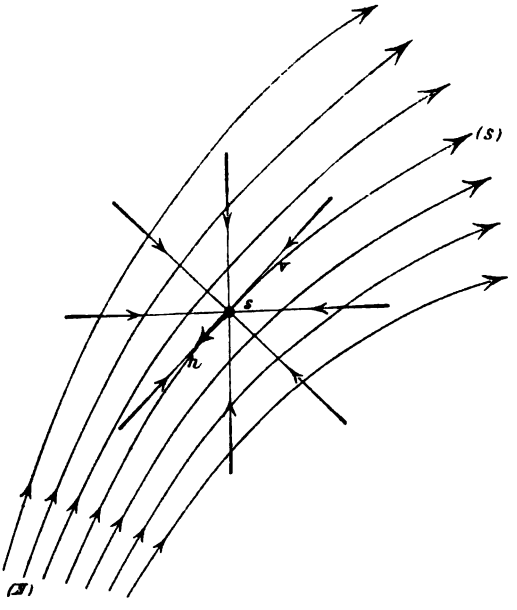


Fig. 38.

Zweckmässige Kraftröhrenmodelle stellt man sich aus Stücken grauen Gummischlauches (Fig. 39) her, auf denen man durch Reihen äquidistanter quer verlaufender Pfeile die Drehrichtung und durch Längspfeile den der Festsetzung § 121 entsprechenden Richtungssinn der Röhre bezeichnet. Das Innere versteift

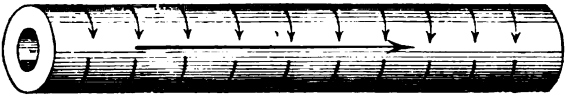


Fig. 39.

man durch einen eingeschobenen Draht aus weichem Kupfer, durch dessen Biegung der Röhre jede gewünschte Form gegeben werden kann. Soll die Röhre in sich zurücklaufen, so leimt man ihre Enden über einen kurzen in das Innere geschobenen Holzpflock.

128. Dynamische Modelle einiger wichtiger Magnetformen. — Durch die im vorigen Paragraphen beschriebenen Kraftröhrenmodelle

wird es möglich, sich die in den Magnetfeldern vorauszusetzenden Drehbewegungen zu veranschaulichen.

a) Modell des Stabmagneten Fig. 40. Der von einem Halter H in horizontaler oder vertikaler Stellung getragene Holzstab NS stellt den Magneten dar, N (rot) sein Nordende, S (blau) sein Südende, I die Indifferenzzone. An beiden Enden werden in gleich weit voneinander entfernte Bohrungen je sechs dicke

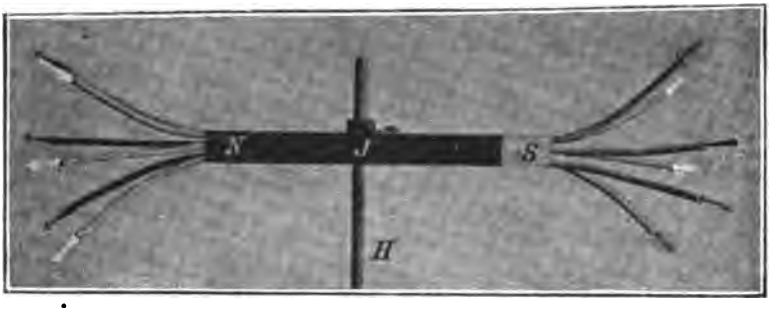


Fig. 40.

Kupferdrähte gesteckt, über die man Gummischläuche mit den Drehrichtungspfeilen schiebt und an deren Enden man Blechpfeile in dem entsprechenden Sinne festlötet. Die Drähte biegt man in die Richtung der bei N aus- und bei S eintretenden Kraftröhren.

b) Modell der magnetischen Lamelle Fig. 41. Der auf dem Fusse F befestigte Messinghalter H trägt die auf der einen Seite (n) rot, auf der anderen (s) blau angestrichene Holzscheibe S von 6 cm Durchmesser und 1 cm Dicke.

Fig. 41.

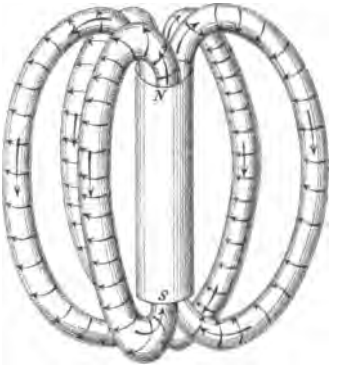


Fig. 42.

Durch dieselbe sind 19 dicke Kupferdrähte von 20 cm Länge in gleichen Abständen voneinander hindurchgesteckt (einer in der Mitte der Scheibe, sechs rings um diese, 12 in weiterem Umkreis in derselben Entfernung). Über die Enden dieser Drähte sind Schläuche geschoben, vor diese die zugleich festhaltenden Pfeilpinnen bezw. -spitzen aufgelötet. Die Kupferdrähte sind in der aus der Figur ersichtlichen

Weise auseinander gebogen, so dass sie bündelförmig von beiden Seiten der Kreisscheibe auslaufen.

c) Modell eines Magneten mit innerem Kraftröhrenverlauf Fig. 42. Die Molekülketten setzen den Kraftfluss des Feldes durch das Innere des Magneten hindurch fort. Man bringt dies durch folgendes Modell zur Darstellung:

An einer ca. 20 cm langen, $2^1/_2$ cm weiten Pappröhre werden durch Aufkleben von rotem und blauem Papier die Polaritäten bezeichnet. Durch das Innere werden fünf Schläuche von je 60 cm Länge geführt und ihre Enden zu geschlossenen Kraftröhren vereinigt. Die äusseren Teile werden in die Form der Kraftlinien gebogen. In Wirklichkeit würden sich die Röhren bei ihrem Eintritt in das Magnetinnere wegen der höheren Permeabilität der Substanz erheblich einschnüren.

C) Versuche über Wirbelbewegungen.

Die kinetischen bezw. dynamischen Theorien versuchen die magnetischen Wechselwirkungen auf Bewegungsvorgänge in dem Zwischenmedium zurückzuführen. Drehbewegungen längs der Magnetkraftlinien sind in der That imstande, die Grunderscheinungen der Wirkung zweier Magnetpole aufeinander mechanisch zu interpretieren. An den Peripherieen zweier benachbarter Kraftröhren bewegen sich aber die Teilchen bei Gleichsinnigkeit der Bewegungen im Inneren in entgegengesetztem Sinne; es könnte scheinen, als ob sie sich gegenseitig stören müssten.

Dass aber solche Drehbewegungen

a) dauernd und

b) nebeneinander bestehen können, lehren uns die „Wirbelbewegungen". Diese von HELMHOLTZ zuerst genauer studierte Bewegungsform ist unter gewissen Bedingungen eine Dauerbewegung von der hier betrachteten Art. Da sie das beste Bild (dynamical illustration) der kinetischen Feldtheorien giebt, wollen wir sie in einem tropfbar flüssigen Medium (Wasser) und in einem elastisch flüssigen (Luft) hervorrufen. Die dabei erhaltenen Erscheinungen sind freilich nur Annäherungen an diejenigen, wie sie die Theorie im Magnetfelde voraussetzt, denn die Versuchsmedien erfüllen zwei Bedingungen nicht, die bei dem idealen Medium erfüllt sein müssen:

α) Reibungslosigkeit,

β) Inkompressibilität. Das Wasser besitzt eine gewisse Zähigkeit, die durch Reibung die Energie der Bewegungen vernichtet. Die Luft vor allem eine starke elastische Zusammendrückbarkeit. Trotzdem können uns die Wirbelbewegungen in ihnen vollständig genügende Analoga für Kraftlinien, Linienbündel und Kraftröhren geben.

129. Erzeugung von Wasserwirbeln. — In einer Flüssigkeit entstehen Wirbel, wenn dieselbe gezwungen wird, um scharfe Kanten herumzufliessen.

Der Altmeister von Helmholtz soll die Wirbel zuerst in der Tasse beim Umrühren von Milch und Kaffee — das verschiedenfarbige Gemisch war ein ausgezeichnetes Versuchsobjekt, — studiert haben.

Für unsere Versuche benutzen wir einen 3—4 dm breiten, langen und hohen, mit Wasser gefüllten Glastrog (Zimmeraquarium), in den wir Sägespäne streuen, die von den Wasserteilchen mitgenommen werden. Die Späne lassen uns dadurch die Drehungsgeschwindigkeit sowie die Lage der Drehungsachse im Raume der einzelnen Flüssigkeitselemente deutlich erkennen.

Versuch: Ein flaches, unten halbkreisförmig begrenztes, scharfkantiges Blech bewegen wir senkrecht zur Wasseroberfläche, parallel mit sich selbst etwa 8—10 cm vorwärts und heben es 2—3 cm vor der Wand plötzlich heraus. Wir erzeugen auf diese Weise einen an der Oberfläche endenden, in die Wassermasse hinabziehenden, halbringförmigen Wirbel, welcher gegen die Vorderwand des Gefässes fortschreitet. Den Rand des Bleches begleitet ein Flüssigkeitsfaden, in dem die Teilchen deutliche Drehbewegungen zeigen.

130. Die Wirbelbewegung als Dauerbewegung. — In einem Wirbel drehen sich immer die gleichen Flüssigkeitsteilchen um Achsen und schreiten mit denselben fort.

So kamen bei dem eben beschriebenen Versuche Späne im Inneren und Äusseren des Wirbelringes, welche nicht von vornherein in Drehbewegung begriffen waren, auch bei dem weiteren Fortschreiten und Sichausbreiten des Wirbels nicht in Drehung.

Diese Drehbewegung individualisiert also ganz bestimmte Flüssigkeitsteilchen.

Die Wirbelbewegung ist dauernd an bestimmte Flüssigkeitsteilchen gebunden und schreitet mit diesen fort.

Hierdurch unterscheidet sie sich wesentlich von der Wellenbewegung, welche selbst weiter schreitet, aber immer andere Teilchen ergreift, während jedes einzelne Teilchen mehr oder weniger eine in sich zurücklaufende Bewegung an demselben Orte ausführt.

Ist die Wirbelbewegung einmal erzeugt, so sind deutlich zwei Arten von Teilchen zu unterscheiden: Teilchen mit Drehbewegung; diese behalten ihre Drehungen so lange, als überhaupt die ganze Bewegungsform andauert, bei: Teilchen ohne Drehbewegung; diese kommen nie in Wirbelbewegung. Würde diese nicht durch die Reibung sehr bald gedämpft, so müsste der Unterschied für alle Zeiten weiter bestehen, ganz ähnlich wie die Moleküle eines Magneten dauernd Kraftlinien tragen, welche unverändert an sie geknüpft erscheinen. H. von Helmholtz hat gezeigt, dass sich diese Wirbelbewegungen unzerstörbar bis in alle Ewigkeit erhalten, wenn in dem Medium keine Reibung auftritt.

131. Wirbellinien im Wirbelfaden. — In einem Wirbel reihen

sich die einzelnen Teilchen längs gewisser Achsen aneinander, welche im Inneren des Wirbels von einem Ende zum anderen ziehen.

Fassen wir z. B. ein Teilchen nahe der Mitte unseres Wirbelringes ins Auge, so sehen wir seine Drehungsachse der äusseren Umgrenzung des ganzen Wirbels parallel laufen. Zu beiden Seiten drehen sich Nachbarn um Achsen, welche die Fortsetzung von der Achse des erstbetrachteten Teilchens zu sein scheinen. So kann man in der Achsenrichtung eines Teilchens zu seinem Nachbar fortschreiten, von diesem wieder zu einem in der Nähe befindlichen Teilchen u. s. w., indem man immer in der Achsenrichtung der Drehbewegung des eben angetroffenen Teilchens weitergeht.

Man kann in einer wirbelnden Flüssigkeit Linien unterscheiden, um welche sich die Teilchen überall als um ihre Achse drehen. Diese Linien sind die sogenannten „Wirbellinien".

In unserem Beispiele sind es halbkreisförmig gebogene, von einer Stelle der Flüssigkeitsoberfläche ausgehende, in die Flüssigkeit nach unten hineinziehende, dann wieder nach oben gerichtete und an einer anderen Stelle der Oberfläche endende Linien.

Diese Wirbellinien entsprechen in dem mechanischen Bilde den Kraftlinien; die Bündel von nebeneinander verlaufenden Wirbellinien den Kraftlinienbündeln. Wir nennen mit H. von Helmholtz einen unendlich dünnen, von Wirbellinien erfüllten und umhüllten röhrenförmigen Teil der Flüssigkeit einen „Wirbelfaden".

Auf derselben Wirbellinie liegen immer dieselben wirbelnden Teilchen. Der Wirbelfaden ist als Gesamtheit aller einzelnen in ihm enthaltenen Wirbellinien immer aus denselben Flüssigkeitsteilchen zusammengesetzt. Er entspricht der „Kraftröhre", § 81.

Die Achse des Fadens wird durch die mittelste Wirbellinie gebildet. Die anderen Wirbellinien laufen parallel mit sich selbst um diese herum. Den Mantel bilden bei uns die äussersten Linien, auf denen noch Drehbewegungen bemerkbar sind. Die Teilchen wandern auf diesem in dem Sinne ihrer Drehbewegung vorwärts.

Wir sehen hier zahllose einzelne Wirbellinien nebeneinander bestehen, ohne dass eine Störung der Bewegung eintritt.

132. Richtung der Wirbellinien. — Die Wirbellinien haben wie die Kraftlinien einen bestimmten Richtungssinn; er ergiebt sich eindeutig aus der Drehungsrichtung der sie zusammensetzenden Teilchen. Wenden wir die Festsetzung des § 121 hier an, so ist ein halbkreisförmiger Wirbelfaden, Fig. 43, der an der Flüssigkeitsoberfläche endet, in der Pfeilrichtung zu durchlaufen (positiver Richtungssinn).

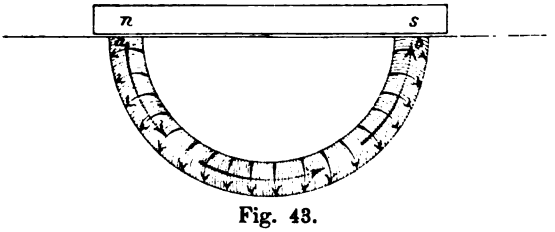


Fig. 43.

Oberhalb des Punktes a würde ein Quellpunkt von Wirbelbewegung, Nordpol n, oberhalb b eine Sinkstelle, Südpol s, zu denken sein.

Bei den Wirbelringen tritt ein bestimmter Richtungssinn des Ganzen insofern hervor, als sie immer nur in dem Sinne fortschreiten, in dem die Teilchen aus ihrem Inneren herauswirbeln, in Fig. 43 also nach vorn.

133. Begriff der Wirbelintensität. — Bei dem Fortschreiten, Ausbiegen und sich Vergrössern eines Wirbelfadens ändert sich die Geschwindigkeit, mit der sich die mitgeführten Teilchen um ihre Achsen drehen. Zwar nimmt diese für alle Teilchen wegen der Reibung schliesslich bis zu Null ab. Man bemerkt aber gelegentlich auch deutlich gesteigerte Lebhaftigkeit der Drehbewegung.

Führt man z. B. Wirbelfäden gegen die Glaswand heran, so breiten sie sich in dem Augenblicke, in dem sie an die Wand treffen, aus. Zugleich wird die Drehgeschwindigkeit ihrer Teilchen grösser.

Wird ein Wirbelfaden ausgezogen, so nimmt die Wirbelgeschwindigkeit seiner Teilchen zu.

Das Produkt aus Wirbelgeschwindigkeit $\mathfrak{q}$ in den Querschnitt ω des Wirbelfadens nannte von Helmholtz die „Wirbelintensität" $\mathfrak{J} = \mathfrak{q}\,\omega$. Sie entspricht dem Induktionsflusse $I = \mathfrak{B}\,\omega$.

134. Satz von der Erhaltung der Wirbelintensität. — Dass die Wirbelintensität $\mathfrak{J} = \mathfrak{q}\,\omega$ eine für den Wirbelfaden charakteristische Grösse ist, wird dadurch bewiesen, dass für sie ein ähnliches Erhaltungsgesetz wie für den gesamten Induktionsfluss $I = \mathfrak{B}\,\omega$, oder für den speziellen Fall, dass $\mu = 1$ ist und $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$ übergeht, für den Kraftfluss $\mathfrak{H}\,\omega$ (§ 83) gilt.

Dieses ausserordentlich bedeutungsvolle Erhaltungsgesetz wies von Helmholtz dadurch nach, dass er zunächst zeigte: Die Drehungsgeschwindigkeit wächst proportional dem Abstande zweier Nachbarteilchen derselben Wirbellinie voneinander.

Da dasselbe Stück eines Wirbelfadens immer aus denselben Teilen zusammengesetzt ist, und sich wegen der Inkompressibilität das Volumen dieser Teilchen nicht ändern kann, so muss die Drehungsgeschwindigkeit $\mathfrak{q}$ umgekehrt wie der Querschnitt variieren, d. h. das Produkt beider muss konstant sein.

Man hat im Wirbelfelde also ein vollkommenes mechanisches Analogon eines Kraftfeldes.

Wie in diesem der Kraftfluss in den einzelnen Röhren, in die man sich das Feld zerlegt denken kann, konstant bleibt, so erhält sich hier der Wert der Intensität längs eines jeden Wirbelfadens.

Die im II. Teile zu gebende strengere mathematische Analyse lässt die Analogie noch weiter verfolgen.

135. Versuche mit Rauchringen. — Rauchringe, wie sie ein geschickter Raucher direkt mit dem Munde bläst, stellen sehr anschaulich die Bewegungen bei in sich zurücklaufenden kreisförmigen Kraftröhren dar, wie wir sie namentlich im II. Abschnitt wiederholt zu betrachten haben werden.

In grosser Zahl und Regelmässigkeit erzeugt man sie mit Hilfe eines horizontal liegenden cylindrischen Kastens aus Blech oder Pappe, der etwas länger als breit ist und der in der Mitte seines Bodens ein kreisförmiges Loch hat. Durch den Deckel wird Rauch eingeblasen. Wird dieser geschlossen und ist die Luft im Inneren des Kastens zur Ruhe gekommen, so schiesst jedesmal ein wohlgeformter Ring zur Bodenöffnung heraus, wenn man auf den Deckel klopft. Die Beimischung der Rauchpartikelchen ermöglicht uns, die herausgetriebenen Luftteilchen auch auf ihrem weiteren Wege zu verfolgen und zu erkennen, dass es immer dieselben Luftmengen sind, welche von Anfang an wirbeln.

Die aus der Öffnung austretenden Ringe beobachtet man am besten in der Richtung ihrer Bewegung, indem man sie von vorn oder rückwärts durchleuchtet.

An solchen Rauchringen, Fig. 44, bemerkt man folgende Einzelheiten:

a) Jeder Ring ist ein in sich zurücklaufender Wirbelfaden, eine geschlossene Wirbelröhre. Sie besteht aus lauter ihrer kreisförmigen Achse parallel laufenden Wirbellinien, um die man sich die einzelnen Rauchteilchen drehen sieht.

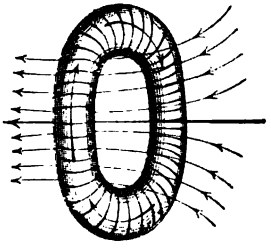


Fig 44.

b) Der Wirbelring wandert in demselben Sinne vorwärts, in welchem die Luft durch sein Inneres strömt. Diese wird dabei aus der Umgebung immer wieder nachgesogen; sie ist nicht mit Rauch beladen. Die Rauchteilchen lassen erkennen, dass es die vom Beginne an wirbelnden Teilchen sind, welche die Wirbelbewegung weiterführen, und dass keines dieser Teilchen (für die Zeit des deutlichen Bestehens der Erscheinung wenigstens) von dieser Bewegungsform lässt.

c) Der positive Richtungssinn, den wir diesem Rauchringe als Ganzem zu geben haben, ergiebt sich aus unserer Festsetzung § 121, dass ein längs der positiven Drehungsachse hinblickendes Auge die Teilchen im Uhrzeigersinne umlaufend erblicken soll. Da die Bewegung in jedem Ringquerschnitt im Inneren vorwärts, d. h. im Fortschreitungssinne, aussen rückwärts, d. h. dem Fortschreitungssinne entgegengesetzt erfolgt, ist als positiv die Richtung anzusehen, welche ihn uhrzeigermässig umkreist, wenn wir im Sinne der Luftströmung im Inneren, d. h. im Fortschreitungssinne ihnen nachblicken, vergl. die Pfeile in der Fig. 44.

d) Durch Luftzug wird oft, namentlich in grösserer Entfernung von dem Ausgangspunkte der Ringe, ein Teil des Fadens länger ausgezogen; man bemerkt dann eine rasche Zunahme der Drehgeschwindigkeit, wie bei den Wasserwirbeln, die freilich sehr bald durch Reibung wieder vermindert wird. Dies entspricht der Konstanz der Wirbelintensität.

e) Wenn man einen Rauchring senkrecht gegen eine Wand, etwa eine Glastafel anlaufen lässt, so prallt er nicht zurück, sondern breitet sich vor derselben aus. Dabei verlängert er sich, der Querschnitt des Fadens nimmt ab, dagegen nimmt (im ersten Momente deutlich sichtbar) die Drehgeschwindigkeit in ihm zu. (Konstanz der Wirbelintensität $\mathfrak{J} = q\,\omega$.)

D) Cyklische Bewegungen.

Bei allen neueren Theorien der Felderscheinungen spielen in sich zurücklaufende, kreisel- oder wirbelartige „cyklische" Bewegungen eine grosse Rolle. H. von Helmholtz hat diese Bewegungen einer systematischen Behandlung unterworfen, zunächst mit Rücksicht auf Probleme der Thermodynamik. Hertz hat in seinen Prinzipien der Mechanik diese Betrachtungen weiter ausgeführt und Anwendungen derselben auf das hier zu behandelnde Gebiet angedeutet.

Wie man bei der Lehre von den akustischen Erscheinungen eine kurze Übersicht über die Eigenschaften der ihnen zu Grunde liegenden Bewegungsformen, der „Wellenbewegungen" vorauszuschicken pflegt, so wollen wir hier einige Andeutungen über die in Betracht kommenden „Cykelbewegungen" einschalten. Dabei wollen wir zunächst uns darauf beschränken, an einfachen, allgemein bekannten Beispielen die Natur dieser Bewegungen und ihre Haupteigenschaften zu erläutern. Im II. Teile wollen wir die Theorie derselben, wie sie von H. von Helmholtz begründet und namentlich von H. Hertz weiter ausgebaut worden ist, ausführlicher geben.

136. Begriff der cyklischen Bewegungen. — Wenn in einem Systeme von Körpern eine Bewegung stattfindet, verändert sich in der Regel die räumliche Anordnung derselben fortwährend und damit der Zustand des Systems. Ausser diesen fortschreitenden Bewegungen giebt es aber in sich zurücklaufende, bei denen jedes Teilchen, welches seinen Ort verlässt, sofort durch ein gleich beschaffenes, gleich bewegtes ersetzt wird, so dass trotz der Bewegung der Zustand des ganzen Systems sich nicht ändert.

Die gleichförmige Rotation eines homogenen Umdrehungskörpers, das Fliessen einer Flüssigkeit durch einen in sich selbst zurückkehrenden Kanal bieten Beispiele hierfür (H. von Helmholtz).

Wir wollen solche Bewegungen mit H. von Helmholtz unter dem Namen der „cyklischen Bewegungen" zusammenfassen und erhalten

demnach für eine cyklische und zwar eine „echt cyklische Bewegung“ (vergl. weiter unten S. 131) folgende:

Definition: Eine echt cyklische Bewegung eines materiellen Substrates ist eine solche, bei der an jeder Stelle für jedes seinen Ort verlassende Teilchen nach verschwindend kurzer Zeit ein vollkommen gleich beschaffenes Teilchen eintritt, welches mit derselben Geschwindigkeit nach derselben Richtung bewegt ist, wie das vorher an dieser Stelle gewesene.

Diese Definition erfordert, in aller Strenge angewendet, dass das Bewegte ein kontinuierliches Medium ist. Ist dies nicht der Fall, sondern bewegt sich z. B. die ponderable Materie, die man sich aus einzelnen Molekülen aufgebaut denkt, in der in der Definition angegebenen Weise, so können wir die Bewegung nur insoweit noch als echt cyklische betrachten, als wir von den Unterschieden in der Raumerfüllung absehen.

Modell eines einfachen Cykels. Eine Holzscheibe von ca. 10 cm Radius und 2 cm Dicke dreht sich um eine horizontale Achse, welche an einem vertikalen Ständer befestigt ist. In der Einheit der Entfernung von der Achse ist in die Scheibe ein Stift geschlagen, an dem die in Bewegung setzende Kraft angreifen soll („Antriebspunkt“). Vor der Scheibe reicht ein an dem Ständer befestigter, nach der Achse zeigender Stift bis nahe an den Antriebspunkt; durch ihn soll eine bestimmte Anfangsrichtung markiert werden. Die Lage der Scheibe ist dann durch die Bogenentfernung des Antriebspunktes von der Anfangsrichtung für jeden Augenblick gegeben. Drehen wir die Scheibe mit konstanter Geschwindigkeit um die Achse, so folgt an jeder Stelle auf jedes Teilchen unmittelbar ein gleich beschaffenes, gleich bewegtes. Sehen wir von den kleinen Inhomogenitäten des Materials ab, so können wir sagen: Die gesamte Konfiguration der einzelnen Teile ändert sich gar nicht; drehen wir rasch, so bemerken wir in der That auch nichts von der Bewegung („verborgene Bewegung“), höchstens durch unser Tastgefühl (!) überzeugen wir uns davon, dass hier wirklich eine Bewegungsform vorliegt.

137. Cyklische Koordinaten und cyklische Geschwindigkeiten. — Die Lage einzelner Teile eines jeden bewegten Systems kann man sich durch gewisse Variable, die von der Zeit abhängen, bestimmt denken; wir wollen sie „Koordinaten“ nennen.

Dabei soll dieser Begriff hier eine allgemeinere Bedeutung als in der Kartesianischen Koordinatengeometrie haben, wo die Koordinaten bei rechtwinkligem System z. B. den Abstand der Massenpunkte von den Koordinatenebenen bezeichnen. Wir bezeichnen jede variable Grösse, welche die Lage eines Körpers oder eines seiner Teile oder den Zustand eines Systems irgendwie, sei es eindeutig oder nur in der Weise bestimmt, dass ihre Angabe zur Bestimmung der Lage oder des Zustandes beiträgt, als Koordinate.

Um uns gleichzeitig der Bezeichnung von H. von Helmholtz und H. Hertz möglichst eng anzuschliessen, führen wir für diese Koordinaten, wenn sie sich auf cyklische Vorgänge beziehen, den Buchstaben $\mathfrak{p}$ ein; $\mathfrak{p}$ heisst dann eine „cyklische Koordinate“.

In dem Beispiele des Modelles in § 136 würde der bei der Rotation immer mehr wachsende Bogen zwischen Antriebspunkt und Anfangslage als cyklische Koordinate $\mathfrak{p}$ zu wählen sein.

Es sei dp die Änderung, welche der Wert von p in der kleinen Zeit dt erfährt; dann ist

$$dp/dt = \dot{p} = q \quad \ldots \ldots \ldots \quad 19)$$

die Änderungsgeschwindigkeit der cyklischen Koordinate oder die „cyklische Geschwindigkeit".

In unserem Beispiele ist q die Bogengeschwindigkeit, mit welcher der Antriebspunkt fortschreitet.

Die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte der rotierenden Scheibe, dessen Entfernung von der Achse r_i sei, ist $v_i = r_i q$. Die Geschwindigkeiten aller Massen des Cykels sind also durch dieselbe Geschwindigkeit q des Antriebspunktes darstellbar, sie sind ihnen direkt proportional; der Proportionalitätsfaktor r_i hängt von der speziellen Verknüpfung mit dem Antriebspunkte ab, hier einfach von der Lage des betreffenden Teiles des Systems zu demselben.

Ein wesentliches Merkmal der Helmholtzschen cyklischen Systeme besteht darin, dass ihr Zustand gar nicht durch den augenblicklichen Wert der cyklischen Koordinate p selbst, sondern nur durch deren Ableitung nach der Zeit, der cyklischen Geschwindigkeit q bestimmt ist.

In der That, wenn jeder Teil des Systems dem anderen gleicht und auch der Antriebspunkt der wirkenden Kraft unserer Beobachtung nicht direkt zugänglich ist, so können wir in dem einzelnen Momente gar nicht unterscheiden, welchen Wert p hat, da immer gleiche Teilchen auf gleiche folgen; auf den absoluten Wert von p kommt es also gar nicht an, dagegen wird alles durch die cyklische Geschwindigkeit q bestimmt.

In dem Beispiele der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit q rotierenden homogenen Kreisscheibe ist dies unmittelbar ersichtlich.

138. Energie cyklischer Systeme; das cyklische Moment. — Da in einem cyklischen Systeme die Geschwindigkeit eines jeden Teilchens durch die cyklische Geschwindigkeit bestimmt ist, so gilt Gleiches auch für die kinetische Energie aller einzelnen Teile und damit auch des gesamten Systems.

Für einen um eine Achse rotierenden Körper, z. B. unsere Kreisscheibe § 136, erkennt man dies sofort. Ein in der Entfernung r_i von der Achse mit der Geschwindigkeit $v_i = r_i \cdot q$ bewegtes Teilchen von der Masse m_i hat die kinetische Energie $\frac{1}{2} m_i r_i^2 q^2$; die Gesamtenergie des ganzen bewegten Systems ist:

$$\mathfrak{L} = \tfrac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) q^2,$$

oder wenn wir setzen:

$$\sum m_i r_i^2 = T,$$

wo T das „Trägheitsmoment" der Scheibe ist,

$$\mathfrak{L} = \tfrac{1}{2} T q^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 20)$$

Bei Rotationsbewegungen tritt in den Ausdruck für die kinetische Energie statt der Masse das Trägheitsmoment ein.

Die Ableitung der kinetischen Energie nach der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ nennt man das cyklische Moment

$$\mathfrak{f} = \frac{d\mathfrak{L}}{d\dot{\mathfrak{q}}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 21)$$

Es ist $\mathfrak{L} = {}^1/_2\, \mathfrak{q}\mathfrak{f}$.

Im genannten Beispiele ist z. B. $\mathfrak{f} = T\mathfrak{q}$, also $\mathfrak{L} = {}^1/_2\, \mathfrak{q}\mathfrak{f}$. Es ist ferner $d\mathfrak{f} = T d\mathfrak{q}$ (T konstant). Das Energiedifferential hat die Form

$$d\mathfrak{L} = T\mathfrak{q} \cdot d\mathfrak{q} = \mathfrak{q} \cdot d\mathfrak{f} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 22)$$

Dieser Ausdruck ist ganz analog wie die Differentialausdrücke in § 118 und in § 119 (16) aus zwei Faktoren zusammengesetzt.

139. Kräfte, welche an cyklischen Koordinaten angreifen. — Bewegt sich der Cykel ohne Reibung mit der cyklischen Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$, so ist in ihm eine gewisse kinetische Energie aufgespeichert. Will man $\mathfrak{q}$ steigern, etwa um $d\mathfrak{q}$, indem man an dem Antriebspunkte eine Kraft $\mathfrak{P}$ wirken lässt, so muss man eine gewisse Arbeit $d\mathfrak{A}$ leisten; ändert sich ausser $\mathfrak{q}$ nichts, so muss die ganze in das System hineingebrachte Arbeit $d\mathfrak{A}$ gleich dem Zuwachs $d\mathfrak{L}$ der kinetischen Energie sein.

In unserem Beispiele ist

$$d\mathfrak{A} = d\mathfrak{L} = T \cdot \mathfrak{q} \cdot d\mathfrak{q} = \mathfrak{q} \cdot d\mathfrak{f} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 23)$$

Wir definieren die Kräfte („Kraftmomente", Helmholtz) durch das Verhältnis der geleisteten Arbeit zu der Änderung der betreffenden Variablen, welche sich bei der Arbeitsleistung ändern. In unserem Falle wird die Arbeit $d\mathfrak{A}$ an dem Antriebspunkte des Systems in dieses hineingebracht, dessen Lage durch die Koordinate $\mathfrak{p}$ gegeben ist. Wir setzen daher allgemein die Kraft

$$\mathfrak{P} = \frac{d\mathfrak{A}}{d\mathfrak{p}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 24)$$

und

$$d\mathfrak{A} = \mathfrak{P} \cdot d\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{q} \cdot dt \quad \ldots \ldots \ldots \quad 25)$$

Diese Definition der Kraft ist allgemeiner als die gewöhnliche der Mechanik, sie umfasst auch die Fälle von Zustandsänderungen, bei denen wir gewöhnlich nicht von Kräften sprechen, z. B. bei Druck- und Volumenänderungen eines Gases, zu denen Arbeitsleistungen nötig sind. Der Vergleich der Formeln 25 und 23 giebt für unser Beispiel

$$\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{q} \cdot dt = T \cdot \mathfrak{q} \cdot d\mathfrak{q} = \mathfrak{q} \cdot d\mathfrak{f}$$

oder

$$\mathfrak{P} = \frac{d\mathfrak{f}}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 26)$$

Die zeitliche Änderung des Momentes ist der auf die cyklische Variable wirkenden Kraft gleich.

140. Erweiterung des Cykelbegriffes. — Der Typus der cyklischen Bewegung bleibt bewahrt, wenn auch im Laufe der Zeit die cyklische Geschwindigkeit q allmählich in andere Werte übergeht. Wir können ein System in einem gegebenen Augenblick immer noch als ein echt cyklisches betrachten, wenn sich seine cyklische Geschwindigkeit q ändert, falls nur diese Änderung mit der Zeit $dq/dt = \dot{q}$ hinreichend klein ist, und erhalten daher für die analytische Darstellung des Systems (Konfiguration aller Massenteilchen, Geschwindigkeit und kinetische Energie eines jeden einzelnen, gesamte Energie des ganzen Systems) folgende charakteristische Momente:

Koordinate p: kommt gar nicht in den zu bildenden Ausdrücken vor.

Änderungsgeschwindigkeit q: bestimmt den Zustand des Systems.

Änderungsbeschleunigung $\frac{dq}{dt}$: ist klein gegen q selbst.

141. Gekoppelte Cykeln. — Wir haben bisher immer nur einen sehr einfachen Fall cyklischer Bewegung ins Auge gefasst. Als cyklische lassen sich aber auch sehr verwickelte Bewegungssysteme auffassen, so dass der Begriff und damit der Gültigkeitsbereich unserer Formeln ein sehr weiter ist. Verbinden wir zwei homogene Scheiben von verschiedenen Durchmessern und verschiedenem Materiale, die um zwei parallele Achsen drehbar sind, durch einen Riemen, so passt auf dieses System von Kreisbewegungen vollständig die Definition § 136; es stellt einen reinen und echten Cykel dar; denn jedes fortbewegte Teilchen wird sofort in d e r Weise durch ein gleich beschaffenes gleich bewegtes ersetzt, dass sich die Konfiguration des Ganzen trotz der Bewegung gar nicht ändert; selbst in dem Zugkraftorgan des Riemens folgt Teil auf Teil und bei völliger Homogenität bleibt die Gesamtanordnung dieser Teile äusserlich betrachtet unverändert.

Als cyklische Koordinate wählen wir am einfachsten die Bogenentfernung p des Antriebpunktes der einen Scheibe von einer Anfangslage. Da kein Teilchen vor dem anderen ausgezeichnet ist, spielt der absolute Wert p dieser Koordinate selbst keine Rolle. Wohl aber werden die Geschwindigkeiten aller Teilchen durch ihre Ableitung q nach der Zeit bestimmt und damit auch die kinetische Energie sämtlicher mitbewegter Teile sowie die Energie des ganzen Systems.

Eine solche Verbindung mehrerer Kreisbewegungen miteinander nennt man „Koppelung“ (in der Technik „Kuppelung“).

Modell gekoppelter Cykeln: Auf einem Brette, Fig. 45, ist a) um eine Achse eine einfache Holzscheibe vom Radius R_1 mit einer Riefe an dem Rande, b) eine Doppelscheibe um eine andere Achse drehbar, welche aus einer kleineren,

mit Randriefe versehenen Scheibe vom Radius r_2 und einer damit fest verbundenen grösseren vom Radius R_2 besteht. Die Umfänge von R_1 und r_2 sind durch einen in sich zurücklaufenden Gummifaden $v\,v$ miteinander verbunden. Die gestrichelte Linie a bezeichne (die willkürlich gewählte) Anfangslage eines auf der ersten Scheibe in der Achsenentfernung 1 festgelegten Antriebspunktes; seine Bogenentfernung φ sei die cyklische Koordinate des ganzen Systems; in seiner Tangentenrichtung ist die Kraft $\mathfrak{P}$ angreifend zu denken. Für eine Masse m_i der ersten Scheibe in der Entfernung r_i von der Achse ist die Geschwindigkeit $v_i = r_i \cdot \mathfrak{q}$, die kinetische Energie $^1/_2\, m_i\, r_i^2 \cdot \mathfrak{q}^2$; für ein Massenelement m_i' der zweiten Scheibe in der Entfernung r_i' von der zweiten Drehungsachse sind diese Grössen $R_1/r_2 \cdot r_i'\,\mathfrak{q}$, bezw. $^1/_2\, m_i' \,(R_1/r_2)^2\, r_i'^2 \cdot \mathfrak{q}^2$. Das Verhältnis R_1/r_2, das sogenannte „Übersetzungsverhältnis", ist eine für die Art der Übertragung (der „Verknüpfung") charakteristische Konstante.

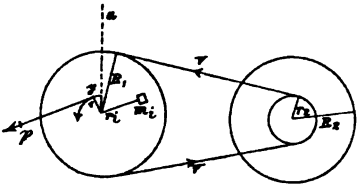


Fig. 45.

Wir finden also auch bei diesem Cykel die Geschwindigkeit in irgend einem Punkte i in der Form $v_i = a_i \cdot \mathfrak{q}$ ausgedrückt, wo a_i ein von der Verknüpfung des Punktes i mit dem Antriebspunkte abhängiger Proportionalitätsfaktor ist (die einfache Entfernung von der Drehungsachse für alle Punkte der ersten Scheibe, der Radius derselben für die in dem Riemen zum Teil geradlinig bewegten Massen und eine mit dem Übersetzungsverhältnis multiplizierte Entfernung für alle Punkte der zweiten Scheibe).

Alle durch Riemen verbundenen homogenen Scheiben, überhaupt jede Verbindung von homogenen Rotationskörpern durch Riemen oder Schnüre (ohne Gleitung) geben zu echten Cykelbewegungen Veranlassung.

Die cyklische Bewegung ist daher nicht auf eine Bewegung um *eine* Achse beschränkt; cyklische Bewegungen um beliebig weit voneinander entfernte Achsen können zu *einem* Cykel zusammengeschlossen werden. Es ist nicht einmal notwendig, dass alle in dem Cykel beteiligten Bewegungen *kreisförmig* in sich zurücklaufen; es können ebenso geradlinige Bewegungen vorkommen oder, wenn die Riemen nicht straff gespannt sind, Bewegungen in einer Kettenlinie. Noch immer bleibt der Grundcharakter der Bewegung auch hierbei bewahrt, da jedes Riementeilchen immer durch ein gleiches ersetzt wird.

An der cyklischen Bewegung können ferner sehr verschiedene materielle Substrate Teil nehmen: Die Substanzen der Scheiben und die Riementeilchen. Endlich brauchen die Achsen der einzelnen Teilbewegungen nicht einander parallel zu sein, die Drehungen können (durch „Riemenschränkung") in entgegengesetzt verlaufende verwandelt werden, immer bleibt der Grundcharakter der Cykelbewegung bewahrt.

Wir haben hierdurch den Begriff der cyklischen Bewegungen schon erheblich erweitert. Wir können uns einen Raum (Feld) ganz von solchen einzelnen in sich zurücklaufenden Kreisel- oder Wirbelbewegungen erfüllt denken, die alle zusammen nur einen einzigen Cykel ausmachen. Die Bedingung dafür ist nur die, dass sie alle durch ein und dieselbe cyklische Geschwindigkeit bestimmt sind.

Wir werden im II. Abschnitt in der sogenannten Strombewegung ein solches gekoppeltes cyklisches Bewegungssystem kennen lernen. Dass die Natur dabei

mit solch' einfachen „Elementenpaaren", wie wir bei der Riemenkoppelung, arbeitet, ist nicht anzunehmen; diese geben uns nur ein willkommenes Bild, durch welches wir uns die Energieverteilung im Felde veranschaulichen können.

Wenn die Geschwindigkeiten aller einzelnen Teilchen eines solchen cyklischen Bewegungsmechanismus der cyklischen Geschwindigkeit q proportional sind, gelten die Formeln 19 bis 22, welche wir zunächst für einen sehr einfachen Fall aufgestellt haben.

Die Gesamtenergie des gekoppelten Cykels Fig. 45 beträgt z. B.

$$\mathfrak{L} = {}^1/_2 \left(\sum_1 m_i r_i^2 + \left(\frac{R_1}{r_2} \right)^2 \sum_2 m_i' r_i'^2 \right) q^2,$$

wo sich die erste Summe auf alle Teile der ersten Scheibe, die zweite auf die der Doppelscheibe bezieht. Den Klammerausdruck könnte man als Trägheitsmoment T des ganzen Systems bezeichnen. Aus $\mathfrak{L} = {}^1/_2 T q^2$ folgen aber alle anderen Formeln, namentlich auch 26.

Vergleicht man die Formeln 20 und 22 für die Energie eines cyklischen Bewegungsmechanismus mit den Formeln 17 und 16, § 119 für die Feldenergie, so fällt die vollkommene Analogie sofort ins Auge. Dieselbe liefert die wichtigste Stütze für die Anschauungen, welche die magnetischen Erscheinungen auf in sich zurücklaufende Bewegungen zurückzuführen versuchen. Will man vermeiden, die magnetische Feldenergie auf eine bestimmte Form mechanischer, hier der kinetischen Energie zurückzuführen, so kann man die Cykelbewegungen als instruktive, „energetische Modelle" betrachten, welche zeigen, wie man sich die Anordnung der Feldenergie realisiert denken könnte.

142. Unechte Cykeln. — Um den Cykelbegriff noch nach einer anderen Seite hin zu erweitern, knüpfen wir an ein Beispiel an. Ein Rad mit Speichen werde mit konstanter Geschwindigkeit um seine Achse gedreht. Können wir dieses System bewegter Massenteilchen mit Rücksicht auf die Definition § 136 als einen Cykel betrachten? Im Radkranze und in der Nabe folgen ununterbrochen gleich beschaffene und gleich bewegte Teilchen aufeinander, hier ist das System also ein rein cyklisches. Dort aber, wo die Speichen umlaufen, folgen an einem bestimmten Orte Teilchen derselben Beschaffenheit, z. B. des Speichenmateriales, nur eine gewisse Zeit lang aufeinander, dann treten andere Teilchen ein, hier die unregelmässig bewegten Luftteilchen. Dieser Prozess wiederholt sich periodisch an einer solchen Stelle des Raumes, so lange als die Bewegung andauert.

Nach jeder Periode ist die Konfiguration des ganzen Systems in Bezug auf den betrachteten Raumpunkt genau wieder die gleiche. Auch hier ist die Geschwindigkeit irgend eines Teilchens i von der Masse m_i gleich $v_i = r_i \cdot q$, wo r_i die Entfernung von der Achse, q die Winkelgeschwindigkeit des Rades bedeutet. Daher ist die kinetische

Energie der einzelnen Massenteilchen, ihr Moment, sowie die kinetische Energie des ganzen Systems und das Gesamtmoment wie bei den echten Cykeln nur von der cyklischen Geschwindigkeit abhängig. Das Rad mit Speichen stellt einen sogenannten „unechten Cykel" dar. Dasselbe gilt für Räder mit Zähnen und Systeme von Zahnrädern, welche ineinander greifen; für alle ist $v_i = a_i q$, wo a_i einen von der Anordnung des Mechanismus abhängigen Faktor bedeutet.

Selbst ein nicht homogener Körper, der um irgend eine Achse mit konstanter Geschwindigkeit gedreht wird, stellt uns einen Cykel dar, wenn auch nur einen „unechten", falls er sich während der Rotation nicht verändert. Denn nach Ablauf einer Umdrehungsperiode kehrt er immer wieder in den ursprünglichen Zustand zurück, im Laufe einer grossen Zahl von Perioden bleibt der Bewegungszustand des Systems vollkommen stationär. Wir können schliesslich bei den „unechten" Cykeln ebenso wie bei den „echten" die Voraussetzung fallen lassen, dass die Umdrehungsgeschwindigkeit völlig konstant ist. Sie kann sich ändern, wenn nur die Änderungen selbst klein sind im Vergleich mit dem absoluten Werte der cyklischen Geschwindigkeit selbst.

143. Monocykeln, Dicykeln, Polycykeln. — Wir hatten bisher cyklische Systeme betrachtet, bei denen die Geschwindigkeiten und damit die Energien aller Teile nur von der Ableitung q einer Koordinate p abhängen. Solche Systeme nennt man nach VON HELMHOLTZ „Monocykeln". Sie sind durch die Beziehnung $v_i = a_i q$ charakterisiert.

Alle um feste Achsen rotierenden beliebig gestalteten Körper sowie Verbindungen, Koppelungen solcher Körper sind als monocyklische Bewegungssysteme aufzufassen, so lange die Konfigurationsänderungen im System langsam gegenüber den Bewegungsperioden erfolgen.

Auf Felderscheinungen, welche das vollkommenste Analogon zu monocyklischen Bewegungsmechanismen bieten, kommen wir im II. Abschnitt bei dem galvanischen Strome zu sprechen. Die Formeln 20—26, namentlich letztere, werden uns bei der „Induktion" wieder begegnen.

Ausser den Monocykeln kommen aber auch Systeme in sich zurücklaufender Bewegungen vor, bei denen die Geschwindigkeit eines jeden Teilchens durch zwei voneinander unabhängige cyklische Geschwindigkeiten q_1 und q_2 bestimmt ist, für welche also im einfachsten Falle

$$v_i = a_i q_1 + b_i q_2$$

ist. Solche Systeme nennt VON HELMHOLTZ „Dicykel".

Das Kegelradgetriebe stellt uns ein einfaches mechanisches Modell eines solchen Dicykels dar. Zwei Kegelzahnräder, von denen jedes auf einer selbstständigen Achse aufgekeilt ist, greifen in den Zahnkranz eines dritten Kegelrades ein. Dessen Geschwindigkeit hängt von den Antriebsgeschwindigkeiten der beiden ersten Räder in einer durch die Formel allgemein beschriebenen Weise ab. Wir

kommen später bei den Erscheinungen der wechselseitigen elektrischen Induktion auf dieses wichtige mechanische Analogon der Dicykelbewegung zurück.

Sind die Geschwindigkeiten der einzelnen Massen eines Systems gleichzeitig von vielen cyklischen Geschwindigkeiten abhängig,

$$v_i = a_i q_1 + b_i q_2 + c_i q_3 + \ldots$$

so spricht man von einem „polycyklischen Bewegungssysteme", einem „Polycykel".

144. Langsam veränderliche Parameter. — Die in der Natur uns entgegentretenden in sich zurücklaufenden Bewegungen sind gewöhnlich derart, dass sie oft in derselben Weise hintereinander ablaufen, ehe eine merkliche Änderung in der Art und Weise, wie sie ablaufen, eintritt. Nach einer Zeit, welche lang ist im Vergleiche zu der Periodendauer der cyklischen Bewegung selbst, können aber allmähliche Änderungen des Bewegungszustandes hervortreten, so dass die späteren Cykeln unter etwas anderen Bedingungen ablaufen als die ersten. Man kann diese Zustandsänderungen als „langsam" vor sich gehend bezeichnen im Vergleiche zu den schnelleren Cykelbewegungen selbst; der Wert der cyklischen Geschwindigkeit entscheidet darüber, ob man eine Änderung als langsam oder schnell zu betrachten hat.

So ist die Achsendrehung der Erde eine Cykelbewegung, welche im Laufe eines Tages abgeschlossen ist. Im Laufe vieler Tage und Jahre ändert sich die Richtung der Erdachse langsam im Raume infolge der Nutation und Präzession Die Nutations- und Präzessionsschwankungen erfolgen „langsam" im Vergleich zur täglichen Cykelbewegung.

Man nennt Grössen, welche den Zustand eines Körpers oder Körpersystems bestimmen: „Parameter". Die die langsamen Zustandsänderungen beschreibenden Parameter können wir als „langsam veränderliche Parameter" bezeichnen. Schreiben wir für sie im Gegensatz zu den cyklischen Koordinaten lateinisch p, so sind diese Variablen in den Bewegungsgleichungen durch Folgendes charakterisiert (vergl. § 140):

Parameter p:	kommt in den zu bildenden Ausdrücken vor.
Änderungsgeschwindigkeit q:	ist klein (gegen q).
Änderungsbeschleunigung $\frac{dq}{dt}$:	ist erst recht klein.

II. Abschnitt.

Erscheinungen des galvanischen Stromes und des Elektromagnetismus.

Dem induktiven Charakter aller Naturwissenschaften entsprechend gehen wir bei dem in diesem Abschnitt zu behandelnden „galvanischen Strome" von seinen Eigenschaften aus, ohne zunächst nach seinen Entstehungsursachen zu fragen. Ebenso hat man die Besonderheiten der Schwerkraft erforscht, ohne bis heute über das Zustandekommen derselben irgend welche befriedigende Vorstellung zu haben. Wir betrachten den „Strom" als eine gegebene Naturerscheinung und ziehen die Bezeichnung „galvanisch" der gleich üblichen des „elektrischen Stromes" schon deshalb vor, weil erstere nicht an die zunächst weiter abliegende Beziehung unseres Phänomens zu den Erscheinungen des geriebenen Bernsteins, des „Elektron" (ἤλεκτρον) erinnert. Abweichend von dem gewöhnlichen Gange der Darstellung, stellen wir dabei die magnetischen Eigenschaften des Stromes voran. Sie sind die einfachsten, da sie nur durch die geometrischen Bestimmungsstücke des Trägers der Erscheinung, des „Stromträgers", und durch seine Umgebung bedingt sind. Die Besonderheiten des Materials, und Vorgänge, welche sich zwischen den kleinsten Teilchen des Trägers abspielen, bleiben dabei noch aus dem Spiele.

Wir beginnen daher mit dem Stromfelde und seinen Beziehungen zu Magnetfeldern, also mit den Erscheinungen des „Elektromagnetismus"; die sogenannte Stromstärke ist uns zunächst nur eine den Feldzustand bestimmende Grösse. Erst im II. Teile des Buches werden wir bei den Induktionserscheinungen die wichtigste, aus den elektromagnetischen Wechselwirkungen hervorgehende Methode zur Erzeugung der hier benutzten „galvanischen Ströme" kennen lernen. Wir betrachten sie zuerst nur als rein magnetische Phänomene, welche sich in der Umgebung namentlich drahtförmig gestreckter Metallmassen ausbilden, wenn wir sie an andere, sogenannte „Polklemmen" anschliessen.

Was sich hinter diesen Klemmen verbirgt, lassen wir vorläufig ausser Betracht.

8. Kapitel.

Einachsige Magnetkraftfelder. (Einfacher Strom.)

In dem vorliegenden Kapitel stellen wir zunächst die magnetische Eigenschaft eines drahtförmigen Stromträgers fest und ermitteln die Struktur des ihn umgebenden Feldes, indem wir die Gestalt und den Richtungssinn seiner Kraftlinien verfolgen. Um mit möglichst einfachen Fällen zu beginnen, strecken wir das zu untersuchende Drahtstück geradlinig aus und entfernen alle übrigen mit den Polklemmen verbindenden Teile des Trägers so weit, dass eine Beeinflussung durch sie nicht zu befürchten ist. Es wird sich dabei ein ganz eigentümliches Magnetfeld ergeben, welches sehr von den im I. Abschnitt untersuchten abweicht. Wenn wir indessen den Leiter zu einer Schleife zusammenbiegen, deren Teile sich nirgends berühren, aber doch sehr nahe aneinander vorüber gehen, so erhalten wir ein Gebilde, welches mit den magnetischen Lamellen § 23 eine grosse Ähnlichkeit hat. Indem wir uns dabei an den achsialen Charakter der Magnetkraftlinien und ihre Symmetrieeigenschaften erinnern, § 120, gelangen wir zu Hilfsvorstellungen, welche die üblichen Bezeichnungen: „Strom", „Stromrichtung", „Leiter", „Strombahn" u. s. w. auch in unser Begriffssystem einzureihen gestatten, ohne dass wir darum annehmen müssten, dass in dem Leiter wirklich ein gewisses Etwas „fliesst".

In einem besonderen Abschnitt wollen wir uns dann noch einmal des durchgreifenden Unterschiedes von Magnetkraftfeldern und „Stromfeldern" bewusst werden; wir bemerken, dass dieser Unterschied wesentlich durch die räumliche Anlage der beiden Arten von Kraftfeldern bedingt ist.

A) Konachsiale Magnetkraftliniensysteme.

145. Der galvanische Strom als System magnetischer Kraftlinien. — Es handelt sich zunächst um den Nachweis, dass wirklich mit dem Auftreten eines sogenannten „galvanischen Stromes" eine

magnetische Wirkung verbunden ist und um nähere Erforschung des sich hierbei ausbildenden Magnetkraftliniensystems.

Versuch 51. Ein ca. 5 mm dicker, 60 cm langer, an den Enden etwas umgebogener Kupferdraht wird in eine mit weissem Kartonpapier beklebte flache Holzrinne gelegt und mit Eisenfeilicht gleichmässig bestreut. Es bleibt nichts an dem Drahte hängen ausser einigen durch Adhäsion festgehaltenen Teilchen. Schliesst man aber mit Hilfe von Leitungsschnüren und messingnen Klemmschrauben den Kupferdraht an Polklemmen metallisch an, so bleibt eine dichte Schicht von Eisenteilchen an dem Drahte haften, die ihn filzartig gleichförmig umkleidet. Der Draht ist zum Träger magnetischer Wirkungen geworden. Löst man die Verbindung, so fallen die Späne wieder ab.

Wir haben also hier nur einen temporären Magneten vor uns ohne merkliche Remanenz (vergl. § 101) im Gegensatz zu den im 1. Kapitel betrachteten „Dauermagneten".

Der Draht wird von Rippen aus aneinander geketteten Eisenteilchen gleichmässig umschlossen, keine Stelle seiner Oberfläche ist besonders bevorzugt, wie es die Polarregionen eines Magneten sind; die Späne bilden nicht Bärte oder Büschel, sondern geschlossene, den Draht umgebende Ringe.

Will man diesen wichtigen Grundversuch einem grösseren Auditorium vorführen, so empfiehlt sich die Projektionsmethode. Ein nicht zu dünner Kupferdraht wird über eine Glasscheibe gebogen, welche in den vertikalen Teil des durch geeignete Reflexionen (vergl. p. 6) abgelenkten Strahlenbündels der Projektionslampe gebracht wird. Auf die Scheibe streut man Eisenfeilicht. Beim Anschliessen des Drahtes an die Polklemmen springen die Teilchen auf den Draht zu und umkleiden denselben, beim Abnehmen einer Zuleitungsschnur fallen sie ab.

Schon der Versuch 51 legt die Vermutung nahe, dass für das entstehende Magnetfeld die Längsrichtung des Drahtes in besonderer Weise maassgebend ist. Ähnlich wie beim Stabmagneten § 21 untersuchen wir hier die Struktur des Feldes in zwei zu einander senkrechten Ebenen, wodurch wir ein vollständiges Bild über die räumliche Anordnung des Kraftlinienverlaufes erhalten.

a) Verlauf der Kraftlinien in einer der Trägerachse parallelen, dem Leiter benachbarten Ebene. Wir legen das geradlinige Leiterstück, welches wir zum Stromträger machen, horizontal und bedecken es mit einem dünnen Papierblatt.

Die folgende Anordnung, welche wir noch zu anderen Versuchen verwenden, empfiehlt sich besonders für Vorlesungszwecke:

In ein Brettchen von ca. 12 cm Breite und 20 cm Länge wird eine durch die Mitte gehende den Schmalseiten parallele Nut von solcher Tiefe ausgehobelt, dass ein etwa $^1/_2$ cm dicker Kupferdraht ganz darin versenkt werden kann; die obere Kante desselben soll sich mit der Oberfläche des Brettes gerade vergleichen.

Auf dieses legt man ein Stück dünnes, weisses Schreibpapier, welches durch Heftzwecken festgehalten wird.

Streut man Feilicht auf, so entsteht beim Klopfen das Bild Fig. 46. Man sieht, wie sich über dem Drahte die Eisenteichen zu feinen Rippen zusammenschliessen, die quer zur Drahtrichtung verlaufen. Hier in unmittelbarster Nähe muss die Kraft, welche die Teilchen sammelt, am stärksten sein. Denn zu beiden Seiten der Zone mit den Rippen liegen zwei begleitende hellere Striche, aus denen die Späne herangezogen worden sind. In grösserer Ferne lässt sich keine Einwirkung erkennen. Dort kann in die Ebene der Bildfläche nur eine sehr schwache Komponente der magnetischen Kraft fallen.

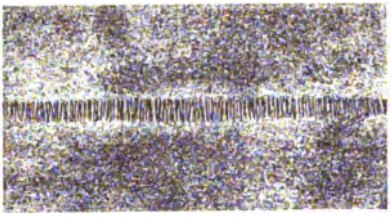


Fig. 46.

b) Verlauf der Kraftlinien in einer zu der Trägerachse senkrechten Ebene. Die vorigen Versuche wiesen unzweideutig darauf hin, dass der Verlauf der Kraftlinien in der Umgebung des Drahtes senkrecht zur Richtung desselben erfolgt. Wir erhalten daher erst dann einen klaren Einblick in die Anordnung des Feldes, wenn wir die Kraftlinienbilder in einer horizontalen, zu einem vertikal gestellten geradlinigen Drahtstück senkrecht stehenden Ebene untersuchen.

Dazu dient zunächst etwa die folgende einfache Anordnung: Durch einen ca. 12 × 15 cm grossen, 6 cm dicken Holzklotz ist in der Mitte ein ca. 0,4 cm weites, zur Oberfläche genau senkrecht stehendes cylindrisches Loch gebohrt, durch das ein unten umgebogener, 0,4 cm dicker Kupferdraht gezogen ist, der oben vertikal herausragt, dessen unteres Ende aber, in einer Nut verborgen, seitlich unter dem Klotze hervorgezogen ist. Auf den Klotz wird ein Kartonblatt gelegt, in dessen Mitte mittels eines Durchschlages ein kreisförmiges Loch von der Grösse des Drahtquerschnittes geschlagen ist. An die Enden des Leiters werden die Verbindungsklemmen angesetzt.

Will man den Versuch einem grösseren Auditorium vorführen, so bedient man sich besser noch des folgenden Apparates Fig. 47, der namentlich auch bei späteren Versuchen noch mehrfach Verwendung findet:

Auf einem Grundbrette A von 40 × 40 cm² Fläche ist vertikal das 100 cm hohe, 10 cm breite Brett B befestigt. Das Brett A steht auf drei Füssen und ist mit einem Rande versehen; in einer Ecke befindet sich eine durch einen Holzpflock zu verschliessende Öffnung (in der Figur links) zum Entfernen etwa verschütteten Quecksilbers oder herabgefallener Feilspäne. In mittlerer Höhe trägt der Ständer B das horizontale Brettchen C von 30 × 20 cm² Fläche. Dasselbe besitzt in seiner Mitte eine Anzahl von Durchbohrungen für die hier durchzuführenden Drähte; auf dasselbe werden die Kartonpapiere P gelegt. Am oberen Ende ist auf dem Ständer B das 10 cm lange Querbrett D befestigt. Auf D, sowie auf dem Grundbrette A sind die Holzklötze E_1 und E_2 angebracht, von denen jeder zwei gleich tiefe, voneinander durch eine schmale Holzzwischenwand getrennte, mit Queck-

silber gefüllte Rinnen enthält, in welche die Drahtenden eingetaucht werden, vergl. die links stehende Nebenfigur, welche einen dieser Klötze im Querschnitt von vorn gesehen darstellt. Die Mittellinien der Rinnen in E_1 sind von der Vorderfläche von B um ca. 8, die von E_2 um ca. 10 cm entfernt. Zu jedem Holzklotz führt von den Klemmschrauben K_1 und K_2 aus ein Zuleitungsdraht H_1 bezw. H_2. Bei den zunächst hier anzustellenden Versuchen wird nur ein geradliniger Leiter L benutzt. Derselbe besteht aus 4 mm dickem Kupferdraht, welcher oben hakenförmig umgebogen ist. Seine Enden sind amalgamiert. Mit ihnen taucht er in je eine der Quecksilberrinnen der Holzklötze E_1 und E_2, nachdem er durch eine entsprechende Durchbohrung des Brettes C und des Kartonpapieres P hindurchgeschoben worden ist. Im 12. Kapitel werden die Felder in der Umgebung zweier gleichzeitig vorhandener Träger untersucht. Dazu wird an dem Apparate neben dem ersten ein zweiter ähnlich gestalteter Draht L_2 eingehängt. Um beide Drähte gleichsinnig oder im entgegengesetzten Sinne in den Kreis der hier vereinigten Leiter einschalten zu können, befindet sich noch an der Hinterfläche des vertikalen Trägers B ein Hilfsdraht zwischen den beiden Zuleitungen H_1 und H_2, dessen Enden RR in die eine oder die andere der beiden Rinnen oben oder unten getaucht werden können. Zur Vermittelung einer metallischen Zuleitung aus einer Rinne in die Nachbarrinne dient ein Kupferdrahtbügel b (vergl. die Nebenfigur) mit amalgamierten Enden. Wir werden auf diese gleichzeitige Einschaltung von zwei linearen Kraftlinienträgern erst später zu sprechen kommen.

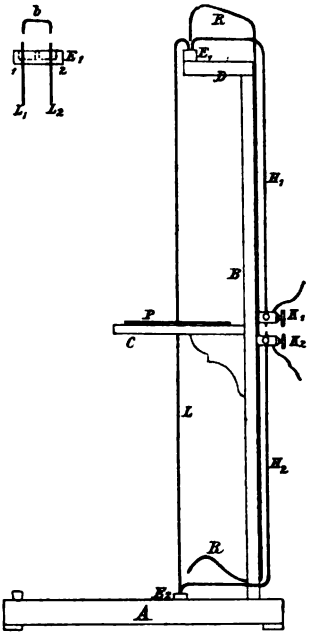


Fig. 47.

Alle diese Drähte H_1, H_2 und RR bestehen am besten aus Leitungsschnüren, welche aus vielen dünnen Einzeldrähten zusammengedreht und mit einer isolierenden Seiden- oder Baumwollenschicht umklöppelt sind; an den Enden sind dickere Drahtstücke angelötet. Diese Schnüre lassen sich leicht selbst bei grossem Querschnitt in die gewünschte Form biegen.

Das Kraftlinienbild, welches man in der zu dem geradlinigen Drahte senkrechten Ebene erhält, ist das der Fig. 48. In der Mitte des Bildes liegt der kreisförmige Querschnitt S des cylindrischen Drahtes. Rings um ihn herum schliessen sich die einzelnen Feilichtteilchen zu geschlossenen Ringen zusammen, welche den Draht konzentrisch umgeben. Nirgends sehen wir Kraftlinien entstehen oder verschwinden; es giebt in unserem Felde also weder Quellpunkte noch Sinkstellen, d. h. es lassen sich keine bestimmten Pole angeben, von denen etwa die beobachteten magnetischen Wirkungen ausgingen. Alle Kraftlinien sind schon im freien Felde geschlossene Linien, ohne dass sie, wie bei den Dauermagneten, erst durch die von uns in dem Inneren

derselben vorauszusetzenden aber immerhin hypothetisch bleibenden Molekülketten ihren Schluss erhalten müssten.

Nahe dem Drahte muss die Kraft am stärksten sein; denn wir bemerken hier das Sichzusammenhäufen und Fortrutschen der Feilspänchen, was nach unseren Erfahrungen an den Dauermagneten immer an den Stellen eintritt, an denen die magnetische Wirkung am grössten ist. Bis auf ca. 1 cm Entfernung vom Drahte finden wir die Eisenteilchen fest aneinander geschlossen, in 1—2 cm Entfernung wird der Zusammenhalt allseitig ein lockerer, in grösserer als 2 cm weiter Entfernung ist die Kraft nicht mehr imstande gewesen, in merklicher Weise richtend auf die Teilchen zu wirken.

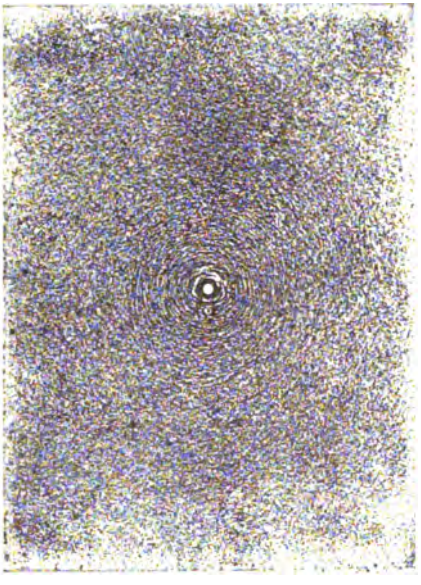


Fig. 48.

Teile unseres Trägers, welche in grösseren als 4 cm betragenden Entfernungen aneinander vorübergeführt sind, beeinflussen sich in unserem Falle also nicht mehr merklich.

146. Begriff der Achse des konzentrischen Magnetkraftliniensystems oder der Kraftachse (Faraday). — Sämtliche Kraftlinien in den verschiedensten zu dem geradlinigen Drahte senkrechten Bildebenen bilden in den hier untersuchten Kraftfeldern konzentrische Ringe, deren Mittelpunkt stets im Drahte selbst liegt. Alle Kraftlinien sind also auf Cylinderflächen aufgereiht, welche den Träger als Achse besitzen. Wir nennen diesen daher passend „Achse des Kraftlinienfeldes“ und sprechen von achsialen Kraftfeldern. Mit Faraday wollen wir den kürzeren Ausdruck: „Kraftachse“ einführen, ohne damit etwas anderes von dem Träger aussagen zu wollen, als dass er die Achse eines konzentrischen Magnetkraftliniensystems geworden ist.

147. Richtungssinn der konzentrischen Kraftlinienringe. — Um festzustellen, ob auch den konzentrischen Kraftlinienringen ein bestimmter Richtungssinn innewohnt, wenden wir den im 2. Kapitel erwähnten leicht beweglichen Magnetstab oder eine kurze Nadel an, wenn wir auch erst später auf die Wechselwirkung zwischen unseren

einachsigen Magnetkraftfeldern und den Dauermagneten eingehender zu sprechen kommen. Hier genügt es aus beobachteten Bewegungsantrieben auf den Sinn des Kraftlinienverlaufes zu schliessen.

Versuch 52. Wir biegen einen langen dicken Kupferdraht zu einem Rechteck von etwa $^1/_2$ m Seitenlänge zusammen, welches wir vertikal stellen und hängen den ca. 1 m langen Magnetstab § 28 so auf, dass sein unterer Pol in 1—2 cm Entfernung neben der Mitte einer vertikalen Rechteckseite frei schwebt. Der andere Pol ist dann genügend weit ausserhalb des Wirkungsbereiches unseres Stromes. Ferner sind (vergl. Fig. 48) auch die übrigen Teile des achsialen Feldes dann so weit von dem gerade betrachteten Trägerstück entfernt, dass eine Beeinflussung von ihrer Seite her nicht zu befürchten ist. Stellt man die Verbindung des Drahtrechteckes mit den Polklemmen her, so wird der Magnetpol zur Seite geschoben, d. h. in bestimmter Richtung längs der Kraftlinien des achsialen Systems bewegt.

Der Pol kann den Kraftlinien nicht rings um den Draht herum folgen, da der Stab oben an der Rechteckseite anstösst; nichtsdestoweniger lässt er den Kraftliniensinn eindeutig erkennen.

Vertauscht man die Pole des Magnetstabes miteinander, so kehrt sich der Bewegungssinn um:

Den achsialen Magnetkraftlinien wohnt also ein bestimmter Sinn inne; wenn ein Nordpol in einem Sinne von ihnen vorwärts getrieben wird, so wird der Südpol im anderen Sinne bewegt.

Dasselbe findet an den verschiedensten Stellen des Drahtes und in allen Entfernungen von ihm statt, so weit sich überhaupt Wirkungen nachweisen lassen, d. h. bis an die Grenzen des Feldes. Das ganze achsiale Kraftliniensystem hat einen bestimmten Richtungssinn.

Wir können daher schon auf Grund des Kraftlinienverlaufes selbst dem Träger eine bestimmte Richtung zuweisen, ihn z. B. im positiven Sinne durchlaufen denken, wenn in dieser Richtung die Kraftlinien uhrzeigermässig um ihn herumzugehen scheinen. Dass diese Festsetzung mit der üblichen in Übereinstimmung stehen würde, zeigen die folgenden Betrachtungen, dass sie auch zweckmässig ist, geht aus späteren Weiterbildungen unseres Begriffssystems hervor.

Vertauschen wir die Verbindungen des Drahtrechteckes mit den Polklemmen, so kehrt sich mit der Richtung des Überganges von einer zur anderen im Träger der Richtungssinn des ganzen Kraftliniensystems um. Wir können dies kurz so ausdrücken: Den Klemmen, denen wir die magnetisierende Wirkung entnehmen, wohnt also eine bestimmte polare Verschiedenheit inne.

Gewöhnlich ist diese Polarität an ihnen schon durch die Zeichen + und − zum Ausdruck gebracht oder, wenn auch nicht so gut, durch verschiedene Buchstaben, z. B. *K* und *Z*.

Wir wollen die an die Klemmen angesetzten Drahtleitungen immer im Richtungssinne + nach − oder *K* nach *Z*, also im Sinne des Alphabets betrachten (positiver Richtungssinn). Dann können wir das Ergebnis sämtlicher Versuche eindeutig so formulieren:

Blicken wir längs des Drahtes in positiver Richtung hin, so wird ein Nordpol immer im Sinne des Uhrzeigers, ein Südpol immer diesem Sinne entgegengesetzt längs der Magnetkraftlinien des konachsialen Systems bewegt.

Die Kraftlinien laufen also uhrzeigermässig um die Kraftachse herum, wenn wir sie in dem Sinne + nach − oder *K* nach *Z* betrachten.

Wir bezeichnen in Zukunft durch rot gefärbte Blechpfeile oder die Richtung der Mittelfinger diesen Sinn an den Drähten, welche wir zu Kraftachsen machen, wie wir durch weisse Pfeile und die Zeigefinger die Richtung von Magnetkraftlinien bezeichnen wollten.

Da auch die hier studierten Kraftlinien sich Nord- und Südpolen gegenüber in der angegebenen Weise polar verschieden verhalten, so muss eine kurze Magnetnadel sich quer zur Kraftachse stellen.

Versuch 53. Wir setzen auf das Brett *C* des Apparates Fig. 47 die kleine Magnetnadel mit dem Schreibstift Fig. 7, am besten zunächst so, dass sie im magnetischen Meridian des Drahtes dicht vor diesem steht. Stellt man die Verbindungen mit den Polklemmen her, so schlägt die Nadel um und stellt sich quer zum Drahte. Blickt man diesem entlang, wie es der Sinn + nach − erfordert, so wird der *N*-Pol nach rechts, der *S*-Pol nach links abgelenkt. Führt man die Nadel immer in ihrer Richtung den Nordpol vorausschiebend weiter, so legt sie sich stets aufs neue um, so dass sie senkrecht zur Verbindungslinie ihrer Mitte mit dem nächsten Punkte des Drahtes steht. Folgt man der jeweiligen Nadelstellung, so wird man rings um den Draht herumgeführt, ohne dass der Richtungssinn je wechselte. Die Nadel zeigt immer die Richtung der Tangente an die Kraftlinie an, der Schreibstift verzeichnet auf dem Kartonblatt sehr nahe (Erdmagnetismus!) einen Kreis.

Wechselt man die Verbindungen nach den Polklemmen, so schlägt auch die Nadel um, das gesamte Kraftliniensystem hat sich umgekehrt.

Von nun an wollen wir von irgend einem der zahlreichen Hilfsmittel Gebrauch machen, den Richtungssinn in einem Leiterstück schnell umzukehren. Das Loslösen und Umwechseln der Verbindungen mit den Polklemmen ist unbequem, zeitraubend und der Funkenbildung wegen beschwerlich. Besser ist es, eine Kom-

bination von Leiterstücken vorzulegen, bei denen man etwa durch Umlegen einer Wippe oder durch Drehen einer Walze die Richtung schnell wechseln kann. Eine solche Vorrichtung nennt man Kommutator oder Umschalter; sie wird in zahlreichen Formen in den Handel gebracht. Wir verbinden mit ihnen einen roten Pfeil, der in jedem einzelnen Falle erkennen lässt, wie die Richtung + nach − in dem vorgeschalteten Leiterstücke liegt.

148. Bewegungen im konzentrischen Kraftliniensysteme. — Die kinematischen Hypothesen erfordern zur Erklärung der in den einzelnen Feldpartien enthaltenen Energie in sich zurücklaufende Bewegungen von dem in § 121 festgesetzten Drehungssinne längs der Kraftlinien.

Blicken wir längs der Achse eines konzentrischen Kraftliniensystems im Richtungssinne + nach − hin, so gehen die Kraftlinien uhrzeigermässig um diese herum. Da die Drehbewegungen längs der Kraftlinien ebenso verlaufen, so müssen sich die Teilchen auf der Innenseite der Kraftlinienringe im Sinne + nach − bewegen.

Fig. 49 giebt einen schematischen Längsschnitt durch das Feld. S ist der Stromträger, in unserem Falle der geradlinig gestreckte Leiterteil. Die vier Kreise r_1 bis r_4 oberhalb und unterhalb stellen die Querschnitte von je einer um den Draht S herumgehenden magnetischen Kraftröhre dar. Hat die Kraftachse S die Richtung + nach − von rechts nach links in unserer Figur, so müssen wir

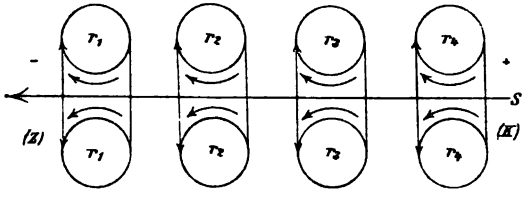


Fig. 49.

uns oberhalb S die Magnetkraftlinien in die Zeichenebene hineingehend, unterhalb S aus dieser heraustretend denken. Das auf diese oberen Querschnitte gerichtete Auge sieht also den Kraftlinien selbst entlang. Die Drehbewegungen gehen uhrzeigermässig vor sich, so wie es die Pfeile andeuten. Die unteren Querschnitte müssen in der Zeichnung Bewegungen im umgekehrten Sinne enthalten. Da die Kraftröhren bis an die Drahtoberfläche hin direkt verfolgbar sind, so muss in den benachbarten Teilen des Feldes eine Bewegung stattfinden, wie sie die inneren Pfeile andeuten, d. h. im Sinne der Richtung + nach − oder K nach Z.

An unserem Apparate Fig. 47 versinnlichen wir uns diese Verhältnisse am einfachsten dadurch, dass wir eine Reihe von geschlossenen Kraftröhren § 127 über den Draht L_1, diesen als Achse benutzend, übereinander legen. Haben wir die Ringe der Richtung des roten Pfeiles an diesem Drahte (vergl. § 147) entsprechend orientiert, so tritt der genannte Bewegungssinn unmittelbar hervor.

Dies ermöglicht uns, in einfacher Weise ein Bild von den Bewegungen in dem konzentrischen Kraftlinienfelde zu benutzen, welches wir uns jederzeit vergegenwärtigen können und das sich zur unmittel-

baren Ableitung aller folgenden Beziehungen und Regeln nützlich erweist: Die Bewegungen in der Umgebung einer Kraftachse gleichen denen einer Reihe dicht aufeinander folgender Rauchringe, welche in derselben Richtung fortschreiten.

Systeme von konachsialen Rauchringen. Mit dem Rauchringapparate § 135 kann man durch rasche Aufeinanderfolge der einzelnen Stösse eine ganze Schar von Wirbelringen erzeugen, die alle dieselbe Achse haben. Klopft man in dem Rythmus $\smile -$, d. h. schwachstark, so erhält man erst einen Ring, der träge voranschreitet, dann einen, der schnell folgt. Ist die Bewegung des zweiten Ringes zu heftig, so zerstört er den ersten. Im anderen Falle gelingt es leicht, einem voranschreitenden Wirbelring einen schneller folgenden nachzusenden, der ihn einholt und sich ihm konzentrisch anschmiegt. Man bemerkt dann folgendes:

a) Jeder der beiden Ringe bewahrt seine Individualität. Erfolgt der Stoss des nachfolgenden genau achsial, so behalten beide ihre Ringgestalt bei. Keinesfalls tritt eine Mischung der wirbelnden Luftteilchen ein, die Wirbelfäden bestehen also nebeneinander, ohne sich zu zerstören.

b) Prallt der zweite Ring kräftig an den ersten an, so erweitert sich dieser, lässt den zweiten, schneller vorandrängenden durch seine Ringhöhlung hindurchtreten und schliesst sich wieder. Dieses Hindurchkriechen eines Wirbelringes durch einen anderen zeigt am klarsten, wie diese in sich zurücklaufenden Bewegungen im Raume nebeneinander bestehen können.

B) Achsenschleifen.

Fremdartig und von den Kraftlinienfeldern des I. Abschnittes gänzlich verschieden erscheint uns das eben betrachtete konzentrische Ringsystem magnetischer Linien, welches den Träger eines galvanischen Stromes begleitet. Die schon früher angewendeten Hilfsmittel: Eisenfeilicht, bewegliche Magnetpole, kleine magnetische Probiernadeln überzeugten uns indessen davon, dass wir echte Magnetkraftlinien vor uns haben. Um diese achsialen Felder zu früher betrachteten in engere Beziehung bringen zu können, müssen wir die einfachste geometrische Gestalt der Achse, die geradlinige, verlassen und zu komplizierteren Feldern übergehen. Zu diesen gelangen wir dadurch, dass wir den Träger geeignet biegen, wobei die Kraftlinien den einzelnen Teilen der Achse folgen.

149. Umgestaltungen des konzentrischen Kraftliniensystems durch Deformation der Achse. — Wir biegen eine Kraftachse zu einer ebenen kreisförmigen Schleife derart zusammen, dass zwei vorher weit voneinander entfernte Teile derselben sehr nahe in entgegengesetzter Richtung, ohne sich zu berühren, aneinander vorübergeführt werden. Die an die einzelnen Achsenteile gebundenen Kraftlinien werden dadurch zu einem Bündel zusammengeschnürt, welches durch die fast geschlossene Schleife hindurchgeht. Diese Linien bleiben bei den Achsenbiegungen noch immer in sich zurücklaufende Ringe. In der Nähe

des Trägers, wo die Kraft am grössten und der Inhalt der einzelnen Ringe an magnetischer Eigenenergie nach unseren vorläufigen Erfahrungen darüber am reichsten ist, wahren sie sogar angenähert ihre Kreisform. Dadurch aber, dass wir Ringe, welche weit voneinander entfernt waren, zusammenschnüren, werden die Induktionsröhren geringeren Energieinhalts derart deformiert, dass sie im Inneren der Schleife dichter an den Träger heran zusammengedrängt werden und an der Aussenseite derselben weiter auseinander gehen.

a) Kraftlinienbild der Achsenschleife. Um durch Eisenfeilicht den Kraftlinienverlauf im Inneren und Äusseren einer Achsenschleife zu veranschaulichen, biegt man einen dicken Kupferdraht halbkreisförmig um, steckt beide Schenkel durch entsprechende Öffnungen eines horizontal liegenden Kartonblattes und führt die Drahtenden so weit zusammen, dass ein Vollkreis entsteht, ohne dass die aneinander vorübergehenden Drahtteile sich berühren, Fig. 50. Bei einer durch die Pfeile angedeuteten Achsenrichtung + nach − verlaufen die Kraftlinien so, wie es in der schematischen Fig. 50 angedeutet ist. Fig. 51 giebt das direkte Feilichtbild.

Die Richtung der Kraftlinien können wir dabei leicht aus der der Kraftachse ableiten. Verläuft diese, wie in Fig. 50 angenommen ist, von links nach rechts, so

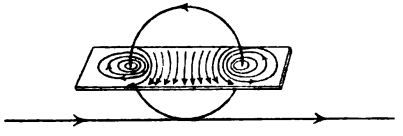


Fig. 50.

Fig. 51.

gehen die Kraftlinienringe links von oben gesehen uhrzeigermässig um den Träger herum, sie quellen also aus dem Inneren der Schleife nach vorn heraus; ebenso sind die rechtsliegenden und alle dazwischen befindlichen Kraftlinien auf den Beschauer zu gerichtet. Blicken wir auf die Stromschleife, so sehen wir sie der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzt durchlaufen; in einem solchen Falle quellen uns die Kraftlinien entgegen. Die magnetische Kraft hat also zu der erzeugenden Achsenschleife dieselbe Richtung wie die Linie vom Zeiger nach dem Werk zur Uhrzeigerbewegung.

Die Beziehung der Leiterschleife zu den Kraftlinien kann man sich auch leicht durch die ringförmig zusammengebogenen ersten Finger (Daumen und Zeigefinger) beider Hände veranschaulichen, welche man kettengliedartig ineinander schliesst. Geben die Zeigefinger für beide Liniengebilde die positive Richtung an, so hat man den der rechten Hand von aussen durch den von Zeigefinger und Daumen der linken Hand gebildeten Ring einzuführen; dann stellt der Ring der Rechten die Stromachse, der der Linken die Kraftlinien dar oder umgekehrt.

b) Modell des Kraftröhrenbündels einer Achsenschleife. Über ein Stück Kupferdraht *S S* Fig. 52 schiebt man eine Reihe von geschlossenen Kraftlinienringen von gleicher Grösse in der der Stromrichtung + nach − entsprechenden Weise. Man biegt den Draht zu einer Schleife; die Ringe werden im Inneren zusammengedrängt und divergieren nach aussen gleichmässig. Die

Pfeile lassen erkennen, dass die Richtung der Bewegungen im Inneren der Schleife überall dieselbe ist und zwar die der Kraftachse.

Das Modell Fig. 52 mit den auf ihm bezeichneten Drehbewegungen giebt ein Bild der Vorgänge in dem Felde einer Stromschleife nach den kinetischen Hypothesen, erläutert also den „vortex sponge", den „Wirbelschwamm", zu dem der Ausbau dieser kinetischen Auffassung in der englischen Schule geführt hat. So kompliziert diese Bewegungen auch erscheinen mögen, so ist ihre Anordnung doch sehr übersichtlich, da alle Einzelbewegungen eine ganz bestimmte Beziehung zu der Achsenrichtung zeigen. Ausserdem lässt das Modell die Anordnung und Verteilung der Energie in der Umgebung der Schleife deutlich erkennen.

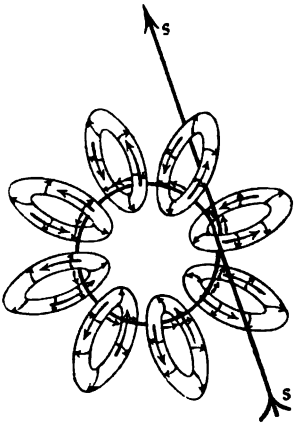


Fig. 52.

150. Eine Achsenschleife als Magazin magnetischer Feldenergie. — Jede Induktionsröhre, oder soweit wir uns in einem Medium von der Permeabilität 1 befinden, jede Kraftröhre, umschliesst einen gewissen Vorrat an magnetischer Feldenergie (vergl. § 119). Wenn wir nun beim Zusammenbiegen eines Stromträgers in dem schleifenartigen Inneren Kraftröhren, welche ursprünglich weit voneinander getrennt waren, zusammendrücken, so sammeln wir in dieser Schleife eine gewisse Menge Energie, ähnlich wie z. B. in einem gehobenen Gewichte ein gewisser Energievorrat aufgehäuft ist.

Dazu müssen wir eine Arbeit leisten, wir müssen den Druck der einzelnen Energieröhren, den sie quer zu einander ausüben, durch unsere Muskelkraft überwinden.

Dass ein solcher Querdruck zwischen den einzelnen in einer Schleife eingeschlossenen Kraftröhren wirklich vorhanden ist und sich auf den Leiter selbst überträgt, davon können wir uns durch Versuche leicht überzeugen.

Versuch 54. Ein schmales, kurzes, dünnes Goldband wird mit seinen Enden an Stromzuführungsdrähte angeschlossen; hält man diese dicht aneinander, so sucht sich die frei herabhängende Bandschleife jedesmal, wenn man den Strom schliesst, zu erweitern, indem sich die Seiten ausbauchen; sie strebt der Kreisform zu, welche dadurch ausgezeichnet ist, dass sie bei gegebenem Umfange die grösstmögliche Fläche umschliesst. Das durch einen Stromkreis hindurchgehende Kraftlinienbündel übt auf den umschliessenden Träger einen Druck aus wie ein eingeschlossenes Gas auf die Wände seines Gefässes.

Eine Stromschleife mit ihren Kraftlinien verhält sich also wie ein

Magazin magnetischer Feldenergie. Diese ist umso grösser, je mehr Kraftlinien dem Träger ursprünglich eigen waren, je dichter sie sich um ihn zusammendrängten und ein je längeres Stück des Trägers wir in unsere Schleifenbildung hineingezogen haben. Der Inhalt ist ferner viel grösser, wenn die Umgebung des Trägers oder ein Teil derselben den Kraftlinien günstige Durchgangsbedingungen liefert, wenn also z. B. weiches Eisen im Inneren der Achsenschleife vorhanden ist. Wir kommen auf diese wichtigen Verhältnisse später noch ausführlicher zurück. Hier genüge diese vorläufige Hindeutung.

151. Die Achsenschleife als Äquivalent einer magnetischen Doppelfläche. — Eine schleifenartige Biegung der Achse eines konzentrischen Magnetkraftliniensystems führt zu einem Gebilde von der Art einer magnetischen Lamelle, welche den Stromträger zur alleinigen und vollständigen Kontur hat. Denn auch sie sendet, wie die in § 23 und § 128 besprochenen Modelle erläutern, auf der einen Seite Kraftlinien aus, auf der anderen nimmt sie solche wieder auf. Die eine Seite verhält sich wie die nordmagnetische (rote) Fläche des in § 23 besprochenen Modelles, die andere wie die südmagnetische (blaue). Der Vergleich mit den Figuren 50 und 52 lässt die folgende Regel erkennen:

Blickt man die Fläche einer Achsenschleife an, so treten die Kraftlinien heraus, die Fläche erscheint nordmagnetisch, wenn die Achsenrichtung der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt läuft; dagegen gehen die Kraftlinien hinein, die Fläche erscheint südmagnetisch, wenn die Achsenrichtung uhrzeigermässig um die Schleife herumführt.

Versuch 55. Zur Erläuterung dieses Satzes biegt man einen dicken Aluminiumdraht zu einer kreisförmigen Schleife von der Grösse der in § 23 erwähnten rot und blau beklebten Pappscheibe zusammen und hängt ihn an zwei etwa meterlangen Goldbändern auf. Damit sich der Ring wesentlich nur vor- und rückwärts bewegen, weniger leicht aber drehen kann, und die Goldbänder nicht zur gegenseitigen Berührung gelangen, führt man die Drahtenden dicht aneinander vorbei, streckt sie geradlinig und befestigt die Bänder in Sägeschnitten in den Enden des Drahtes, so dass sie um den Durchmesser des Ringes voneinander entfernt sind. Unter ihn stellt man einen Stift, der seine Ruhelage markiert. Verbindet man die oberen Enden der Bänder unter Zwischenhaltuug eines Kommutators mit entsprechenden Polklemmen, so erhält man in dem Ringe einen sehr leicht beweglichen Träger eines Kraftlinienbündels. Durch Anlegen der Pappscheibe vergegenwärtigt man sich in jedem Falle die Polaritäten der Schleife. Beim Annähern des Nord- oder Südendes eines Magnetstabes erhält man genau die magnetischen Anziehungs- und Abstossungserscheinungen wie sie in § 33 beschrieben wurden.

Man kann auch die mit Spitzen versehenen Enden eines Drahtringes in zwei untereinander stehende Quecksilbernäpfchen hängen (Ampèresches Stativ) und diesen den Strom zuführen. Indessen hindern schon geringe Verunreinigungen der Quecksilberoberflächen die leichte Beweglichkeit des Systems.

Des Vergleiches wegen und um der Anwendungen willen, welche wir davon später machen wollen, denken wir uns eine Achsenschleife mit einer Reihe der durch sie hindurchgehenden Induktionsröhren als Modell ausgeführt, wie es Fig. 53 andeutet.

Eine Anzahl der mit Pfeilen versehenen gleichgerichteten Kraftröhren § 127 wird zu einem Bündel vereinigt und durch einen dicken einmal herumgewundenen

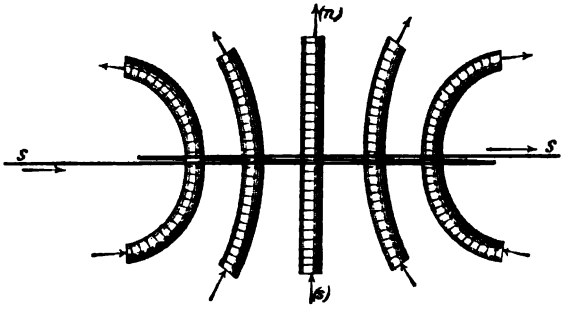


Fig. 53.

Kupferdraht $S\,S$ zusammengeschnürt. Werden die Röhren dem Kraftlinienverlaufe entsprechend etwas nach aussen gebogen, so erhält man ein der Lamelle § 128 sehr ähnliches Gebilde. Die in der Figur verkürzt erscheinende Achsenschleife geht von oben gesehen dem Uhrzeigersinne entgegengesetzt um das Bündel herum, der Draht also von links her vor den Röhren vorbei, nach rückwärts um dieselben herum und in der Figur vorn nach rechts hin.

C) Der Begriff des Stromes.

Die Betrachtung der Achsenschleife eines konzentrischen Magnetkraftliniensystems führt uns zu dem Begriff des Stromes. Wir haben zu zeigen, wie man von unseren Vorstellungen aus zu der einen fortschreitenden Bewegung in der Kraftachse selbst kommt und zwar zu einer Bewegung in demselben Sinne wie der der Elementarbewegungen innerhalb der Schleife. Diese Vorstellung einer Bewegung längs oder sogar in der Achse, in unseren Beispielen also längs oder innerhalb des umschliessenden Drahtes, ist die gewöhnliche und geläufige. Man sagt, es zirkuliere in jenem Drahte „ein Strom“. Um die in sich zurücklaufenden Bewegungen im Inneren der Schleife mit einem bestimmten Umkreisungssinne in Beziehung zu setzen, wird uns eine in der Physik sehr häufig angewandte, schon von Ampère eingeführte Schlussweise behilflich sein, die wir füglich den Ampèreschen Kunstgriff nennen können. Dabei knüpfen wir an das Modell Fig. 53 an.

152. Der Ampèresche Kunstgriff. — Wenn eine von einer einzigen einfachen, d. h. sich nirgends selbst durchschneidenden Um-

grenzungslinie umschlossene Fläche Fig. 54 von gleichsinnigen in sich zurücklaufenden Bewegungen vollständig erfüllt ist, so kann dieses Bewegungssystem für den ferner stehenden Beobachter den Eindruck machen, als sei es nicht über die Fläche ausgebreitet, sondern allein auf die Umgrenzungslinie beschränkt. Denn im Inneren grenzt jedes von einer in sich zurücklaufenden Bewegung erfüllte Flächenelement ringsum an ähnliche Nachbarn. Dadurch kommt es, dass längs jeden Stückes der Grenzlinie eines solchen Elementes Bewegungen in entgegengesetztem Sinne stattfinden, vergl. in der Figur z. B. die aneinander grenzenden Flächenelemente f_1 und f_2. Sind die Bewegungen gleich stark, d. h. erfolgen sie auf gleich grossen Flächenelementen mit derselben Geschwindigkeit, so heben sich ihre Wirkungen nach aussen längs jeder solchen Zwischenlinie je zweier Elemente auf. Eine derartige Kompensation findet auf der ganzen Fläche statt; nur die am Rande gelegenen Flächenelemente erfahren längs derjenigen Teile ihrer Umgrenzung, welche an der Kontur $U\,U$ der ganzen Fläche (in der Figur stark ausgezogen) liegen, keine Kompensation, weil nach dieser Seite hin die Nachbarelemente fehlen. Sind die Bezirke, auf denen sich die in sich zurücklaufenden Bewegungen abspielen, sehr klein, wie es bei uns der Fall ist, wo wir es mit Querschnitten von Kraftröhren zu thun haben, so ist die Kompensation eine vollkommene. Von dem gesamten Bewegungssystem tritt also nur der Teil in die Erscheinung, welcher längs der Kontur verläuft. Es sieht so aus, als ob nicht im Inneren der Kontur, d. h. auf der von ihr umschlossenen Fläche Bewegung stattfände, sondern als ob sich ein gewisses Etwas längs der Umgrenzungslinie bewegte, „in ihr flösse".

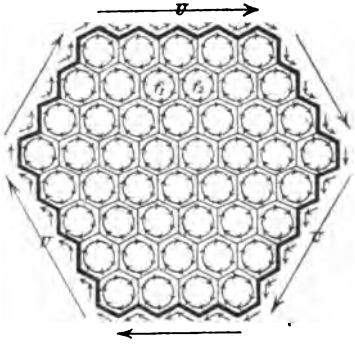


Fig. 54.

Diese Zurückführung der Vorgänge innerhalb einer Fläche auf Vorgänge in der Begrenzungslinie bildet einen speziellen Fall des den Mathematikern unter dem Namen des Stokesschen Theorems bekannten Satzes; derselbe lehrt ganz allgemein die Summe gewisser Grössen, welche sich auf die einzelnen Elemente einer Fläche beziehen, durch eine Summe von Werten auszudrücken, die den einzelnen Teilen der Begrenzungslinie entsprechen. So lässt sich mit Hilfe des Stokesschen Satzes in aller Strenge nachweisen, dass die doppelte Summe der einzelnen Elemente einer Fläche, jedes multipliziert mit einer Drehbewegung mit senkrecht zu dem Elemente stehender Rotationsachse, gleich ist der Summe der einzelnen Linienelemente der Kontur, jedes noch multipliziert mit der Projektion einer gewissen Lineargeschwindigkeit auf die Richtung des Linienelementes. Dieses Ergebnis spielt eine grosse Rolle bei den Theorien, welche die magnetischen und damit auch

die Stromerscheinungen auf Wirbelbewegungen zurückführen. Man erkennt, dass der Ampèresche Kunstgriff den einfachsten Fall der hier ausgedrückten allgemeineren analytischen Beziehung darstellt.

153. Die Stromrichtung; Nomenklatur. — Die innerhalb einer Achsenschleife von den kinetischen Theorien vorausgesetzten in sich zurücklaufenden Bewegungen äussern sich am Träger des Kraftliniensystems, als dem Rande der umschlossenen Fläche, in Form einer längs desselben fortschreitenden Bewegung. Diese können wir einen „Strom" nennen und sprechen demgemäss von einem „Stromträger" und einer „Stromschleife". Die Richtung dieses Stromes muss zufolge des Ampèreschen Kunstgriffes dieselbe wie die der an den Träger grenzenden Elementarbewegungen sein; diese Richtung ist aber die von uns für die Kraftachse bereits gewählte von K nach Z oder + nach − wie die Figg. 49, 52 und 53 erkennen lassen.

Wir hatten sie zur vorläufigen Orientierung für die Achsen als positive Richtung festgesetzt, indem wir von der Bezeichnung der Polklemmen ausgingen. Dies wird jetzt gerechtfertigt, da der Achsensinn + nach − nach dem Ampèreschen Kunstgriff dem Bewegungssinne in der Kontur der Fläche entspricht, welche vom Stromträger eingeschlossen ist. Durch die magnetischen Eigenschaften ist diese Stromrichtung also vollkommen eindeutig bestimmt. Nachdem wir den Sinn der Kraftlinien in bestimmter Weise im 2. Kapitel festgelegt haben, ist die Beziehung eines Stromes zu seinem Magnetfelde sowie seine Richtung gegeben und alle Willkürlichkeit ausgeschlossen.

Dadurch wird das ganze Begriffsystem ein sehr einheitliches. Nur mit der Nomenklatur geraten wir in eine eigentümliche Schwierigkeit. Bei uns fliesst nichts im Drahte, ja zunächst spielt sich für uns überhaupt noch nichts im Drahte ab, sondern der ganze Vorgang, den wir betrachten, geht in erster Linie ausserhalb des Drahtes, im „Felde" vor sich. Aber alle Bezeichnungen, wie „Strom, Stromrichtung, Leiter" u. s. w., die wir nicht entbehren können, wollen wir nicht ein ganz neues Bezeichnungssystem einführen, knüpfen an das nicht ausreichende mechanische Bild des „Strömens eines gewissen Etwas" an.

Nirgends haben sich die Vorstellungen so vollkommen umgekehrt, wie gerade auf dem Gebiete der „Stromphänomene". Die vielfachen Versuche der Engländer mit den neuen Vorstellungen auch gänzlich neue Namen einzuführen, haben daher viel für sich. Uns kommt es hier darauf an, zu zeigen, wie von den neuen Standpunkten aus bekannte Phänomene aufzufassen sind; dies rechtfertigt das Beibehalten der alten Bezeichnungen.

154. Das Kraftlinienfeld einer Stromschleife und sein Spiegelbild. — Wir wollen hier im Anschluss an das Vorige den Beweis für den achsialen Charakter des die magnetische Feldintensität darstellenden

Vektors geben, auf den wir schon in § 120 hinwiesen. Der längs einer Achsenschleife verlaufende galvanische Strom ist nur die Randerscheinung des durch diese hindurchgehenden Kraftlinienstromes. Beide Erscheinungen bedingen sich gegenseitig. Nach einem allgemeinen Satze der Symmetrielehre unbegrenzter Medien müssen sich die Symmetrieeigenschaften der Ursache in denen der Wirkungen wiederfinden und umgekehrt.

Denken wir uns eine Stromschleife in eine beiderseitig spiegelnde Ebene gelegt, so werden durch die Spiegelung allen Raumpunkten oberhalb der Schleife Punkte in dem unter derselben liegenden Raume und umgekehrt allen unteren Punkten solche im oberen Raume eindeutig zugeordnet. Ebenso können wir allen Vorgängen des wirklichen Feldraumes Spiegelbilder dieser Vorgänge in einem denselben Raum erfüllenden Spiegelraum an die Seite setzen. Wir wollen untersuchen, wie sich die von uns in diesem Raume vorausgesetzten einfachen Bewegungen diesen Spiegelungsprozessen gegenüber verhalten, um daraus einen Schluss auf deren Symmetrieverhältnisse zu ziehen. Das Stromphänomen bleibt bei der Spiegelung offenbar sich selbst gleich, weil es unserer Voraussetzung nach in der Spiegelebene abläuft, es „verträgt die angegebene Spiegelung". Das zugehörige Kraftlinienbündel dagegen wird umgekehrt. Gingen die Kraftlinien vorher von unten nach oben, so steigen sie jetzt von oben her durch die Schleife nach unten. Wenn ihnen also ein Vorgang von dem einfachsten vektoriellen Charakter der Translation oder des Strömens inne wohnte, so könnte ein bestimmter Strömungssinn (von unten nach oben oder umgekehrt) nicht an eine bestimmte Umkreisungsrichtung der Schleife gebunden sein; denn diese letztere bleibt bei der Spiegelung ungeändert, während sich die Strömungsrichtung der Kraftlinien umkehrt. Das widerspricht aber der Erfahrung. Denn mit einem bestimmten Kraftlinienverlauf ist immer eine bestimmte Stromrichtung und umgekehrt mit dem Strome eine bestimmte magnetische Polarität der Schleife eindeutig verknüpft (§ 151). Also muss der vektorielle, den Kraftlinien zu Grunde liegende Prozess oder Zustand andere Symmetrieeigenschaften als die der einfachen Strömung, Translation haben.

Machen wir den Spiegelungsversuch mit den Drehbewegungen um die Kraftlinien als Achsen. Die der Spiegelebene parallelen Drehungen kehren sich nicht bei dem Spiegelungsprozesse um, wie man ohne weiteres sieht. Die zu ihr schräg verlaufenden Drehbewegungen verwandeln sich in solche, die derselben Kraftlinie angehören, vergl. Fig. 53. Bewegungen im Kraftlinienbündel, welche im realen Raume

gleichsinnig mit der Stromrichtung verlaufen, thun dies auch im Spiegelraume; diese Drehbewegungen im Felde vertragen also die genannte Spiegelung ebenso wie das Stromphänomen in der Schleife selbst. In den Kraftlinien geht etwas vor sich, was die Symmetrieeigenschaft von Drehbewegungen um Achsen hat. Dies war ein wichtiger, schon oben angedeuteter Grund für die Annahme des „achsialen Charakters der Magnetkraftlinien".

Wir finden unsere Schlussfolgerung bestätigt, wenn wir uns eine Spiegelung des gesamten Feldmediums in Bezug auf eine durch die (zur Schleifenebene senkrecht stehende) Schleifenachse gehende Spiegelebene vorgenommen denken. Der Sinn der senkrecht gegen den Spiegel verlaufenden Stromrichtung kehrt sich um; Strömungen längs der Kraftlinien würden sich nicht umkehren, wohl aber wird in jedem Punkte eine Uhrzeigerdrehung in einer zum Spiegel senkrechten Ebene in eine dem Uhrzeiger entgegengesetzte Bewegung verwandelt. Also hat die Randerscheinung des Stromes längs der Schleife dieselben Symmetrieeigenschaften wie das durch sie hindurchgehende Kraftlinienbündel nur dann, wenn wir diesem einen achsialen Charakter beilegen.

Ein magnetisches Kraftfeld verträgt eine Spiegelung in Bezug auf eine senkrecht zu seinen Kraftlinien verlaufende Ebene, es verträgt dagegen keine Spiegelung in Bezug auf eine durch seine Kraftlinien hindurchgehende Ebene.

Curie drückt dieses Resultat sehr anschaulich aus, wenn er sagt: „Magnetkraftlinien haben nicht die Symmetrie eines Pfeiles, sondern die einer Drehungsachse". In der in der Krystallographie üblichen Symbolik würde man die Symmetrie eines Magnetkraftfeldes

$$\frac{L_\infty l_\infty}{P_\infty} C$$

zu schreiben haben.

155. Der galvanische Strom als Kraftlinienbündel. — Verfolgen wir einen Stromträger noch so weit, immer treffen wir auf Magnetkraftlinien, die ihn begleiten. So kommen wir zu dem Schlusse:

Jeder galvanische Strom ist äquivalent mit einem Kraftlinienbündel. Jeder Stromträger kann durch eine magnetische Lamelle verkörpert gedacht werden, welche sich mit ihrer Umrandung der Strombahn anschliesst. Ein Strom kann also auch als Ganzes, als sogenannter „Stromkreis", als Magnet betrachtet werden.

Ampère verwertete diese Vorstellungen nach der entgegengesetzten Seite, indem er eine Zurückführung aller magnetischen Erscheinungen auf Stromerscheinungen versuchte. Wenn eine Stromschleife, ein „Kreisstrom", eine magnetische Lamelle ersetzt, so kann man sich einen

Magneten aus solchen Kreisströmen aufgebaut denken, welche kleinste Flächen umkreisen. Die Durchführung dieser Vorstellung glückte; sie war die erste Andeutung für die innere Verwandtschaft der magnetischen Erscheinungen mit denen des galvanischen Stromes. Wir müssen an dieser nahen Beziehung festhalten, wenn wir sie auch im umgekehrten Sinne verwerten.

So ähnlich aber auch Magnete und Ströme sich in mancher Beziehung verhalten, so giebt es daneben doch durchgreifende und nicht zu übersehende Unterschiede, auf die wir noch kurz eingehen müssen.

D) Unterschiede in den Feldern der Magnete und der galvanischen Ströme.

Ohne auf tiefere mathematische Betrachtungen über die Eigentümlichkeiten der magnetischen Felder von Strömen und von Magneten eingehen zu wollen, können wir doch auf hier bestehende Unterschiede aufmerksam machen und sie mehr anschaulich als rechnerisch zu begründen suchen. Das „Feld" war für uns der Aussenraum eines Gebildes, an dem sich magnetische Wirkungen nachweisen lassen. Wenn auch der Kraftlinienverlauf durch einen Stromkreis oder eine Achsenschleife mit dem einer magnetischen Lamelle eine grosse Ähnlichkeit hat, so besteht doch in Bezug auf die Felder ein wesentlicher Unterschied: Das Feld des Stromes setzt sich durch das Innere der Schleife oder des Kreises hindurch ungestört fort; wir können den Kraftlinien folgend von einer Seite der Schleife auf die andere gelangen, ohne durch den Stromträger selbst daran behindert zu werden (vergl. Fig. 53); bei der magnetischen Lamelle dagegen hindert uns das Material des Kraftlinienträgers daran, wenn dieser auch noch so dünn ist. Der Unterschied wird also durch die räumliche Anordnung der Felder bedingt.

156. Einfach und mehrfach zusammenhängende Räume. — Wir wollen das Feld, d. h. den Aussenraum eines plattenförmigen lamellar magnetisierten Körpers einerseits und eines ringförmig sich schliessenden stromdurchflossenen Drahtstückes andererseits betrachten. Um die hier bestehende Verschiedenheit möglichst klar zu erkennen, denken wir uns das eine Feld wie das andere durch eine Hülle begrenzt, welche die Oberfläche des Feldträgers selbst nicht schneidet, z. B. Wände, Boden und Decke des Zimmers. Zieht man durch den Raum eine irgendwie gestaltete, einfache Scheidewand, welche überall bis an die begrenzenden Flächen reicht, so zerfällt ein Raum von gewöhnlicher Gestalt in zwei völlig voneinander getrennte Räume, deren jeder durch einen Teil der ur-

sprünglichen Gesamtoberfläche und je eine Seite der ganzen Zwischenwand vollständig begrenzt ist. Solche Räume nennt man „einfach zusammenhängend". (Listing: Census räumlicher Gebilde.) Braucht man zu dieser Zerlegung zwei oder mehrere Schnitte, so ist der Raum „mehrfach zusammenhängend". Das Magnetfeld einer Achsenschleife erfüllt im Gegensatz zu dem eines gewöhnlichen Magneten einen „zweifach zusammenhängenden" Raum. Um dies zu erkennen, betrachten wir zunächst:

a) den räumlichen Zusammenhang des freien Feldes eines gewöhnlichen Magneten, und zwar um der Ahnlichkeit willen sogleich den eines flachen Magneten, einer magnetischen Lamelle L Fig. 55 a. Der Feldraum erstreckt sich von der Oberfläche des Magneten L theoretisch bis ins Unendliche, praktisch bis zu einer leicht angebbaren Entfernung, etwa den Zimmerwandungen (Decke und Diele mit inbegriffen), welche wir durch A in der Figur andeuten wollen. Das Feld füllt also einen schalenförmigen Raum aus, dessen Begrenzung einerseits die Oberfläche von L, andererseits die Fläche A bildet. Wir legen nun eine beliebige Schnittfläche SS durch diesen Raum, welche aber vollständig zwischen seinen Begrenzungsflächen liegt, d. h. für welche die Schnittlinien mit den den Raum begrenzenden Flächen die alleinigen und vollständigen Begrenzungslinien sind. SS geht von A aus und muss auf der Oberfläche von L endigen; in der Figur ist ihr Schnitt mit diesen Flächen durch punktierte Linien angedeutet. Die Fläche S selbst hat ringförmige Gestalt etwa wie Fig. 55 b.

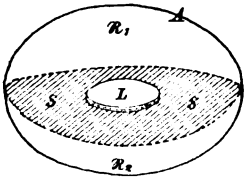


Fig. 55 a.

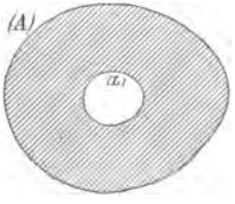


Fig. 55 b.

Durch sie ist der Raum, den das Feld einnimmt, in zwei vollständig voneinander getrennte Räume $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ zerlegt, Fig. 55 a.

Betrachten wir b) den Aussenraum eines ringförmig sich schliessenden Feldträgers.

Ein dicker, mit seinen beiden Enden auf einen runden Holzpflock gesteckter und dadurch zusammengehaltener Gummischlauch mag zur Versinnlichung dienen.

Das Feld erstreckt sich von der Oberfläche G, Fig. 56 a, des Ringes bis etwa wieder zu den Zimmerwänden A. Wo hier aber auch die Schnittfläche SS anliegen mag, immer bleibt noch eine Kommunikation des Raumes $\mathfrak{R}_1$ zu dem Raume $\mathfrak{R}_2$ übrig durch die Ringöffnung hindurch vergl. die Figg. 56 a und b, in denen einige Formen der

Schnittfläche SS und der Begrenzungsflächen A und G im Querschnitt gezeichnet sind:

Die Begrenzungsflächen sind einerseits die genannte Oberfläche des Ringes G, sowohl die Aussenwand a desselben wie die die innere Höhlung begrenzende Fläche i, und andererseits die Fläche A. Legen wir eine Schnittfläche von A bis heran an die innere Begrenzungsfläche G, so entsteht wieder eine ringförmig begrenzte Schnittfläche wie sie Fig. 56 c darstellt. Die äussere Begrenzungslinie liegt auf A, die innere jetzt auf G. Da die Fläche S eine einfache, nirgend sich selbst überdeckende oder schneidende sein soll, so ist es nicht möglich, den Aussenraum von G durch eine einzige solche Schnittfläche S in zwei vollständig getrennte Teilräume zu zerlegen. Dies wird erst möglich, wenn wir einen zweiten Schnitt zu Hilfe nehmen, wie er in der Querschnittsfigur 56 d angedeutet ist. Hier ist $\mathfrak{R}_1$ vollständig von $\mathfrak{R}_2$ getrennt, jeder der beiden Teilräume ist von einem Teil der Begrenzungsflächen A, G und durch je eine ganze Seite einer jeden der beiden Scheidewände S_1 und S_2 vollständig umschlossen.

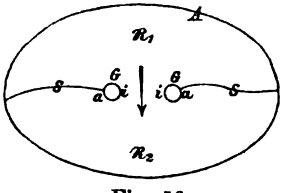


Fig. 56 a.

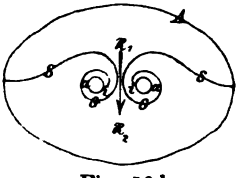


Fig. 56 b.

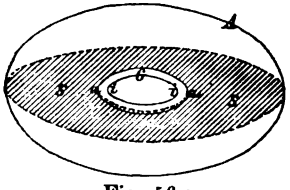


Fig. 56 c.

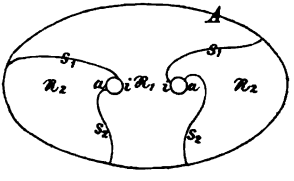


Fig. 56 d.

Wir haben also beim Stromfelde einen Raum, aus dem ein ringförmig in sich zurücklaufender Hohlraum ausgespart ist; ein solcher Raum ist aber zweifach zusammenhängend.

In dieser Raumanordnung des elektromagnetischen Feldes liegt die Möglichkeit begründet, dass Kraftlinien sich ringförmig um den Feldträger herumziehen und sich in dem Feldraume selbst vollkommen schliessen können, ohne dass Quellpunkte oder Sinkstellen in sie eingeschaltet sind, ohne dass sie also von Polen aus divergieren (Divergenz gleich Null) oder in solche zusammenlaufen (Konvergenz gleich Null). Auf andere mit dem Raumcensus zusammenhängende Besonderheiten dieser Felder kommen wir weiter unten in § 169, p. 173 noch andeutungsweise zu sprechen.

9. Kapitel.

Wechselwirkung zwischen Strom und Magneten.

Wir haben Wechselwirkungen von galvanischen Strömen auf Magnetpole bei dem Nachweis der Stromkraftlinien und der Feststellung ihres Richtungssinnes schon benutzt. Da die Kraftlinien eines Stromes sich vollkommen wie die eines Magneten verhalten und nur die Anordnung derselben in dem konachsialen Systeme von der gewöhnlichen abweicht, so ist von vornherein zu erwarten, dass beide Kraftliniensysteme in der Art aufeinander wirken, dass ihre Träger ponderomotorische Antriebe erfahren.

Wir wollen in diesem Kapitel die wichtigsten Formen der Wechselwirkung eines festliegenden Stromträgers auf bewegliche Magnete ins Auge fassen und zwar einmal lediglich nach ihrem qualitativen Charakter, zweitens aber auch ihrer Quantität nach, indem wir die Grundzüge der Messmethoden besprechen, welche auch diese Wirkungen dem oben skizzierten allgemeinen Maasssystem zu unterwerfen lehren. Wir treten damit in das Gebiet ein, welches man gewöhnlich als „Elektromagnetismus“ zu bezeichnen pflegt.

A) Qualitative Erscheinungen.

Um die elektromagnetischen Wechselwirkungen kennen zu lernen, wählen wir einfache Beispiele, welche eine besondere Wichtigkeit teils historischer Art, teils in ihren Anwendungen haben. Immer werden uns auch hier die Kraftlinien leiten und die entsprechenden Kraftlinienbilder sind es, auf die wir das Hauptgewicht legen.

157. Ein Magnetpol im Stromfelde. — Wir untersuchen zunächst den Fall eines einzigen in das Feld eines Stromes gebrachten Poles und verwenden dazu einen langen dünnen Stabmagneten. Die Bildebene legen wir senkrecht zu einem geradlinigen vertikalen Teil der

Strombahn und befestigen den Magnetstab parallel neben dem Leitungsdraht.

Die Figg. 57 und 58 wurden in der Weise erhalten, dass man in dem Stativ Fig. 47 dicht neben der Durchbohrung, durch welche der Stromträger hindurchgeht, die Enden langer Magnetstäbe in entsprechenden Löchern im Brette *C* so befestigte, dass ihre Achsen der Stromachse parallel liefen.

Die Fig. 57 zeigt uns die Deformation, welche wir in dem konzentrischen Magnetkraftlinienfelde eines Stromes durch einen Magnetpol und zwar einen Südpol *s* hervorbringen. Der Strom *S* steigt durch die Bildebene von unten nach oben hindurch. Wir vergleichen das Bild mit dem der Fig. 48, welches das ungestörte Feld darstellt. Von den Kraftlinien, welche in dichter Schar den Drahtquerschnitt *S* umströmen, endet ein grosser Teil in der Sinkstelle *s*. Hier treten sie aus dem offenen Felde aus und dringen in das Material des magnetisierten Stahlstabes ein, wodurch oberhalb *s* eine Astasierungsstelle (vergl. § 34) entsteht. Erst in weitem Bogen strömen Kraftlinien, welche nicht mehr in den Bereich der Sinkstelle hineingezogen werden, um diese herum und schliessen sich mit Linien auf der anderen, nicht gestörten Seite zusammen. Denken wir an die Zugwirkung längs der Kraftlinien, denen die Massen, an denen sie festhaften, nachgeführt werden, so lehrt der Anblick unseres Bildes, dass der Pol *s* einen Bewegungsantrieb quer zu dem Stromträger *S* erfahren muss, der ihn im Sinne der Kraftlinien, im Bilde also uhrzeigermässig, rings um den Strom herum zu ziehen strebt.

Fig. 57.

Bringen wir eine hinreichend ergiebige Kraftlinienquelle in Gestalt des Nordpoles *n*, Fig. 58, in das Stromfeld, so bemerken wir, dass die von dem Pole *n* ausgehenden Kraftlinien sich mit einer entsprechenden Zahl von Kraftlinien, welche den Strom *S* umschliessen, vereinigen und so vollständige Stromkraftlinien werden. Der Strom hat absteigende Richtung, die Kraftlinien gehen also im Sinne des Uhrzeigers um *S* herum.

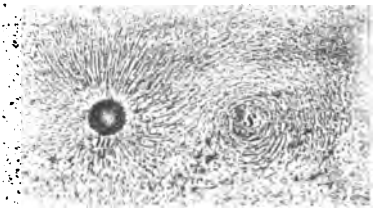


Fig. 58.

Innerhalb der aus *n* hervorquellenden Linien bemerken wir noch echte in sich zurücklaufende Stromkraftlinien. Von *n* gehen ausserdem

Kraftlinien nach unten, welche keinen Zusammenschluss mit Stromkraftlinien finden; sie werden weggedrängt, so dass im unteren Teile des Bildes ein von Kraftlinien ziemlich freier Raum entsteht. Hierauf beruht das schon von uns benutzte Zustandekommen eines einseitigen Bewegungsantriebes, § 147. Die beiden Bilder Fig. 57 und 58 zeigen, dass Stromkraftlinien und Magnetkraftlinien wesensgleich sind. Sie verschmelzen miteinander und vereinigen sich zu einem gemeinsamen Felde wie die Kraftlinien zweier Dauermagnete.

158. Ponderomotorische Bewegungsantriebe, welche ein beweglicher Magnetpol in einem Stromfelde erfährt. — Den Kraftlinienbildern Fig. 57 und 58 entsprechend, müsste ein frei beweglicher Magnetpol in einem Stromfelde rings um den Träger herum rotieren. In der That zeigten die Stabpole in § 147 diese Bewegungstendenz, wurden aber an der völligen Umkreisung durch das obere Querstück unseres Drahtrechteckes behindert. Man hat Anordnungen getroffen, bei denen Magnetpole ohne Unterbrechung um feststehende Stromträger rotieren. Bei denselben ist aber immer die Leiterbahn zwischen den beiden gleich gerichteten Magneten, die man der Symmetrie wegen verwendet, zu einem Kniestück gebogen, welches dann gewöhnlich in eine Quecksilberrinne taucht, von der eine feststehende Ableitung weiterführt. Diese letztere ist es dann, welche die Wirkung ausübt. Die kontinuierliche Rotation durch eine Wirkung der konzentrischen Kraftlinienringe auf die in ihrer Richtung beweglichen Magnetpole selbst ist hier ebensowenig realisiert, wie es je möglich ist, einen vollkommen isolierten für sich bestehenden Magnetpol ohne den Gegenpol herzustellen.[1])

Nur dadurch, dass man eine stromdurchflossene Röhre verwendet und gleichnamige Pole hakenförmig umgebogener Magnetstäbe in das Innere derselben bringt, kann man eine kontinuierliche Rotation der in das Aussenfeld ragenden Enden hervorbringen (W. König).

159. Magnetnadel parallel zu einem Stromträger, Ørsteds Grundversuch. — Wir wollen jetzt zu dem Verhalten zweier ungleichnamiger Magnetpole übergehen, welche gleichzeitig in dem Stromfelde in derselben Entfernung vom Träger vorhanden sind, wozu wir die beiden ungleichnamigen Pole derselben Magnetnadel verwenden. Parallel zu ihr strecken wir einen Teil der Leiterbahn geradlinig aus. So gelangen wir zu Ørsteds Grundversuch (1821):

Versuch 56. Ein Stromträger wird mit seinem geradlinigen Teile, in der Richtung des magnetischen Meridians von oben her einer Dekli-

[1]) E. Lecher, Wied. Ann. **54**. p. 282. 1895.

nationsnadel genähert, wobei er horizontal, also der Nadel parallel gehalten wird: Diese wird aus der *N*-*S*-Richtung abgelenkt.

Der Stromträger wird in gleicher Weise von unten her an die Nadel herangebracht: sie schlägt wiederum aus, aber nach der entgegengesetzten Seite.

Das Kraftlinienbild beim ØRSTEDschen Grundversuche zeigt Fig. 59.

Auf dem dicken Leitungsdrahte, den wir in § 145 benutzten, befestigen wir, etwa mit Klebwachs, ein kurzes Magnetstäbchen mit seiner Achse der Drahtachse parallel und legen auf dasselbe ein Kartonblatt.

Wir erkennen am Rande des Bildes bei *S* und *S*, wo der Strom allein wirkt, die Querrippung, welche von den den Stromträger konzentrisch umgebenden Kraftlinien herbeigeführt wird. Ihnen wohnt ein Richtungssinn inne, der in unserem Falle (vergl. die über *S* und *S* eingezeichneten Pfeile) in der Bildebene von unten nach oben gerichtet ist. Dort, wo der Wirkungsbereich des in dem Stromfelde liegenden Magnetstäbchens sich geltend macht, werden diese Rippen aber stark verschoben. Bei dem Nordpole *n* sind die von unten kommenden Stromkraftlinien ganz verdrängt worden, denn hier liegen die Eisenteilchen ohne jede erkennbare Richtung durcheinander. Dagegen sind die von *n* hervorquellenden Magnetkraftlinien mit den von hier aus nach oben zu weiter gehenden Stromkraftlinien verschmolzen. Man sieht die oberhalb *n* ausgehenden Kraftlinien am rechten Ende des Stäbchens geradezu in echte „Stromrippen" übergehen.

Fig. 59.

Jenseits der Indifferenzzone des Magneten kehrt sich das Verhältnis vollkommen um. Der Südpol *s* nimmt die von unten her kommenden Stromkraftlinien in sich auf, sie verschwinden an dieser Sinkstelle, der darüber liegende Raum ist ganz von ihnen gesäubert. Denken wir uns das Magnetstäbchen um seinen Mittelpunkt in einer zur Drahtachse parallelen Ebene drehbar, so wird durch die Kraftlinienspannung der *n*-Pol nach oben, der *s*-Pol nach unten gezogen werden. Wir sehen also, wie die Ablenkung der Nadel, die der Versuch 56 ergab, wirklich durch den Kraftlinienverlauf bedingt ist.

160. Die Daumenregel; Ampères Schwimmregel. — Das Kraftlinienbild Fig. 59 lässt auch den Sinn der Ablenkung erkennen. Wollen wir diesen mit der Stromrichtung in eine einfache Beziehung setzen, so ist es am bequemsten, die Richtungsverhältnisse gewisser

Teile unseres Körpers zu einander dabei zu benutzen. Denken wir uns z. B. die rechte Hand so an den Stromträger gelegt, dass der Strom die Richtung von der Handwurzel nach dem Mittelfinger hat, und die Handfläche der Magnetnadel zugekehrt ist, so wird der Nordpol der Nadel in der Richtung des Daumens abgelenkt. In Fig. 59 müsste die rechte Hand von rechts (Handwurzel) nach links (Mittelfinger) mit dem Handrücken nach unten gelegt werden, weil der Leiter unterhalb der Nadel vorbeiführt.

Da die Stromkraftlinien diesen uhrzeigermässig umkreisen und ihnen der Nordpol einer Magnetnadel folgt, so muss dieser immer in der Daumenrichtung, in unserem Falle nach oben bewegt werden. Wir wollen diese Regel die „Daumenregel" nennen. Dem Gedächtnisse einzuprägen ist bei ihr, dass sie sich auf die rechte Hand und den Nordpol bezieht. Die Ablenkung des Südpoles ergiebt sich von selbst, da sie immer die entgegengesetzte des Nordpoles ist.

Eine andere Regel, von Ampère angegeben, ist unter dem Namen der „Schwimmregel" bekannt. Sie bezieht sich auf eine dem ganzen Körper im Stromkreise gegebene Lage und lautet: Denkt man sich in dem Leiter mit dem Strome schwimmend und sieht die Nadel an, so wird ihr Nordpol nach der Seite der linken Hand, ihr Südpol nach der der rechten abgelenkt. In Fig. 59 müsste man also auf dem Rücken mit den Füssen rechts, mit dem Kopfe links liegend, von unten her gegen das Kraftlinienbild blicken; dann wird der *n*-Pol der darüber liegenden Magnetnadel nach links, in der Figur nach oben, der *s*-Pol nach rechts (nach unten) hin abgelenkt. Bei der Ampèreschen Regel ist „Linke Hand = Nordpol" zu merken.

Diese Schwimmregel hat eine grosse Berühmtheit erlangt. Wir ziehen die „Daumenregel" vor, denn das Hineindenken des ganzen Körpers in eine oft höchst unbequeme Lage ist komplizierter, als das auch nur gedachte Anlegen einer Hand. An einer in Gang befindlichen Dynamomaschine mit der Ampèreschen Schwimmregel zu operieren, kann lebensgefährlich werden; jeder weiss, wie das intensive Sichhineindenken in eine Körperlage dazu verführt, dieselbe thatsächlich zum Teil einzunehmen, was inmitten von Treibriemen, Kurbeln und Stangen nicht unbedenklich ist.

161. Galvanoskope. — Auf der Anwendung der soeben betrachteten Ablenkungserscheinung einer Magnetnadel in dem Felde eines ihrer Ruhelage parallelen Stromträgers beruht eine Reihe von Instrumenten, welche zunächst den Zweck haben, das Vorhandensein eines Stromes überhaupt anzuzeigen. Wird an einer in der Horizontal- oder Vertikalebene beweglichen Magnetnadel ein Strom dicht vorübergeführt, so schlägt sie in dem einen oder anderen Sinne aus und lässt neben dem Vorhandensein eines Stromes auch seinen Richtungssinn erkennen.

Aus der Grösse des Ausschlages kann man einen ungefähren Schluss auch auf die Zahl der ausgebildeten Stromkraftlinien ziehen, denn es ist ohne weiteres klar, dass die Ablenkung caet. par. um so grösser sein wird, je mehr Stromkraftlinien sich bei der Erscheinung beteiligen.

162. Zwei Magnetpole in einer zum Strome senkrechten Ebene. — Eine Magnetnadel muss auch abgelenkt werden, wenn ihrem Nord- oder Südpole ein vertikal verlaufendes Stück eines Stromträgers in der Richtung des durch die Nadelmitte gehenden magnetischen Meridians genähert wird.

Versuch 57. Nähert man einen geradlinig gestreckten und vertikal gehaltenen Teil eines Stromkreises, auf dem der Richtungssinn durch Pfeile bezeichnet ist, von Norden oder Süden her dem entsprechenden Pole einer auf hohem Stative stehenden Deklinationsnadel, so erfolgt eine Ablenkung, welche dem Kraftliniensinne entspricht.

Auch hier bestätigen sich die „Daumenregel" oder die „Ampèresche" Schwimmregel".

Das Kraftlinienbild zeigt Fig. 60.

Neben dem Stromträger wird auf dem Brette *C* des Gestelles Fig. 47 in einer kleinen länglichen Vertiefung ein kurzes Magnetstäbchen so festgelegt, dass es gerade auf die Stromachse zeigt, und darüber das Kraftlinienbild Fig. 60 erzeugt.

Um den Leiterquerschnitt *S* herum zieht sich das konzentrische Ringsystem der Stromkraftlinien (vergl. das ungestörte Bild Fig. 48). Auf der Seite, wo der Magnet mit seinem Quellpunkte *n* und seiner Sinkstelle *s* hinzutritt, verschmelzen die beiden Felder miteinander. Der Strom floss bei seiner Entstehung von unten nach oben, denn von oben gesehen laufen die Stromkraftlinien dem Uhrzeiger entgegengesetzt herum, wie ihr Verhalten zu den Magnetpolen *n* und *s* zeigt. Ist das Magnetstäbchen um seinen Mittelpunkt drehbar, so erfolgt eine Ablenkung (Versuch 57). Denkt man sich die rechte flache Hand bei *S* durch die Papierebene gestreckt, Handwurzel unten, die Finger oben, also der Stromrichtung entsprechend und kehrt man die Handfläche der Nadel zu, so wird der *n*-Pol nach der Richtung des ausgestreckten Daumens hin getrieben.

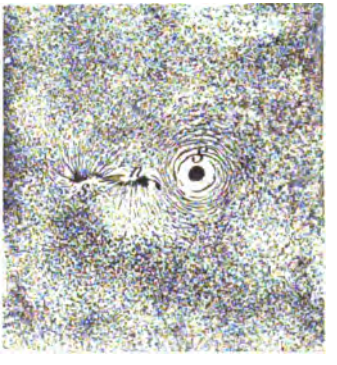


Fig. 60.

163. Magnetnadel mit einem Grade der Freiheit innerhalb einer Stromschleife. — Die ablenkende Wirkung eines Stromes auf eine Magnetnadel wird vergrössert, wenn man die Wirkungen der Ver-

suche 56 und 57 miteinander kombiniert. Dazu biegen wir den Stromträger kreisförmig um die Nadel herum zu einer Schleife zusammen.

Um ein entsprechendes Kraftlinienbild zu erhalten, bedient man sich etwa der folgenden einfachen Anordnung: Von zwei ca. 12 cm langen, 8 cm breiten, 2 cm dicken Holzklötzen wird der eine zum Halten des oberen Teiles der Stromschleife verwendet. Durch zwei senkrecht zu seinen Hauptflächen stehende cylindrische Durchbohrungen von ca. 5 cm gegenseitigem Abstand wird ein ∩-förmig umgebogenes Stück dicken Kupferdrahtes geschoben, nachdem der Klotz mit einem an den betreffenden Stellen durchbohrten Kartonblatt bedeckt worden ist. In den unteren Klotz sind dort, wo die Drahtenden aus dem oberen beim Aufeinanderlegen hervortreten, Näpfchen eingetieft, welche mit etwas Quecksilber gefüllt werden, zu dem über Kreuz gezogene metallische Zuleitungen hingehen. Man kann das Kraftlinienbild durch Herausziehen des Bügels frei legen und fixieren. Wenn dieser etwa doppelt so lang als breit ist, gleicht das Bild sehr nahe dem, welches man bei vollem Schluss des Trägers zu einer Schleife erhalten würde.

In dem Kraftlinienbilde Fig. 61 sind die mit c_1 und c_2 bezeichneten Punkte die beiden Stellen, in denen die Drahtschleife senkrecht durch die Ebene der Zeichnung hindurchgeht. Der Strom tritt bei c_1 von unten nach oben, bei c_2 geht er wieder hinunter. Demgemäss verlaufen bei c_1 die Stromkraftlinien im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers; an der Stelle c_2, wo wir in der Stromrichtung auf die Figur blicken, im Sinne desselben. Zwischen den Punkten c_1 und c_2 liegt die Nadel $n-s$, wie die Deformation des Kraftlinienverlaufes zeigt. Zwei Bündel von Stromkraftlinien, nach verschiedenen Richtungen wirkend, greifen an dem Magnetstabe an. In der Mitte, an der Indifferenzzone, treffen sie aufeinander. Der Zug längs der Kraftlinien sucht die Nadel aus der durch c_1 und c_2 gehenden Ebene der Stromschleife herauszudrehen und zwar den n-Pol nach unten, den s-Pol nach oben.

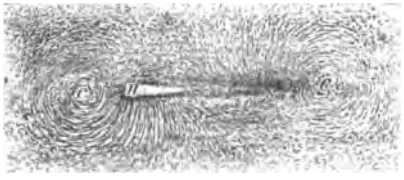


Fig. 61.

Legen wir die rechte Hand auf den Stromträger, im Sinne der Stromrichtung (also Handwurzel auf c_1, Mittelfinger nach c_2) und kehren wir die Handfläche der Nadel zu, also nach unten, so wird ihr Nordpol n in der Richtung des Daumens abgelenkt, d. h. in dem Bilde nach unten.

Wir werden sehen, dass eine Anordnung der magnetischen Systeme, wie die hier getroffene, in der sogenannten „Tangentenbussole“ als wichtiges Messinstrument verwendet wird.

B) Quantitative Beziehungen.

Dass man auch die Stärke des konzentrischen Magnetkraftfeldes eines Stromes an jeder Stelle in absolutem Maasse bestimmen kann, ist nach Kapitel 4 einleuchtend, denn die daselbst gegebenen Methoden sind ganz allgemein gültig und von der besonderen Beschaffenheit des

Feldes unabhängig. Es zeigt sich aber, dass es für die Stromkraftfelder eine Grösse giebt, welche für das ganze Feld bestimmend ist, derart, dass man z. B. bei einem geradlinigen Stromträger die Feldstärke an jeder Stelle angeben kann, wenn man deren absoluten Wert für einen Punkt kennt. Dies ist die sogenannte „Stromstärke". Wir werden bei der Einführung dieses wichtigen Begriffes besonders auf den Nachweis Gewicht legen, dass wir ihn rein magnetisch definieren können und dazu keine anderweitigen Erscheinungsgebiete als die hier behandelten heranzuziehen brauchen. Die übrigen Paragraphen dieses Kapitels sollen dann einigen Methoden zur Messung dieser „Stromstärke" und der Besprechung der Arbeits- oder Energiegrössen in Stromfeldern gewidmet sein.

164. Das elektromagnetische Grundgesetz. — Schon der Anblick des Kraftlinienverlaufes in einer zu einem geradlinigen Stromträger senkrechten Ebene, Fig. 48, lässt erkennen, dass die Feldstärke im konachsialen Magnetsystem mit wachsender Entfernung von seinem Träger abnimmt. Biot und Savart haben zuerst das Gesetz dieser Abnahme genauer untersucht und fanden, dass die Feldstärke in dem Grade ab- wie die Entfernung von der Achse zunimmt. Dies lässt sich mit grosser Sicherheit aus einem Versuche mit negativem Resultat folgern. Man befestigt ein oder mehrere Stabmagnete in einer zu einer geradlinigen Kraftachse senkrechten Ebene derart, dass sie um den Leiter, immer auf ihn hinzeigend, rotieren können, Fig. 60.

Dennoch findet keine Drehung weder im einen noch im anderen Sinne statt, wie die Erfahrung lehrt, woraus folgt, dass das Drehungsmoment, welches den Pol n, Fig. 60, der Richtung des Uhrzeigers entgegen um S zu führen strebt gerade so gross ist, wie das, welches s im anderen Sinne zu drehen sucht; also ist die Kraft bei s selbst im Verhältnis von nS/sS kleiner wie bei n geworden, wie wir weiter unten noch genauer darlegen wollen.

Der Versuch lässt sich etwa in der folgenden Form realisieren: Auf einem mit Füssen versehenen Grundbrette AA, Fig. 62, von 40 × 40 cm² Fläche ist die meterhohe, geeignet versteifte Säule BB in vertikaler Stellung befestigt, welche oben an einem 20 cm langen Querarme den Haken C trägt. An diesem ist mittels eines dünnen aber festen Fadens der Ring r befestigt, der sich in der Figur als horizontaler Strich verkürzt darstellt; er hat oben einen nach innen eingebogenen Haken, welcher mittels des Fadens derart an C befestigt ist, dass sich der Befestigungspunkt gerade über der Ringmitte befindet. An dem Ringe r ist durch drei Schnüre die Holzkreisscheibe D von 22 cm Durchmesser befestigt. Die Schnüre sind in drei gleich weit voneinander abstehende Messingösen auf D gebunden, vergl. Fig. 63, welche diese Scheibe D von oben gesehen darstellt. In der Mitte ist aus derselben eine ca. 2 cm im Durchmesser haltende Öffnung o ausgedreht. Auf der Scheibe sind die drei gleich grossen und gleich stark magnetisierten Magnetstäbe m_1, m_2, m_3 in aufgeschraubten Messinghülsen befestigt. Sie weisen mit

denselben Polen nach der centralen Durchbohrung o hin und sind mit der Scheibe um den Aufhängepunkt des Ringes r frei beweglich. Durch ihr Kraftliniensystem ist der Stromträger EEE achsial hindurchgeführt. Er geht von einer oben auf der Säule B befestigten Klemmschraube aus nach einer Ausbiegung durch die Ringmitte r nach unten und durch die Mitte der Scheibe D hindurch vergl. auch Fig. 63); auf dem Grundbrette A entlang ist er nach einer zweiten Klemmschraube hingeführt. Kann sich das Magnetsystem auch nicht vollständig um den Stromträger EEE herumdrehen, weil der den Ring r tragende Draht an den Leiter anstösst, so hat es doch eine genügende Bewegungsfreiheit, um eine deutliche elektromagnetische Reaktion zu zeigen, falls sich die Wirkungen auf die entgegengesetzten Pole je eines der Magnetstäbe nicht gerade aufheben. Um zu zeigen, dass ein Stromfeld vorhanden ist, obgleich die Stäbe nicht rotieren, wird auf dem Träger s die kleine Magnetnadel $n\,s$ um eine horizontale zur Stromrichtung senkrechte Achse beweglich befestigt und so nahe an den Draht E herangebracht, dass sie deutlich ausschlägt, wenn der Strom zirkuliert; dabei ist sie von den Magneten so weit entfernt, dass sie nicht wesentlich von ihnen beeinflusst wird. (In der Fig. 62 ist der Magnet absichtlich etwas zu gross und zu nahe an der Scheibe D gezeichnet.)

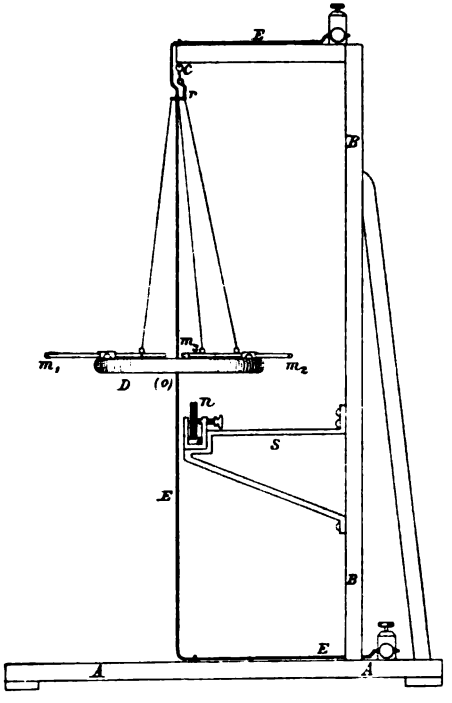


Fig. 62.

Aus dem Verhalten centrisch in dem Felde eines Stromes angeordneter Magnetstäbe, Fig. 63, können wir das Verteilungsgesetz der Feldstärken unzweideutig herleiten.

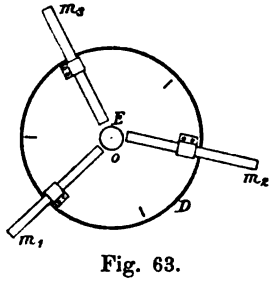


Fig. 63.

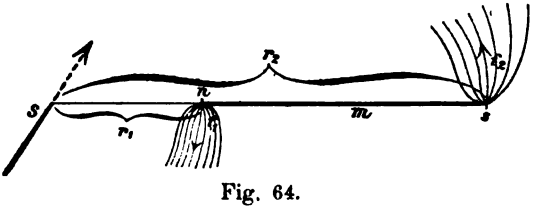


Fig. 64.

Wir denken uns in Fig. 64 den Magnetstab m in der Ebene des Papieres um einen Punkt S so beweglich, dass sein Abstand von dem-

selben sich nicht ändern kann, und er immer auf ihn hinweist. S ist der Durchstosspunkt eines geradlinigen, von vorn nach rückwärts senkrecht zur Zeichenebene verlaufenden Stromträgers.

Die Stromkraftlinien gehen uhrzeigermässig um S herum. Die Entfernung der beiden gleich starken Pole des Stabes m von der Kraftachse S seien r_1 und r_2. An den Stabpolen n und s greifen Zugwirkungen im Sinne der eingezeichneten Pfeile an, bei n nach unten, bei s nach oben. Ist $+m$ bezw. $-m$ die Polstärke, $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ die Stärke des Stromfeldes an den beiden Stellen, so beträgt die Wirkung auf n nach § 69 $f_1 = +m\mathfrak{H}_1$ Dyne, die auf S analog $f_2 = -m\mathfrak{H}_2$ Dyne, wobei die Vorzeichen $+$ und $-$ zum Ausdruck bringen, dass die beiden Kräfte f_1 und f_2 den Magneten nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben. Wir haben einen „einarmigen Hebel", der um den Punkt S drehbar ist, und an dem die Kraft f_1 in der Entfernung r_1 (Hebelarm) in dem einen Sinne angreift und die Kraft f_2 in der Entfernung r_2 im entgegengesetzten.

An einem solchen Hebel ist nur dann Gleichgewicht vorhanden, wenn die Produkte aus den Kräften in die entsprechenden Hebelarme, an denen sie angreifen, die sogenannten statischen Momente ($f_1 r_1$ und $f_2 r_2$) einander numerisch gleich sind.

In unserem Falle heben sich aber die beiden Wirkungen thatsächlich zu vollkommenem Gleichgewicht auf, da ein noch so starker Strom den Hebel weder im einen noch im anderen Sinne in Bewegung setzt. Es ist also

$$f_1 \cdot r_1 = f_2 \cdot r_2$$

oder

$$m\mathfrak{H}_1 : r_1 = m\mathfrak{H}_2 \cdot r_2,$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{H}_1 : \mathfrak{H}_2 = r_2 : r_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 27)$$

Die Feldstärke nimmt in dem Magnetfelde eines geradlinigen, sehr langen Stromteiles in dem Maasse ab, wie die Entfernung von der Achse zunimmt.

Gewöhnlich bringt man dieses Gesetz der Abnahme der Feldstärke mit der Entfernung in der Weise zum Ausdruck, dass man schreibt

$$\mathfrak{H} = \frac{C}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 27\,a)$$

wo C eine konstante Grösse ist, in Worten:

Die Stromfeldstärke ist der Entfernung umgekehrt proportional.

Hatten wir uns schon in Fig. 49 ein angenähertes Bild von den Bewegungen in der Umgebung eines Stromes mit Rücksicht auf den achsialen Charakter der Magnetkraftlinien gemacht, so können wir in demselben nun auch die mit der Entfernung veränderlichen Feldintensitäten zum Ausdruck bringen. Dies geschieht bei dem folgenden Modell Fig. 65:

Auf einem 70 cm langen, 10 cm breiten Brette B sind zwei kleine vertikale hölzerne Träger t_1 und t_2 von 10 cm Höhe befestigt, welche den mit Pfeilen p_1, p_2, p_3 versehenen gespannten Kupferdraht $A\,C$ tragen. An drei Stellen sind in dem Grundbrette B vertikale Messingstützen befestigt, die die kleineren inneren Holzringe r_1, r_2, r_3 und die grösseren R_1, R_2, R_3 so halten, dass sie den Draht $A\,C$ konzentrisch umfassen. Die äusseren Ringe haben einen doppelt so grossen Radius und einen Querschnitt von der halben Grösse wie die inneren. Auf allen sind (in der Figur nicht recht zu erkennende) Pfeile gezeichnet, von denen die einen uhrzeigermässig (von A aus gesehen) um die Peripherien, die anderen aber für ein

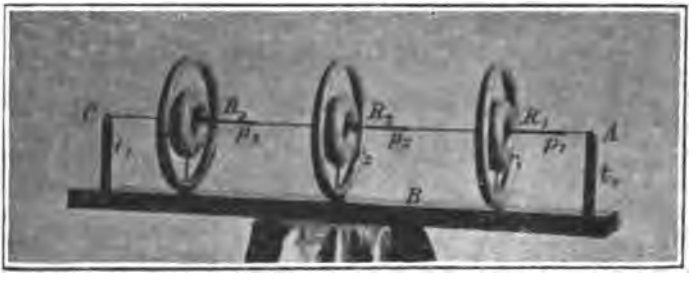


Fig. 65.

den Ringumfang entlang blickendes Auge uhrzeigermässig um die Querschnitte herumgehen. Im Inneren der Ringe sind die letztgenannten Pfeile parallel mit den Pfeilen p_1, p_2, p_3 auf dem Drahte. Der Querschnitt der Ringe wurde den Feldstärken in den verschiedenen Entfernungen proportional gewählt, ihre Dicke veranschaulicht also auch die Geschwindigkeit der Drehbewegungen.

165. Die charakteristische Grösse des Stromfeldes; Begriff der „Stromstärke". — In der Formel 27 a $\mathfrak{H} = C/r$ kommt die Grösse C vor, über deren Wert wir noch kein Urteil haben. Wir wissen nur, dass sie für ein gegebenes Stromfeld einen bestimmten konstanten Wert hat. Wir können sie uns in zwei Faktoren zerlegen. Denn denken wir uns verschiedene geradachsige Stromfelder in demselben Medium, so sind sie sich alle einander ähnlich, was den Verlauf der Kraftlinien betrifft. In jedem nimmt die Feldstärke $\mathfrak{H}$ umgekehrt proportional mit dem Abstande r von der Achse ab. Aber der Wert von $\mathfrak{H}$ in derselben Entfernung r wird in den einzelnen Feldern im allgemeinen ein verschiedener sein, je nach dem Werte der Konstanten C. Sie enthält also eine Grösse, welche für ein spezielles Stromfeld charakteristisch ist. Wir wollen untersuchen, in welcher Weise der Wert C von dieser letzteren abhängig sein muss. Für zwei geradlinige Träger,

für welche die Feldkonstante C denselben Wert hat, ist die Feldstärke $\mathfrak{H}$ in der gleichen Entfernung r die gleiche. Bringen wir nun beide Träger gleichsinnig unmittelbar aneinander, so entsteht wieder ein konachsiales Feld, aber dasselbe ist aus der Übereinanderlagerung zweier gleicher Felder entstanden. Wenn durch dasselbe Raumelement eines Mediums zwei Kraftliniensysteme in gleichem Sinn und in gleicher Richtung ihre Kraftlinien hindurch senden, so addieren sich die Wirkungen, wie wir in § 122 sahen. Wir erhalten also aus der Übereinanderlagerung beider Stromfelder ein neues Feld, für welches an jeder Stelle die Feldstärke die doppelte wie in dem einfachen Felde ist, für welches also auch die Feldkonstante C den doppelten Wert hat. Ähnliches gilt für drei und mehr Ströme. Wir erkennen, dass C jener Grösse, die den einzelnen Strom mit seinem Felde charakterisiert, einfach proportional sein muss. Bezeichnen wir sie mit i, so können wir schreiben:

$$C = \varkappa i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 27\,b)$$

wo $\varkappa$ ein Zahlenfaktor ist. Wir könnten i passend die „Charakteristik des Stromfeldes" nennen. Wir werden aber bald sehen, dass sie mit jener Grösse identisch ist, für welche die älteren Strömungstheorien die Bezeichnung „Stromstärke" eingeführt hatten. Haben wir uns oben dazu entschlossen, die einmal üblich gewordenen Bezeichnungen „Strom", „Strombahn" u. s. w. beizubehalten, so wollen wir jetzt auch das Wort „Stromstärke" einführen, wiewohl der mit demselben nach unserer Darstellung zu verbindende Begriff gar nichts mit der Stärke einer Strömung zu thun hat.

Das Gesetz 27 a (Biot und Savart) lautet bei Einführung von i demnach

$$\mathfrak{H} = \varkappa \frac{i}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 28)$$

Über den Wert des Zahlenfaktors $\varkappa$ können wir noch frei verfügen; er enthält offenbar noch die Permeabilität μ des Mediums, da von ihr die unter gleichen Umständen in der Entfernung r ausgebildete Zahl von Kraftlinien pro Flächeneinheit $\mathfrak{H}$ abhängt.

In den meisten Lehrbüchern wird das Biot-Savartsche Gesetz nicht in dieser einfachen Form gegeben. Man strebte danach, die Erscheinungen auf sogenannte „Elementarwirkungen" zurückzuführen. Schrieb man die Wirkung auf die Polstärkeneinheit + 1 in der Entfernung r vom geradlinigen Stromträger der Summe der Einzelwirkungen eines jeden Elementes der Strombahn zu, so musste diese Wirkung proportional dem „Stromelemente" $i \cdot dx$ sein, wenn dx ein Längenelement des Trägers war. Aus perspektivischen Gründen kam ferner das umgekehrte Quadrat der Entfernung ϱ der betrachteten Stelle von dem Elemente in die Formel hinein. Dadurch hatte man eine formale Ähnlichkeit mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz erreicht; dafür musste aber eine Winkelbeziehung mit in die Formel

aufgenommen werden, welche diesem Gesetze an sich fremd ist. Die Elementarwirkung ändert sich mit dem Sinus des Winkels, welchen ϱ und dx miteinander bilden. Das Elementargesetz lautet dann

$$\frac{i \cdot dx \sin \alpha}{\varrho^2}$$

Dieser Ausdruck ist durch das Experiment nicht kontrollierbar, da die Natur uns nirgends Elementarwirkungen darbietet. Um zu Ausdrücken zu gelangen, welche wir beim Studium der uns entgegentretenden Objekte wirklich gebrauchen können, müssen wir bei der älteren Darstellung erst wieder den umgekehrten rechnerischen Weg einschlagen und die Elementarwirkungen zusammenaddieren. Wir wollen dies für den von uns direkt behandelten Fall des geradlinigen langen Leiters thun, indem wir etwa die x-Werte von dem Fusspunkte der Enfernung r an zählen. Dann ist $\varrho = \sqrt{r^2 + x^2}$, $\sin \alpha = r/\varrho$ und zu summieren sind die Ausdrücke

$$i r \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Das giebt nach den Regeln der Integralrechnung bei unendlich ausgedehntem geradlinigen Leiter $\mathfrak{H} = 2\,i/r$, also bis auf den Zahlenfaktor $\varkappa$ dasselbe wie die Formel 28; $\varkappa$ hat nach dem Elementargesetze den Zifferwert 2.

Um mit dem allgemein üblich gewordenen Maasssysteme im Einklang zu bleiben, wollen wir die Einheit für die Stromstärke i so wählen, dass der Zahlenfaktor $\varkappa$ den speziellen Wert 2 annimmt, so dass das Gesetz der Feldstärkeverteilung um einen langen geradlinigen Strom von der Stärke i lautet

$$\mathfrak{H} = 2\,\frac{i}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 29)$$

Dabei haben wir die Permeabilität des umgebenden Mediums $\mu = 1$ vorausgesetzt; im allgemeinen ist $\mathfrak{H} = 2\,\mu\,i/r$.

Die oben erwähnte Zerlegung der Wirkung in die Einzelwirkungen von Elementen bietet rechnerische Vorteile, wenn es gilt, die Kraftlinienzahl an bestimmten Punkten des Feldes zu berechnen und wenn die Achse nicht mehr die einfache geradlinige Gestalt hat. Biegen wir z. B. ein Leiterstück von der Länge $2\,\pi\,R$ zu seiner ebenen kreisförmigen Stromschleife vom Radius R zusammen, so ergiebt sich für die Mitte des Kreisstromes die pro cm² zusammengedrängte Kraftlinienzahl wie folgt: Jedes Element des Ringes steht auf dem Radius R senkrecht, für jedes ist der $\sin \alpha$ also gleich 1. Die Entfernung der Mitte von jedem Elemente ist R; die Summe aller Längenelemente dx ist $2\,\pi\,R$, wir erhalten also für die Wirkung auf den in der Mitte gebrachten Einheitspol + 1 den Wert:

$$\mathfrak{H} = \frac{2\,\pi\,R}{R^2}\,i = \frac{2\,\pi\,i}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 30)$$

166. Dimension der Stromstärke. — Da nach Formel 29) $\mathfrak{H} = 2\,i/r$ oder $i = {}^1/_2\,\mathfrak{H}\,r$ ist, so kann die Stromstärke i als eine mit einer Länge multiplizierte magnetische Feldstärke aufgefasst werden. Daraus ergiebt sich, insofern als dim $\mathfrak{H} = \mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-1}$ ist,

$$\dim i = \mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-1}.$$

Weil wir bei dieser Bestimmung der Stromstärke von den elektromagnetischen Erscheinungen des galvanischen Stromes ausgegangen sind, so haben wir das hier festgesetzte Maass als ein „elektromagnetisches“ zu bezeichnen, und die die Stromstärke i messenden Einheiten als „elektromagnetische“, abgekürzt E.M.E.

Bei der Definition der Stromstärke wurden lediglich die magnetischen Eigenschaften dieser Erscheinung benutzt und durch diese ihr Begriff und Wert bestimmt. Danach ist sie als eine rein magnetische Grösse zu betrachten.

Nach älteren Anschauungen fliesst ein Etwas in einem Leitungsdrahte. Misst e die Quantität desselben, so ist die Stärke des Strömens durch die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt gegangene Menge desselben zu messen, also

$$i = \frac{de}{dt}, \text{ oder } de = i \cdot dt.$$

Die Dimension dieses hypothetischen Substrates würde also

$$\dim e = \mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}$$

in unserem E.M.-Maasssystem sein.

167. Strommessung in absolutem Maasse; die Einheit der Stromstärke: das Ampère. — Ein Teil eines Stromkreises, in dem die Stromstärke i bestimmt werden soll, sei ein cylindrischer Draht, den wir horizontal geradlinig ausstrecken, Fig. 66. Der Strom verlaufe in diesem Leiterstück S von rückwärts nach vorn. Senkrecht zur Drahtrichtung befestigen wir in derselben Horizontalebene einen dünnen Stabmagneten M von bekannter Polstärke m, indem wir ihn an zwei sich gabelnde, dem Drahte S parallele Fäden F_1 und F_2 binden, so dass er sich in der Vertikalebene frei und leicht drehen kann. An dem dem Stromträger S zugekehrten und nahe an diesen heranreichenden Ende n wird eine leichte Wagschale w befestigt und der Magnetstab M so äquilibriert, dass er in der Ruhelage gerade auf den Draht zu zeigt. Am anderen Ende s wird eine kleine Skala S mit einer Marke m aufgestellt.

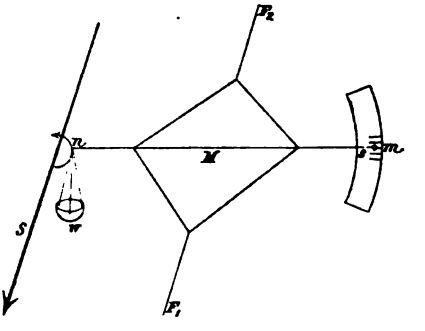


Fig. 66.

Wird das Magnetkraftliniensystem des Stromes in dem durch den Pfeil auf S bezeichneten Sinne erregt, so wird der Nordpol n des Magneten gehoben, s sinkt auf der Skala.

Durch Einlegen von Gewichten in die Wagschale w wird s wieder zum Einspielen auf die Marke gebracht. Sind hierzu p gr nötig und

ist m die Polstärke des Magneten, so ist die Stärke des Stromfeldes an der Stelle, wo sich n befindet, gleich

$$\mathfrak{H} = \frac{981 \cdot p}{m}.$$

Misst man noch die Entfernung r des Poles n von der Drahtachse S, so ist die auf die Einheit der Entfernung reduzierte Feldstärke $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}/r$ und die gesuchte Stromstärke in absolutem Maasse

$$i = \frac{1}{2}\mathfrak{H}_1.$$

Die geringe durch das erdmagnetische Feld auf die Stromkraftlinien ausgeübte störende Wirkung kann man bei dieser Messung vernachlässigen, wenn der Strom hinreichend stark ist. Die Wirkung des Erdmagnetismus auf den Stab M fällt bei dieser „Nullmethode" heraus.

Für den Stab § 66 mit $m = 2$ cm$^{3/2}$ gr$^{1/2}$ sek^{-1}, und einen gestreckten Manganindraht von 0,6 cm Dicke ergab sich bei $r = 0{,}4$ cm $p = 0{,}020$ gr. Hieraus berechnet sich die den Pol m bewegende Kraft zu 20 Dyne, $\mathfrak{H} = 10$ cm$^{-1/2}$ gr$^{1/2}$ sek^{-1} und $i = 2$ absolute Einheiten.

Man ist übereingekommen, den 10. Teil der Einheit des von uns eingeführten elektromagnetischen Strommaasses nach dem französischen Physiker Ampère zu nennen. Mit Rücksicht auf Formel 29 kann man z. B. sagen:

Ein Strom von 1 Ampère Stärke ruft in der Entfernung von 1 cm von der Stromachse eine Feldstärke von $^1/_{20}$ absoluten Einheiten bei einem Feldmedium von der Permeabilität $\mu = 1$ hervor.

Daneben ist aber die absolute Einheit selbst gleich 10 Ampère auch noch in praktischem Gebrauch. Man bezeichnet sie zweckmässig als „Dekaampère".

Der von uns bei der obigen Messung benutzte Strom hatte also 2 Dekaampère oder 20 Ampère Stärke.

168. Die Tangentenbussole. — Weit bequemer und sicherer als die im vorigen Paragraphen angegebene mehr schematische Methode der Stromstärkemessung in absolutem Maasse ist die der sogenannten „Tangentenbussole". Dieselbe besteht im wesentlichen aus einem ebenen in den magnetischen Meridian gestellten Kreisring, durch den der zu messende Strom hindurchgeleitet wird und in dessen Mitte eine kurze Deklinationsnadel beweglich angebracht ist. Das Bild der Kraftlinienverteilung in der durch die Nadel gelegten Horizontalebene zeigt die Fig. 51. Hat der Ring den Radius R, so ist die Feldstärke in seiner Mitte nach § 165

$$\mathfrak{H} = \frac{2\pi i}{R}.$$

Die Kraftlinien verlaufen nahezu in gleicher Dichte in der nächsten Umgebung der Ringmitte und senkrecht zur Ebene des Ringes; das Stromfeld ist hier also nahezu homogen. An jedem der beiden Nadelpole greifen zwei Kräfte an: die aus der Ebene des Ringes heraustreibende Kraft des Magnetfeldes $\mathfrak{H}$ und die in diese Ebene des Meridians zurücktreibende Horizontalkomponente $\mathfrak{h}$ des erdmagnetischen Feldes. Nach dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte findet Gleichgewicht bei einer Nadelablenkung um den Winkel φ statt, für welche

$$\operatorname{tg} \varphi = \mathfrak{H}/\mathfrak{h} \text{ ist.}$$

Hieraus ergiebt sich die Stromstärke

$$i = \frac{R\,\mathfrak{h}}{2\pi} \operatorname{tg} \varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 31)$$

Da alle Grössen rechts in absolutem Maasse bestimmbar sind, so ergiebt sich auch i in dem gleichen Maasse als eine mit einer Länge R multiplizierte Feldstärke $\mathfrak{h}$, wie schon oben beim geradlinigen Strome hervorgehoben wurde ($\operatorname{tg} \varphi$ ist als Verhältniszahl dimensionslos wie 2π).

Am Modelle Fig. 20 erläutert man das Zustandekommen des Gleichgewichts bei einem bestimmten Ausschlagwinkel φ, indem man an die Haken $h\,h$ noch zwei weitere Fäden $f\,f$ hängt, welche senkrecht zu der in die Richtung des magnetischen Meridians gebrachten Achse von m seitlich herausgezogen und über zwei andere an Klötzen von der Form k_1 und k_2 befestigte Rollen $r\,r$ geführt werden. An die Fadenenden werden zwei gleiche Gewichte $G\,G$ gehängt. Diese repräsentieren das vom Stromfelde auf die Pole ausgeübte Kräftepaar, während $g\,g$ die von der Horizontalkomponente des Erdmagnetismus herrührenden Kräfte darstellen.

169. Arbeit der elektromagnetischen Kräfte. — Die elektromagnetischen Kräfte haben das Bestreben, einen in der Entfernung r von einem geradlinigen Stromträger entfernten Pol um den Leiter in kreisförmiger Bahn herumzuführen. Hat der Pol die Stärke $+1$, so ist die auf ihn wirkende Kraft $\mathfrak{H} = 2\,i/r$ Dyne bei einem Strome von der Stärke i $\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-1}$. Bewegt diese den Pol um die Länge $d\,l$ vorwärts, so hat sie dabei die Arbeit $d\,A = \mathfrak{H} \cdot d\,l$ geleistet. Das Wegelement $d\,l$ auf der Kreisbahn vom Radius r drückt sich durch den auf einem konzentrischen Kreise vom Radius 1 gemessenen entsprechenden Bogenelemente $d\beta$ durch $d\,l = r \cdot d\beta$ aus, so dass $d\,A = \mathfrak{H}\,r\,d\beta$ ist. Lässt man den Pol unter der Wirkung der im Stromfelde auf ihn ausgeübten Kraft einmal um den Leiter herumwandern, so ist $\beta = 2\pi$ geworden und die dabei verrichtete Arbeit ist

$$A = \mathfrak{H} \cdot r\,2\pi = \frac{2\,i\,r\,2\pi}{r}$$

oder

$$A = 4\pi i \quad \ldots\ldots\ldots \quad 32)$$

Aus diesem Ausdrucke für A ist die Entfernung r vollkommen herausgefallen, die Arbeitsgrösse A ist also überall dieselbe, wo sich auch der Pol im Felde befinden mag.

Der Weg ist um so länger, je grösser r ist, im gleichen Maasse ist aber auch die Kraft $\mathfrak{H}$ kleiner; daher ist die Arbeit längs einer äusseren Kraftlinie des konachsialen Feldes dieselbe wie die längs einer inneren.

In einem Medium von der Permeabilität μ ist $A = 4\pi\mu i$. Fällt der Weg des Poles $+1$ nicht mit einer Kraftlinie zusammen, sondern ist er beliebig gestaltet, so kommt für jedes Wegelement nur eine Komponente der tangential zu der durch dieses hindurchgehenden Kraftlinie verlaufenden Feldintensität $\mathfrak{H}$ in Betracht, welche in demselben Verhältnisse kleiner als $\mathfrak{H}$ ist, wie das Element selbst grösser als das entsprechende Bogenstück auf der Kraftlinie ist. Der Arbeitsbetrag dA bei Bewegung längs dieses beliebig verlaufenden Wegstückes ist also ebenso gross, wie das auf einem entsprechenden der vorher betrachteten, den Kraftlinien angehörenden Kurvenstücke dl, so dass die Arbeit $A = 4\pi i$, bezw. $4\pi\mu i$ ist, bei einmaliger Umkreisung des Stromträgers i auch auf irgend einem beliebigen Wege, z. B. den Seiten eines Rechtecks.

Man könnte i also auch durch die bei einmaliger Umkreisung des Stromträgers durch den Einheitspol von den magnetischen Kräften geleisteten Arbeit definieren, bei $\mu = 1$ also durch:

$$i = \frac{1}{4\pi} A.$$

Man sieht auch hier wieder wie die Stromstärke i als Charakteristik eines bestimmten Feldes angesehen werden kann.

In der That ist auch die Dimension der Arbeitstgrösse pro Polstärkeeinheit die oben § 166 für i angegebene:

$$\dim i = \frac{\mathrm{cm}^2\,\mathrm{gr}\,\mathrm{sek}^{-2}}{\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-1}} = \mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-1}$$

Bei mehrmaligen Umkreisungen nimmt der Arbeitswert für jede Stelle des Feldes immer um die Grösse $4\pi i$ für jede Umkreisung zu. Derselbe ist also eine vieldeutige Grösse; sie hängt von der Zahl der vor sich gegangenen Umläufe um den Stromträger ab; die einzelnen Werte unterscheiden sich voneinander um ganzzahlige Vielfache der Grösse $4\pi i$.

Hierauf beruht die Vieldeutigkeit des sogenannten „elektromagnetischen Potentiales." $4\pi i$ ist für dieses der sogenannte Periodicitätsmodul. Durch diese Mehrdeutigkeit des Arbeitswertes unterscheiden sich die elektromagnetischen Kräfte wesentlich von anderen Kräften, z. B. der Schwerkraft. Für diese hat die Arbeitsgrösse (das Potential) für jede Stelle des Raumes einen und nur einen ganz bestimmten Wert.

Längs jeder um eine Kraftachse herumgehenden Kraftröhre des Stromfeldes hat die magnetomotorische Kraft § 113 denselben Wert $4\pi i$. Da der Widerstand bei derselben Permeabilität an allen Stellen des Feldes wie die Länge der Röhre bei gegebenem Querschnitte wächst, so wird für Röhren von derselben Dicke der Induktionsfluss um so kleiner, je weiter sie von der Achse entfernt sind. Teilen wir umgekehrt das Feld in Kraftröhren ab, für welche die Querschnitte wie ihre Abstände von der Kraftachse wachsen, so ist für diese der gesamte Induktionsfluss immer der gleiche, da der magnetische Widerstand umgekehrt wie der Röhrenquerschnitt variiert.

170. Energieinhalt einer Stromschleife. — In § 150 wurde schon darauf hingewiesen, dass innerhalb einer Stromschleife durch die darin vereinigten Kraftlinien ein bestimmter Betrag magnetischer Feldenergie angesammelt ist. Um denselben abzuschätzen, können wir ebenso wie in § 119 schliessen, wo wir uns ein Urteil über die in einem Magnetfelde überhaupt vorhandene Energie verschafften. Wir wollen uns hier damit begnügen, den Ausdruck für die Änderung des Bestandes an magnetischer Eigenenergie für eine gegebene Kraftachse abzuleiten, also das Energiedifferential dE zu berechnen.

Zunächst ist klar, dass die Energie des Feldes von der Stromstärke i abhängt. Denn einer Stromstärke von 1, 2, 3 . . . Einheiten entspricht an jeder Stelle des Feldes unter sonst gleichen Umständen die 1, 2, 3 . . . fache Dichte der Kraftlinien. Ist i die Stromstärke einer gegebenen Achsenschleife, so giebt i ein Maass für die Raumerfüllung mit Kraftlinien (vergl. Formel 30). Sollen mehr Kraftlinien bei derselben Stromstärke in die Schleife gebracht werden, so muss eine Arbeit geleistet werden, wie bei dem Hineinbringen des Einheitspoles in ein gegebenes Feld. Diese Arbeit ist um so grösser, je dichter der Raum mit Kraftlinien bereits angefüllt ist, also ist sie proportional mit i. Sie ist aber ferner auch um so beträchtlicher, je grösser die Zahl der Kraftlinien ist, die auf's neue in das Feld gebracht werden sollen. Bezeichnen wir die Kraftlinienzahl, welche die Leiterschleife schon umschliesst, mit N, jene Zunahme mit dN, so ist die Arbeit auch proportional mit dN. Ist sonst keine Arbeit verbraucht worden, so ist die gesamte auf Vermehrung der Kraftlinienzahl verwendete Arbeit zur Steigerung der magnetischen Feldenergie verwandt worden, also ist

$$dE = i \cdot dN \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 33)$$

Was hier von der einzelnen Achsenschleife gesagt ist, gilt für die ganze stets in sich zurücklaufende Strombahn; die Änderung der in

ihrem Felde enthaltenen elektromagnetischen Eigenenergie ist durch den Ausdruck $i \cdot dN$ gegeben, wo dN die Änderung der gesamten Kraftlinienzahl überhaupt bedeutet.

171. Das Stromfeld als monocyklischer Mechanismus. — Da die Feldstärke $\mathfrak{H}$ an jeder Stelle eines Stromfeldes der Stromstärke i proportional ist, nach den kinetischen Theorien $\mathfrak{H}$ aber der cyklischen Geschwindigkeit proportional ist, so hat die Gesamtheit aller in sich zurücklaufenden Bewegungen eines Stromfeldes den Charakter eines Monocykels § 143, dessen cyklische Geschwindigkeit q gleich der Stromstärke i ist.

Man hat eine grosse Reihe zum Teil sehr sinnreicher Modelle konstruiert, um die Bewegungen der kleinsten Teilchen in einem Stromfelde zu illustrieren (z. B. Ol. Lodge). Dieselben bringen aber meist nicht die mit der Entfernung von der Strombahn abnehmende Winkelgeschwindigkeit zum Ausdruck. Fig. 67 stellt einen Querschnitt durch den oberen Teil des Feldes eines geradlinigen Stromträgers S dar, in dem jene Bewegungen auch in ihrer relativen Geschwindigkeit durch monocyklische Verknüpfungen dargestellt werden (vergl. §§ 136 bis 143).

Auf einem Brette BB, Fig. 67, von 50 cm Länge und 43 cm Breite ist am Rande einer Längsseite eine quadratische Holzleiste von 3 cm Breite befestigt, welche den Stromträger S repräsentiert. Ihr entsprechend ist daher auf der anderen Brettseite (Rückseite der Figur) ein ebenso breiter Streifen roten Papieres mit roten Pfeilen aufgeklebt. Durch die übrig bleibende Brettfläche von 40 × 50 cm² Inhalt sind vier Reihen von je 5 Löchern im Abstande von je 10 cm voneinander gebohrt. Entsprechend jeder Vertikalreihe dieser Löcher sind am oberen Rande des Brettes BB die fünf Träger t befestigt, welche ebensoviele Holzleisten tragen, die mit ihren anderen Enden auf S ruhen. Sie sind in derselben Weise wie das Brett durchbohrt. Zwischen diesem und den Leisten sind Holzrollen mit je vier Riefen eingesetzt, welche sich mit horizontalen durch die Löcher gehenden Stiften als Achsen in den Bohrungen leicht drehen. Die Durchmesser der Rollen in der untersten Reihe r_1 betragen 2 cm (von der Mitte der Riefentiefe auf der einen zur anderen Seite gemessen); die der zweiten r_2 4, der dritten r_3 6 und der vierten r_4 8 cm. Ehe man die Holzleisten auf S und den Trägern t befestigt, werden in sich zurücklaufende Gummifäden in die Rollenriefen gelegt und dadurch jede Rolle

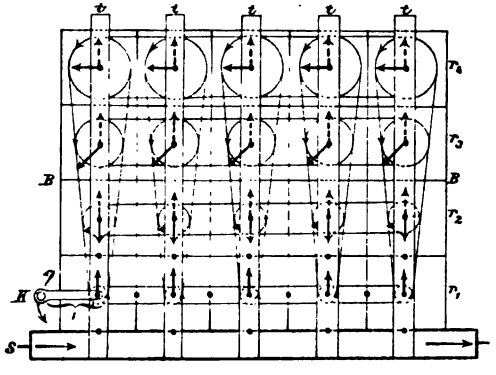


Fig. 67.

mit allen Nachbarn gekoppelt. Auf den aus dem Brette B nach vorn herausragenden Achsenenden sind Papierscheiben befestigt, auf welche Pfeile gezeichnet sind (in der Figur angedeutet). Eine Rolle (unten links) ist mit einer Kurbel K versehen (Antriebspunkt). Stehen zu einer Zeit alle Pfeile nach oben (gestrichelte Stellung), und dreht man K im Stromsinne S einmal herum, so haben dieselben in der Entfernung 4 der Rollenreihe r_4 von der Stromachse $^1/_4$, die in der Reihe r_3 $^1/_3$, in der Reihe r_2 $^1/_2$ Umdrehungen vollendet, wie die ausgezogenen Pfeile der Figur andeuten. Die Winkelgeschwindigkeit und die durch sie dargestellte magnetische Kraft nimmt also umgekehrt proportional der Entfernung ab. Die Kraftlinienzahl pro Flächeneinheit ist auf dem Streifen r_1 viermal so gross wie auf dem Streifen r_4 was durch eingeschlagene Stifte auf dem in Quadrate eingeteilten Brette angedeutet ist.

Die Bewegung im ganzen Felde ist durch eine einzige Grösse, die Winkelgeschwindigkeit q des Antriebspunktes K bestimmt (cyklische Geschwindigkeit = Stromstärke).

C) Elektromagnetische Kraftflussdiagramme.

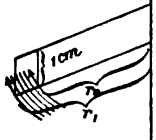
Ganz ähnlich wie wir im 5. Kapitel die Felder eines Magnetpoles graphisch darstellten, und durch Kombination zweier Diagramme bipolare Felder konstruierten, so wollen wir jetzt die Felder geradliniger Teile einer Strombahn veranschaulichen. Dazu müssen wir ein gewisses Zeichnungsprinzip festlegen, welches ebenso wie die Darstellungsmethoden der rein magnetischen Vorgänge etwas Konventionelles enthalten wird. Durch Kombination dieser Stromfelder mit magnetischen Diagrammen erhalten wir Bilder elektromagnetischer Wechselwirkungen.

172. Graphische Darstellung des konzentrischen Kraftliniensystems eines geradlinigen Stromes. — Die Zeichenebene werde senkrecht zum Stromträger gelegt, weil nur dann die Kraftlinien in ihrer natürlichen Gestalt als Kreise erscheinen. Wie früher nehmen wir auch hier an, dass dem Medium ausserhalb der eigentlichen Strombahn durchweg die Permeabilität $\mu = 1$ zukomme. Dann stimmt der Induktionsfluss, den wir eigentlich nur beobachten und darstellen, mit dem Verlaufe des Kraftflusses überein, die Induktionslinien fallen überall mit den Kraftlinien zusammen. Ferner wollen wir von den unendlich vielen Kraftlinien solche auswählen, welche Gebiete mit gleichem Kraftfluss und zwar mit dem Kraftfluss 1 begrenzen und nur diese Grenzlinien der Einheitssolenoide § 84 zur Abbildung bringen. Gegenüber der Zeichnung von Magnetfelddiagrammen sind wir hier im Vorteil, insofern wir einfachere Festsetzungen treffen können. Während bei diesen Figuren konstruiert werden mussten, die erst bei einer Rotation um eine Achse Räume von gleichem Kraftflusse begrenzten, verfahren wir bei den konzentrischen Feldern nach der folgenden Regel: Wir denken

uns zu der Zeichenebene eine zweite Ebene im Abstande von 1 cm parallel gelegt. Errichten wir dann über den gezeichneten Kraftlinien orthogonale Kreiscylinder, so umschliessen je zwei von diesen mit den beiden Ebenen einen Kanal von rechteckigem Querschnitt, der rings um den Stromträger herumgeht. Wir wählen die Kraftlinien so aus, dass der Kraftfluss durch jeden dieser Kanäle der gleiche und zwar gleich einer absoluten Einheit ist. Da die Feldstärke umgekehrt proportional mit der Entfernung vom Stromträger abnimmt, so muss der Radius des $p$ten Kraftlinienringes $r_p = e^{\frac{p}{2i}}$ sein, wenn der des innersten $= 1$ cm ist, wo e die Basis des natürlichen Logarithmensystems ($= 2{,}71828\cdots$) und i die Konstante des konzentrischen Kraftliniensystems (die sogenannte Stromstärke) bedeutet.

Ableitung der Formel: Die Feldstärke $\mathfrak{H}$ in der Entfernung r ist $\mathfrak{H} = \frac{2i}{r}$, daselbst kommen also auf einen schmalen, ebenen, zur Kraftlinienrichtung senkrecht stehenden Flächenstreifen von der (radialen Breite) dr und der (in Richtung des Stromleiters genommenen) Höhe von 1 cm $\mathfrak{H} \cdot dr \cdot 1$ Kraftlinien oder der Kraftfluss durch dieses Flächenelement ist $2i\frac{dr}{r}$. Der Kraftfluss durch einen Flächenstreifen, dessen Ebene durch das geradlinige Leiterstück geht, der also überall senkrecht zu den Kraftlinien steht, von 1 cm Höhe (vergl. Fig. 68) ist zwischen den Radien r_0 und r_1

$$2i\int_{r_0}^{r_1}\frac{dr}{r} = 2i \log \text{nat}\,\frac{r_1}{r_0}.$$



Sucht man zu einem gegebenen r_0 dasjenige r_1, für welches der Kraftfluss durch das betrachtete Flächenstück gleich 1 ist, so hat man zur Bestimmung von r_1 die Gleichung:

$$2i \log \text{nat}\,\frac{r_1}{r_0} = 1 \text{ oder } r_1 = r_0\, e^{1/2i}.$$

Der nächste Ring r_2, der zwischen sich und r_1 ein Flächenstück abschneidet, durch welches (immer bei 1 cm Höhe) derselbe Kraftfluss stattfindet, ist

$$r_2 = r_1\, e^{1/2i} = r_0\, e^{2/2i};$$

der p Ring hat die Radiuslänge

$$r_p = r_{p-1} \cdot e^{1/2i} = r_0 \cdot e^{\frac{p}{2i}}.$$

Fig. 68.

Ist im speziellen $r_0 = 1$ cm, so ergiebt sich die obige Formel.

Nach diesem Verfahren ist das Diagramm Fig. 69 auf Tafel II

gezeichnet. Dasselbe stellt im halbfach verkleinerten Maassstabe das Feld um einen geradlinigen Stromteil von grosser Länge bei 50 Ampère = 5 Deckaampère = 5 E.M.Stromeinheiten Stärke dar. ($^1/_{2.5}$ also gleich $^1/_{10}$).

173. Entnahme des absoluten Wertes der Feldstärke in irgend einem Punkte des konzentrischen Kraftlinienfeldes aus dem Diagramm. — Das Diagramm Fig. 69 können wir wie die früheren ähnlichen Darstellungen von Magnetfeldern dazu benutzen, die Feldstärke in irgend einem Punkte in absolutem Maasse zu bestimmen. Nach der Art der Konstruktion erhält man diese überall, wenn man den mit dem Maassstabe abgemessenen Abstand b der der Stelle beiderseitig benachbarten Kraftlinien in 1 hineindividiert. Dabei ist natürlich der Maasstab, in dem das Diagramm angelegt ist, geeignet zu berücksichtigen.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens folgt aus der Beziehung $\mathfrak{H} \times b \cdot 1 = 1$. Wollen wir z. B. die Feldstärke in der durch ein × bezeichneten Stelle des Feldes Fig. 69 bestimmen, welche zwischen der 21. und 22. Kraftlinie liegt, so messen wir den Abstand dieser beiden Linien. Wir entnehmen der Figur $b = 4{,}1$ mm. Der Maassstab der Darstellung ist aber 1 : 2; in Wirklichkeit ist also $b = 0{,}82$ cm daraus folgt $\mathfrak{H} = 1{,}2$. Machen wir die Probe, indem wir nach der Formel $\mathfrak{H} = 2\,i/r$ die Feldstärke berechnen. Der Abstand der inneren Kraftlinie Nr. 21 ist in der Figur 4,1 cm, daher in Wirklichkeit 8,2 cm. Für die Raumpunkte, welche auf ihr liegen, berechnet sich daher bei $i = 5$ Dekaampère, für welche das Diagramm entworfen wurde, die Feldstärke $\mathfrak{H}$ zu 1,2 $cm^{-1/2}\,gr^{1/2}\,sek^{-1}$. Für in der Nähe liegende Punkte ist sie nahezu ebenso gross.

174. Diagramm des elektromagnetischen Grundversuches. — Die Veränderungen, welche ein Magnetpol in dem Kraftlinienverlaufe eines Stromfeldes hervorruft, bringt man graphisch durch Superposition der beiden entsprechenden Felddiagramme zur Darstellung. Nur müssen wir hier für das unipolare Feld des Magneten eine etwas andere Art der Zeichnung als früher in Kapitel 5 wählen, da wir das Feld des Stromes durch orthogonale Projektion einer Centimeter dicken Schicht auf eine Ebene und nicht als Rotationsfigur um eine Achse dargestellt haben. Wir machen die Annahme, dass die Wirkung des langen und dünnen Magnetstabes, den wir in das Stromfeld bringen, auf sein äusserstes Ende § 21 von etwa 1 cm Länge beschränkt sei. Dann können wir die Veränderung des Kraftflusses konstruktiv finden, welche dieses in der es enthaltenden 1 cm dicken Schicht des Stromfeldes hervorruft. Wir denken uns diese Schicht durch die Zeichenebene des Diagrammes Fig. 70, Tafel II, nach unten zu begrenzt und entwerfen in dieser die Grenzlinien der Streifen, durch welche ein Kraftfluss 1 hindurchgeht, für beide Magnetfelder. Diese Grenzlinien sind für den Strom die schon in § 172 gezeichneten konzentrischen Kreise, auf deren zehnten (der innerste als nullter gerechnet) wir den Pol S

legen; seine Entfernung ist dann mit Rücksicht auf den auch hier gewählten Maassstab 1 : 2 in Wirklichkeit gleich 2,4 cm; bei einem Strome von 5 Dekaampère ist die Feldstärke an der Stelle, wo sich der Pol S befindet, demnach

$$\mathfrak{H} = 4{,}2 \text{ cm}^{-1/2} \text{ gr}^{1/2} \text{ sek}^{-1}.$$

Der Strom trete von oben her durch die Zeichenebene, die Stromkraftlinien laufen dann uhrzeigermässig um A herum, wie die Pfeile oberhalb A andeuten. Das Diagramm des Poles ist in der genannten Schicht ein fächerförmig von dem 1 cm langen Stück auslaufendes Kastensystem, welches aus ebensoviel gleichwinkeligen Räumen besteht, als der Magnetstab Kraftflusseinheiten der Schicht entzieht (Sinkstelle). Wir wollen annehmen, dass es acht solche Einheiten seien.

Die Polstärke ist dann grösser wie 8, weil der Pol von oben und unten noch Kraftlinien nach sich hinzieht.

In der Zeichenebene erscheinen die begrenzenden Scheidewände in Orthogonalprojektion als acht unter gleichen Winkeln nach S zusammenlaufende gerade Linien. Die Stromkraftlinie, auf der S selbst liegt, läuft unabgelenkt in diese Sinkstelle hinein. Dieselbe muss also von einer Kraftlinie von S tangiert werden; wir erhalten so für die gegenseitige Lage der beiden Diagramme die in Fig. 70 benutzte Anordnung.

Auf jeder Seite dieser Linie zieht S aus der Nachbarschaft je vier Kraftflusseinheiten zu sich heran, die hier scheinbar endigen, in den Magneten hineingehen und aus dem Felde verschwinden. Die Richtung des Herbeiströmens ist durch beide Liniensysteme bestimmt. Der resultierende Lauf der begrenzenden Kraftlinien ergiebt sich, wenn in den rautenförmigen Figuren zwischen je zwei Linien des einen und des anderen Systems die mit den entsprechenden Richtungen der Kraftlinien gleichsinnigen Diagonalen gezogen werden. An der Sinkstelle S selbst laufen sämtliche Resultanten tangential zu den Polkraftlinien ein. Die so erhaltene Fig. 70 ist mit dem Feilichtbilde Fig. 57 zu vergleichen, welches gewissermaassen an der unteren Grenze der Schicht von 1 cm Dicke, die wir betrachten, entstanden ist, nur dass dort der Strom und seine Kraftlinien die umgekehrte Richtung haben.

Acht Kraftflussstreifen des Stromes laufen in S kometenschweifartig zusammen. Die sonst in sich zurücklaufenden Stromkraftlinien sind dadurch zu unendlichen Spiralen geöffnet.

Kann der Südpol *S* dem Zuge der Kraftlinien frei folgen, so wird er in einer der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzten Richtung um den Stromträger *A* herum rotieren, indem er sich an den ihm entgegenkommenden Stromkraftlinien entlang saugt. Da diese sich in immer weiteren Spiralen um den Träger herumziehen und die ferneren in dem Maasse herandrängen, wie die inneren von der Sinkstelle *S* aufgenommen werden, so könnte scheinbar eine ins Unbegrenzte sich fortsetzende Rotation erhalten werden, ein wahres „Perpetuum mobile". Doch dürfen wir nicht vergessen, dass wir hier eine Fiktion vor uns haben, da wir thatsächlich einen freien Magnetpol nie herstellen können, ganz abgesehen davon, dass wir zur Unterhaltung des Magnetkraftfeldes des Stromes fortwährend Energie aufwenden müssen, wie wir später sehen werden.

10. Kapitel.

Stromspulen, Solenoide und Elektromagnete.

Nachdem wir den einfachen Strom und seine Kraftlinien und deren Wirkungen auf magnetische Systeme kennen gelernt haben, wollen wir zu Formen von Stromträgern übergehen, denen eine grosse theoretische wie namentlich praktische Bedeutung zukommt. Sie gehen alle aus dem konzentrischen Kraftachsensysteme dadurch hervor, dass man an bestimmten Stellen des Raumes eine grosse Anzahl von Stromkraftlinien sammelt. Dazu bieten sich zwei Wege: Einmal können wir ausgedehnte Teile der Achse selbst auf kleinem Raume zusammendrängen, was am bequemsten durch Aufwinden, Aufspulen des Stromträgers geschieht; andererseits lässt sich die Permeabilität des Mediums, in dem die Stromkraftlinien zur Ausbildung gelangen, durch Eisenmassen erheblich vermehren. So kommen wir von den Stromspulen zu den sogenannten Elektromagneten, die ausserordentlich viel kräftigere Magnete sind, als die natürlichen oder als wir sie durch magazinartige Anordnung von Dauermagneten jemals herzustellen im stande wären. Mit ihnen lassen sich dann die magnetischen Eigenschaften der verschiedenen Substanzen viel genauer studieren, als dies mit den relativ schwachen Kräften der Stahlmagnete möglich ist.

175. Stromspulen. — Wir hatten schon oben, § 149, das Zusammendrängen von Kraftlinien zu einem Bündel durch Biegen eines Stromträgers zu einer Schleife besprochen. Jetzt wollen wir noch mehr Kraftlinien dadurch vereinigen, dass wir weitere Windungen an die schon gebildete legen. Wir drängen dann um so mehr Kraftlinien im Inneren zusammen, eine je grössere Länge des Leitungsdrahtes wir aufwinden, d. h. je grösser die Zahl der einzelnen aneinander liegenden Schleifen ist; wir erhalten so eine „Stromspule“. Sie ist flach, ihre Länge klein im Vergleich zu ihrem Durchmesser, die Gestalt der umwundenen Fläche meist kreisförmig. Die durch die Mitte der Win-

dungen hindurchgehende, zu deren Ebenen senkrechte Gerade nennt man die Spulenachse.

Die Summe der von den einzelnen Windungen begrenzten ebenen Flächen nennt man die „gesamte Windungsfläche". Sie ist für die Zahl der durch die Spule hindurchgehenden Kraftlinien maassgebend. Insofern, als für diese auch die Stromstärke in Ampères bestimmend ist, spricht man von der „Zahl der Ampèrewindungen" und meint damit das Produkt aus Windungszahl und Stromstärke. Die Feldstärke ist proportional der Zahl der Ampèrewindungen.

Das Kraftlinienbild der Stromspule in einer durch die Achse gelegten Ebene zeigt Fig. 71. Bei *Sp*, *Sp* tritt die Spule durch die Bildebene, um sich über und unter derselben zu schliessen. Die die einzelnen Windungen begleitenden gleich gerichteten Kraftlinien haben sich zu kontinuierlich fortlaufenden Kurven vereinigt, welche in der Nähe der Spule deren Querschnitt noch ziemlich konzentrisch umgeben. Die weiter entfernten Linien sind dagegen von dem Überdruck im Inneren in stark excentrische Lagen nach aussen gedrängt worden. In der Nähe der Spulenachse wird das Feld nahezu homogen.

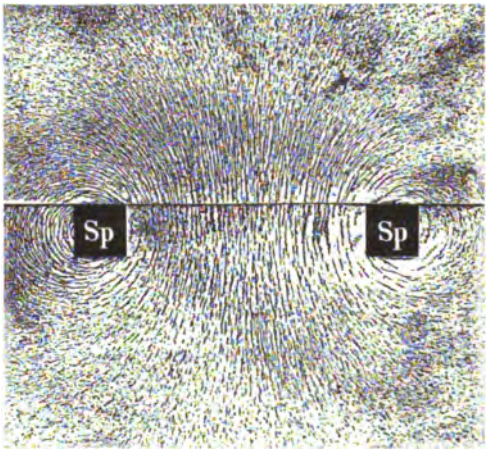


Fig. 71.

Das Kraftlinienbild Fig. 71 ist in folgender Weise hergestellt: Auf einen ringförmigen Holzrahmen von 1,7 cm Breite, 2,0 cm Höhe und 11 cm innerem Durchmesser sind viele Windungen eines übersponnenen, 1 mm dicken Kupferdrahtes gewunden und der Rahmen auf einem Fuss vertikal befestigt. Ein Stück dicker Pappe mit rechteckigem Ausschnitt wird so weit über den Ring geschoben, dass die obere, horizontal gestellte Fläche gerade durch die Ringmitte geht. Von vorn wird ein an seiner vorderen Kante mit Ausschnitten für die Spule *Sp* versehener Kartonbogen über die Pappe geschoben, und von der anderen Seite her eine zweite Kartonscheibe mit geradlinigem Rande darauf gelegt. Dadurch erhält man auch den inneren Teil des Bildes und kann dasselbe nach Herausnehmen und Wiederzusammenlegen der beiden Blätter photographieren, ohne durch den oberen Teil der Spule behindert zu sein. Freilich bekommt man dann die (in der Figur beschattete) Begrenzungslinie des zweitgenannten Kartonblattes mit auf das Bild (von ihr rührt die oberhalb *Sp Sp* verlaufende schwarze Linie her).

176. Multiplikatoren. — Auf dem Sammeln möglichst vieler Stromkraftlinien beruhen die zum Nachweis und zur Messung selbst schwacher

Stromwirkungen dienenden „Multiplikatoren". Um die Wirkung der einfachen Stromschleife auf eine Magnetnadel zu verstärken, „multipliziert man die durch sie gehende Kraftlinienzahl", indem man viele Windungen aneinander legt. So entstanden die ersten empfindlichen stromanzeigenden und strommessenden Instrumente (Schweigger und Poggendorff, 1820).

Wenn man statt einer einfachen Nadel im Inneren der Spule ein astatisches Nadelpaar anwendet, von dem die eine Nadel im Inneren, die andere entgegengesetzt magnetisierte über den Drahtwindungen schwebt, kann man die Wirkung noch mehr steigern. Denn einmal schwächt man die in die Ruhelage zurücktreibende Wirkung der erdmagnetischen Kraft, § 45, andererseits addieren sich die ablenkenden Wirkungen, welche die Windungen auf die innere und die äussere Nadel ausüben, wovon man sich mit Hilfe der Daumenregel (§ 160) leicht überzeugt, wenn man die rechte Hand im Stromsinne an die oberen Windungen legt, die Handfläche einmal der oberen, dann der unteren inneren Magnetnadel zukehrend.

Da auch die Polaritäten der beiden Nadeln auf derselben Seite des astatischen Systems entgegengesetzte sind, so verstärken sich die auf sie ausgeübten Stromwirkungen.

177. Galvanometer. — Die Genauigkeit der Strommessung durch Ablenkungen einer Magnetnadel wird erhöht, wenn man statt einer zwei Spulen desselben Stromkreises so anordnet, dass die von der einen zusammengeschnürten Kraftlinien bei ihrem Austritt von der unmittelbar davorstehenden zweiten Spule aufgenommen und zusammengehalten werden. Man verhindert dadurch, dass sich die Kraftlinien dort, wo man ihre Wirkung mit der des Erdmagnetismus vergleichen will, zerstreuen, und erhält zwischen den beiden Spulen ein fast homogenes Feld. In dieses hängt man an einem Cocon- oder dünnen Quarzfaden den Magneten, dem man zweckmässig die Form einer flachen Kreisscheibe giebt; dieselbe ist aus Stahl gefertigt und so magnetisiert, dass die magnetische Achse der aufgehängten Scheibe horizontal liegt. Poliert man eine Fläche, so kann man durch die eine Spule hindurch Ablenkungen dieses spiegelnden Magneten mit Hilfe von Fernrohr und Skala sehr genau messen (G. Wiedemanns Spiegelgalvanometer). Statt eines Stahlspiegels wurde von Siemens der in § 23 erwähnte Glockenmagnet eingeführt, an dessen Stiel der Beobachtungsspiegel befestigt ist. Die Stahlscheibe oder der Glockenmagnet sind aus später zu besprechenden Gründen von einem Kupfergehäuse umschlossen; die Aufhängevorrichtung ist durch Glas vor Luftzug geschützt.

Neuerdings verwendet man mehrfache Nadelsysteme, welche zwischen

zwei Spulenpaaren angeordnet sind. An einem breitgeschlagenen Stück Aluminiumdraht ist in der Mitte ein leichter versilberter Glasspiegel befestigt. Oben und unten sind eine Reihe kurzer, leichter, kleiner Magnete aus Uhrfederstahl beiderseitig so angekittet, dass die magnetischen Achsen in jedem Systeme gleichsinnig liegen, bei dem oberen Systeme aber alle N-Pole nach der einen, bei dem unteren nach der entgegengesetzten Seite gerichtet sind. Ist die Zahl der Einzelmagnete oben und unten die gleiche, und sind die Magnete alle nahezu gleich stark magnetisiert, so ist das ganze System sehr nahe astatisch, da die Wirkung des Erdmagnetismus auf das obere System durch die entgegengesetzte auf das untere fast aufgehoben wird. Dagegen ist das magnetische Moment der Systeme trotz ihres geringen Gewichtes verhältnismässig gross. Jedes Nadelsystem wird zwischen je zwei Spulen gebracht, welche paarweise gleichsinnig vom Strome durchlaufen werden, das obere Paar im umgekehrten Sinne wie das untere. Wird das Nadelsystem an einem dünnen Quarzfaden aufgehängt, so lassen diese Instrumente eine sehr grosse Empfindlichkeit (bis auf Billiontel Ampère) erreichen (W. Thomson, H. E. J. G. du Bois und Rubens).

178. Solenoide. — Einen langen, steifen Draht winden wir derart spiral in einer Lage auf, dass zwischen den einzelnen Windungen ein

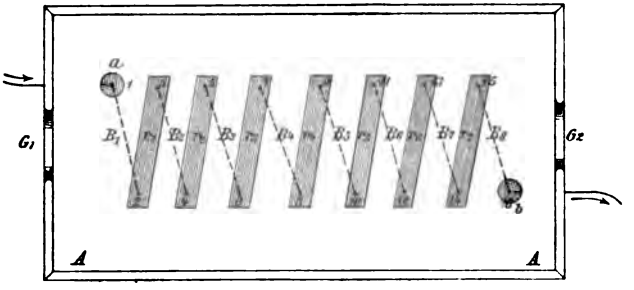


Fig. 72.

bestimmter Zwischenraum bleibt, der uns gestattet, die Vorgänge im Inneren zu verfolgen. Die entstehende Drahtröhre nennt man ein „Solenoid", wobei eine Verwechselung mit den in § 84 eingeführten, in ganz anderem Sinne verstandenen „Einheitssolenoiden" nicht zu fürchten sein dürfte. Wir wollen den Kraftlinienverlauf in der Umgebung eines solchen Solenoides verfolgen, wenn wir dasselbe zur Achse eines konzentrischen Kraftsystems machen.

In ein mit Rand versehenes Brett AA, Fig. 72, von 12×25 cm² Fläche sind die beiden Quecksilbernäpfchen a und b eingetieft, zu welchen Drähte von aussen

her hinführen. Ferner ist hier eine Reihe von Querrinnen r_1 bis r_7 eingeschnitten, welche ebenfalls mit Quecksilber gefüllt werden. Auf das Brett AA wird ein gleich grosses gelegt, das in seiner Lage von dem Rande des unteren festgehalten wird, der bei G_1 und G_2 halbkreisförmig ausgeschnitten ist, damit man es bequem wieder abheben kann. Durch das obere Brett sind eine Reihe von Löchern senkrecht zu der Ober- und Unterfläche an den Stellen 1, 2, 3 . . . bis 16 gebohrt, durch welche Drahtbügel B_1, B_2 . . . bis B_8 gesteckt werden. Tauchen ihre amalgamierten unteren geraden Enden in die Quecksilbernäpfchen, bezw. Rinnen in der in der Figur angegebenen Weise, so stellen sie die oberen Windungsteile eines Solenoides von acht getrennten Windungen dar, deren untere Teile durch die Quecksilberrinnen gebildet werden. Dass diese nicht den oberen Windungen entsprechend gekrümmt sind, beeinflusst die Erscheinung nur wenig.

Auf dem oberen Brette wird der mit entsprechenden Durchbohrungen versehene Karton befestigt. Hat man feinen Eisenstaub gleichmässig aufgestäubt, so setzt man die Bügel B der Reihe nach ein, wodurch zwischen a und b eine metallische Verbindung hergestellt wird. Nach dem Öffnen des Stromes hebt man die Bügel vorsichtig wieder heraus und kann nun das Bild durch Aufsprühen der § 7 erwähnten Lösungen fixieren oder auf Klebepapier abdrücken oder, wie es bei Herstellung der Fig. 73 geschehen ist, photographieren.

Das Kraftlinienbild eines Solenoides in einer durch seine Achse gehenden Ebene, Fig. 73. — Jeder der in der Figur als schwarzer Punkt erscheinenden Leiterquerschnitte giebt sich als zu einem Stromsystem gehörig durch die Kraftlinien, welche er um sich gesammelt hält, zu erkennen. Da aber die benachbarten Windungen alle einen Strom von derselben Richtung tragen, so fliessen die weiter entfernten Kraftlinien ineinander. Im Inneren des Solenoides entsteht daher ein kontinuierlicher Kraftlinienzug, welcher guirlandenförmig die einzelnen Abteilungen des Stromträgers begleitet. Jede Windung hat neue Kraftlinien zusammengeschnürt und führt den Kraftfluss der vorhergehenden weiter. Im Inneren ist die magnetische Kraft daher sehr stark, aussen fehlen Kraftlinien fast ganz. Je näher wir der Achse des Solenoides kommen, um so mehr laufen die Kraftlinien untereinander parallel; das Feld wird homogen. Fig. 73 veranschaulicht ferner den Querdruck, den die Kraftlinien aufeinander ausüben. Wie bei einem Bündel elastischer Fäden, welches durch Umwinden mit einem Drahte fest zusammengeschnürt ist, quellen die äussersten Linien zwischen den Drähten heraus und sind unter ihnen dicht zusammengedrängt. Ein solches Stromsolenoid enthält sehr viel mehr elektromagnetische Feldenergie als die einzelne Windung. An den Enden verbreiten sich die Kraftlinien beiderseits nach allen Seiten hin.

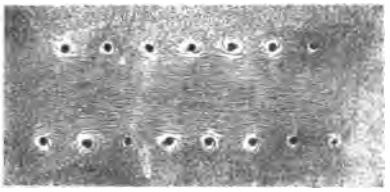


Fig. 73.

179. Äquivalenz zwischen Solenoiden und Stabmagneten. — Bei einem Solenoid treten die Kraftlinien an der einen Seite wie bei dem Nordpole eines Dauermagneten aus dem Inneren hervor, um auf der anderen Seite wie an einer südpolaren Sinkstelle wieder einzumünden. Ein Solenoid verhält sich in seinem Kraftlinienverlauf nach aussen also gerade so wie ein Stabmagnet.

Verfolgen wir die Stromrichtung, so ist auch das Ende eindeutig bestimmt, an dem die Kraftlinien hervortreten, welches sich demnach wie der Nordpol eines Magneten verhalten muss, sowie das Ende, wo sie wieder einmünden, das magnetische Südende. Da der Stromträger uhrzeigermässig von den Kraftlinien umlaufen wird, so gehen diese dort in das Innere der Windungen hinein, wo letztere von aussen gesehen uhrzeigermässig von der Stromrichtung umkreist werden. Das Ende des Solenoides dagegen, welches den Strom in dem der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzten Sinne herumführt, muss als Kraftlinienquelle, also nordmagnetisch erscheinen.

Modell des Solenoides mit seinen Kraftlinien. Aus dickem, rot übersponnenen Kupferdraht wird eine ca. 30 cm lange, 5 cm weite Spirale gewickelt und auf dieser durch rote Pfeile die Stromrichtung angedeutet. Durch das Innere zieht man eine Reihe von Kraftröhrenmodellen, Fig. 39, die man aussen in sich schliesst § 127, so hindurch, dass die den magnetischen Kräften entsprechenden Drehbewegungen im gleichen Sinne wie die Stromrichtung erfolgen.

Diese Solenoidmodelle sind den üblich gewordenen Walzen mit aufgezeichneten Pfeilen vorzuziehen.

Das Modell entspricht in dem Kraftlinienverlaufe vollkommen der Magnetröhre Fig. 42.

Hier möge darauf hingewiesen werden, wie durch das Modell mit seinen Drehbewegungen im Inneren u. a. auch das Phänomen der elektromagnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichtes erläutert werden kann. Schicken wir längs der Kraftlinien die periodisch wechselnden Zustände eines Lichtstrahles durch das Solenoid, so teilt sich die transversal zur Kraftlinie erfolgende Zustandsänderung immer Teilchen mit, die selbst in Rotation um die Kraftlinienrichtung als Achse begriffen sind. Es ist daher verständlich, dass eine solche ursprünglich in einer bestimmten Richtung erfolgende Zustandsänderung, ein sogenannter geradlinig polarisierter Lichtstrahl, nach dem Durchgange durch die stromdurchflossene Spirale in ihrer Richtung etwas gedreht erscheint. Dies war der Ausgangspunkt der in § 120 erwähnten Schlüsse von W. Thomson und Maxwell über die Existenz von Drehbewegungen im Felde.

Dass ein Solenoid wie ein Magnet wirkt, zeigen folgende Versuche:

Versuch 58. Eine offene lange Drahtspirale, an der die Stromrichtung und in deren Innerem die entsprechende Kraftlinienrichtung

bezeichnet ist — am besten also das eben beschriebene Modell — wird durch Leitungsschnüre an stromgebende Polklemmen angeschlossen und den Polen einer feststehenden Deklinationsnadel mit langen Papierfahnen an den Enden genähert: Man kann sämtliche Ablenkungsversuche in beiden Hauptlagen, wie sie in § 38 mit einem Magnetstabe angestellt wurden, mit dem Solenoide in gleicher Weise wiederholen.

Versuch 59. Ein Solenoid aus dickem Aluminiumdraht wird an seinen Enden an lange Goldfäden gehängt. Bei Annäherung eines Dauermagneten von der Seite her ergeben sich Ablenkungen in dem einen oder anderen Sinne, bei Annäherung in achsialer Richtung die Anziehungs- und Abstossungserscheinungen des § 33.

Die Versuche am Ampèreschen Stative (§ 151) mit Spiralen, die mit Spitzen in Quecksilbernäpfchen tauchen, anzustellen, empfiehlt sich weniger, als die Verwendung derartiger an Goldfäden hängender Aluminiumdrahtspiralen.

So gross die Ähnlichkeit zwischen Solenoiden und Magneten von derselben äusseren Form auch ist, so besteht doch zwischen ihnen ein sehr wesentlicher Unterschied; derselbe ist auf die schon im 8. Kapitel hervorgehobenen Unterschiede in den räumlichen Zusammenhängen von Stromfeldern und Magnetfeldern zurückzuführen. Bei den Stahlmagneten können wir den Kraftlinienverlauf nicht mehr in das Innere hinein direkt verfolgen, wir vermuten nur, dass er von den Molekularmagneten aufgenommen und weitergegeben wird.

Bei dem Solenoid können wir den Kraftlinienverlauf ungestört durch das ganze Innere hindurch verfolgen; wir treffen hier überall dasselbe Medium mit derselben Permeabilität wie im Aussenraume an und können den Kraftlinien folgend vollständig durch den Feldträger von einer Seite zur anderen hindurchwandern, ohne auf Flächen zu stossen, an denen Medien ganz verschiedener magnetischer Beschaffenheit aneinander grenzen.

180. Stromspiralen. — Man steigert die Wirkungen der Solenoide erheblich, wenn man eine grössere Anzahl Kraftlinien in ihnen zusammenschnürt, d. h. wenn man grössere und immer grössere Längen des Stromträgers in ihnen vereinigt. Dadurch werden auch noch die kleinen Unregelmässigkeiten am Rande ausgeglichen, welche sich bei offenen Solenoiden in einem teilweisen Herausquellen von Kraftlinien (vergl. Fig. 73), einem sogenannten „Streuen“ derselben geltend machen.

Wir wollen diese dichten Solenoide, bei denen sich Windung an Windung eines isolierten Drahtes in mehreren Lagen legt, eine „Stromspirale“ nennen.

Bei ihnen müssen sich ähnliche Erscheinungen wie bei den Sole-

noiden ergeben, nur in noch gesteigertem Maasse, dem grösseren Reichtum an Kraftlinien entsprechend. So ist auch für Stromspiralen das Hervorquellen und Divergieren von Kraftlinien an einem Ende (*N*) und das Konvergieren und Einlaufen am anderen Ende (*S*), sowie die Ausbildung eines kräftigen homogenen Feldes im Inneren besonders charakteristisch.

Fig. 74 zeigt eine zur Herstellung der im folgenden besprochenen Felder geeignete Anordnung von oben gesehen: Auf einem mit Rand und Füssen versehenen Grundbrette *AA* von 16 × 40 cm² Fläche erheben sich die beiden um 18 cm voneinander entfernten Träger *BB*, in deren obere Hälften zwei kreisförmige Löcher von 2,5 cm Durchmesser in gleicher Höhe über *AA* eingeschnitten sind. In diesen Löchern lagert eine Pappröhre *C* von gleichem äusseren Durchmesser und etwa 2 mm Wandstärke (in der Figur durch gestrichelte Längslinien angedeutet). Auf diese Röhre sind die Windungen des isolierten, 1 mm dicken Kupferdrahtes aufgewickelt. Bei dem Apparate, mit Hilfe dessen die Figg. 75—78 hergestellt sind, war der Draht in fünf Lagen von je 100 Windungen aufgewickelt, so dass die gesamte Windungszahl 500 und die Windungszahl pro Längeneinheit der Spirale rund 28 war. Bei *FF* kommen die Drahtenden heraus.

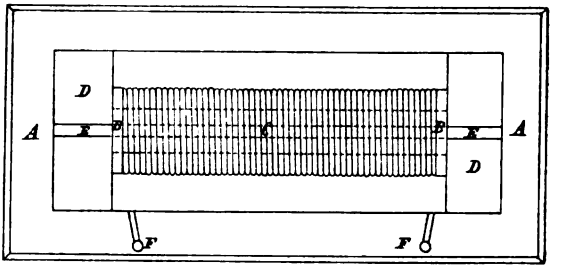


Fig. 74.

Damit man den Kraftlinienverlauf innerhalb und ausserhalb der Windungslagen und namentlich auch an den Enden der Spirale bequem untersuchen kann, ist die untere Hälfte der Pappröhre *C* mit Holz ausgelegt; in ihrer Achsenhöhe sind an den Trägern *BB* Holzplatten *DD* befestigt, welche sich mit ihrer Oberfläche mit der Holzauskleidung im Inneren vergleichen; aussen laufen Holzleisten in gleicher Höhe an der Spirale entlang. Auf den so gebildeten Tisch werden die Kartonblätter gelegt, welche geeignete Ausschnitte für die Windungslagen erhalten, so dass sie tief in das Innere und am Aussenrande entlang geschoben werden können.

Besonders wichtig ist es, das Verhalten von Dauermagneten und weichen Eisenstücken in den Spiralenfeldern sich vor Augen zu führen. Zu diesem Zwecke ist in die Holzträger *DD* und den inneren Halbcylinder eine Nut *EE* eingeschnitten, welche ganz durch das Spiraleninnere hindurchgeht. In diese werden Magnet- oder Eisenstäbe von quadratischem Querschnitt eingelegt.

181. Magnetische Wirkungen von Stromspiralen. — Wir wollen mit den Feldern von stromdurchflossenen Spiralen eine Reihe von Versuchen anstellen, welche den Kraftlinienverlauf bei Anordnungen veranschaulichen sollen, die in ihren (besonders auch technischen) Anwendungen eine grosse Rolle spielen.

Feld der Pole einer Stromspirale. Wir betrachten zunächst das ungestörte Hervorquellen der Kraftlinien aus dem Ende einer

Stromspirale, Fig. 75. Von unten her ragen in das Bild die Querschnitte der Windungslagen hinein. Dieselben reichen nicht ganz bis vorn, wie oben erwähnt wurde, sondern sind durch das Brett *B*, Fig. 74, von der Vorderfläche des Apparates getrennt. Im Inneren ist das Feld homogen. Dort, wo links die Kraftlinien auf dem Bilde erscheinen, beginnen sie schon zu divergieren. An den Enden der durch die schwarzen Rechtecke bezeichneten Spirale liegen keine Stromwindungen mehr. Daher dringen die Kraftlinien hier ungehindert durch und ihre regelmässigen Fortsetzungen erscheinen ausserhalb der Spirale. Man sieht, wie der kräftige, aus dem Inneren hervordringende Kraftlinienstrom sich vor der Mündung allseitig deltaartig verbreitet. In dieses Feld vor den Spiralenpolen wollen wir einmal solche Massen einführen, welche selbst Kraftlinien entsenden, andererseits solche, die sich durch besonders hohe Permeabilität vor ihrer Umgebung auszeichnen.

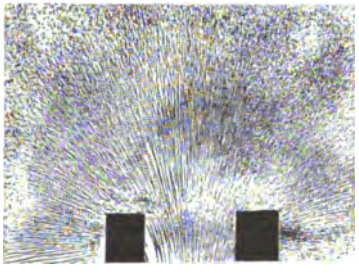


Fig. 75.

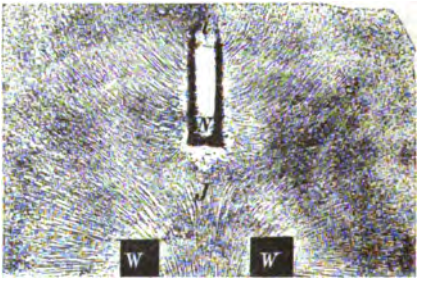


Fig. 76.

a) Wirkung einer Stromspirale auf Dauermagnete. Wir legen in die Rinne *E* des Apparates Fig. 74 einen kräftigen Magnetstab von quadratischem Querschnitt so ein, dass er seinen dem Spiralenpole gleichnamigen Pol diesem zuwendet. Fig. 76 zeigt, wie der zwischen den Windungen *WW* hervortretende Kraftlinienstrom abgelenkt wird und das Hindernis der ihm von *N* her entgegen drängenden gleichnamigen Linien umgeht. Wie die Stromfäden zweier benachbarter Quellen, welche ihr Wasser gegeneinander senden, biegen die zwischen *WW* herauskommenden Linien den von *N* herkommenden aus, um erst viel später hinter der Indifferenzzone *i* des Magneten dem Südpole desselben (ausserhalb der Figur) zuzuströmen. Vor dem Solenoid entsteht auf diese Weise ein Indifferenzpunkt *J*, eine räumlich eng begrenzte Astasierungszone. Ist der Magnet beweglich, so wird er von dem Spiralenpole durch den Kraftliniendruck in achsialer Richtung weggedrängt; hält man ihn fest, so kann man mit ihm

die Stromspirale, wenn sie beweglich ist, in umgekehrter Richtung verschieben.

Ist der ungleichnamige Pol des Magneten der Mündung *WW* zugekehrt, so tritt das Umgekehrte ein. Man erhält ein Bild, welches dem der Fig. 77 ähnlich ist. Die aus dem Spiralenende austretenden Kraftlinien strömen in die dargebotene Sinkstelle des Magneten ein. Der Kraftlinienzug würde den Magneten in das Innere der Stromspirale hineinziehen, oder wenn dieser festgehalten wird, die Spirale über den Magneten zu schieben suchen.

Diese ponderomotorischen Wirkungen von Stromspiralen auf konachsial gelegene Stabmagnete wurden bei vielen Elektromotoren älterer Konstruktion verwendet. Beim Commutieren des Stromes kann ein hin- und hergehender Bewegungsantrieb wie bei dem Kolben der Dampfmaschine erhalten werden.

b) Wirkungen einer Stromspirale auf weiches Eisen. Da das Eisen Kraftlinien sammelt, entsteht immer an dem der Spirale zugekehrten Ende eine Sinkstelle; das Eisen wird dahin gezogen, wo die Kraftlinien am dichtesten verlaufen, also von Aussen in das Innere der Spirale hinein, unabhängig von der Stromrichtung. Hierauf beruht die grosse Verwendbarkeit dieser Erscheinung, z. B. bei der Regulierung von Bogenlampen u. s. w.

In die Rinne *E* des Apparates Fig. 74 wird ein kurzes Stück weichen Eisens von quadratischem Querschnitt gelegt. Senden wir den Strom im einen oder anderen Sinne durch die Spirale, so erhalten wir das Bild Fig. 77. Die aus dem Inneren der Spirale zwischen den Windungslagen *WW* austretenden Kraftlinien zerstreuen sich nicht gleichmässig wie in Fig. 75, sondern wenden sich dem weichen Eisen *Fe* von grosser Permeabilität zu, treten bei *e* ein und nehmen durch dasselbe ihren Weg. Erst bei *a* am anderen Ende treten sie wieder aus. Hier bei *a* verlaufen die Kraftlinien viel dichter wie ohne Eisen an derselben Stelle; *e* ist eine Sinkstelle, *a* ein neuer Quellpunkt geworden. Die anderen Kraftlinien, welche nicht mehr von dem Eisen aufgenommen werden können, drängen von der Seite heran. Durch das Eisen werden die Kraftlinien so zusammengehalten, dass sie noch vor *WW* ein fast homogenes Feld von *h* bis *e* bilden. Ist das Eisenstück *Fe* frei beweglich, so ziehen es die bei *e* angehefteten Kraftlinien in das Innere der Spirale hinein.

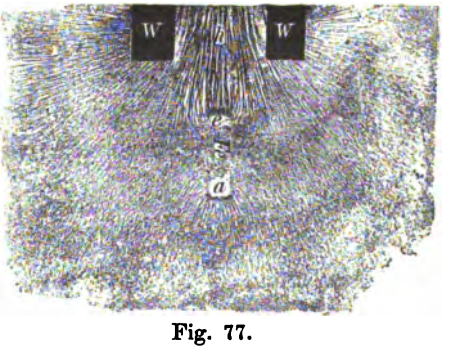


Fig. 77.

Die Stärke dieses Zuges hängt von der Zahl der vorhandenen Kraftlinien ab. Da diese proportional der Stromstärke wächst, so kann diese Erscheinung zum Messen der Stromstärke verwendet werden.

Versuch 60. Eine kräftige Spirale wird vertikal auf drei Füsse gestellt. Ein Eisenkern, der bequem in das Innere der Spirale hineinpasst und etwas länger als diese ist, wird von unten her in sie hineingesteckt. Schickt man einen starken Strom durch die Spirale, so wird das Eisen emporgehoben und in das Spiraleninnere gezogen; beim Öffnen fällt es wieder herab.

182. Federampèremeter. — In der Achse einer auf einem Fusse oder an der Wand in vertikaler Stellung befestigten Spirale ist ein langer Führungsstift befestigt. Über ihn hin kann in das Spiraleninnere ein Hohlcylinder aus dünnem Eisenblech gleiten, welcher oben von einer elastischen Spiralfeder gehalten wird. Ist die Spirale stromlos, so ragt nur das unterste Ende des Eisencylinders in sie hinein. Wird der Strom geschlossen, so wird der Eisenblechcylinder gegen die Wirkung der Feder in das Innere der Spirale hinabgezogen und zwar um so tiefer, je stärker der Strom ist. Ein mit dem Cylinder verbundener, über einer vertikalen Skala spielender Zeiger giebt die Stromstärke in Ampères an, wenn die Skala vorher empirisch in entsprechender Weise geteilt worden ist (Fr. Kohlrausch).

Für den Unterricht ist es sehr zweckmässig, immer die Ampèrezahl, mit der gearbeitet wird, hervorzuheben; dadurch prägt sich nicht nur die Bezeichnung ein, sondern es verbindet sich schliesslich ein ganz bestimmter Begriff mit einer gewissen Zahl von diesen praktischen Einheiten. Es empfiehlt sich daher ein namentlich auch in der Technik übliches Messinstrument in grosser Form im Auditorium aufzustellen. Ein Kohlrausch-Federampèremeter eignet sich dazu ganz vorzüglich, da es leicht ohne grosse Kosten in solchen Dimensionen hergestellt werden kann, dass seine Angaben weithin sichtbar sind.

183. Das homogene Innenfeld einer Stromspirale. — Stromspiralen liefern eines der wichtigsten Hilfsmittel zur Erzeugung starker homogener Magnetfelder. Ist die Spirale hinreichend lang, so verlieren sich bald die Wirkungen der freien Enden auf das Innere, in demselben verlaufen die Kraftlinien untereinander genau parallel. Wir wollen ein solches Innenfeld dazu benutzen, um uns die Eigenschaften der hohen Permeabilität des weichen Eisens noch einmal recht übersichtlich vor Augen zu führen.

In die Rinne *E* des Apparates Fig. 74 legen wir wieder das kurze Eisenstück und kleben auf ihm einen Streifen Kartonpapier von der Breite der Höhlung der Spirale *C* (mit Siegellack) fest. Nachdem wir das Kartonpapier gleichförmig mit Eisenpulver bestäubt haben, schieben wir es mit dem Eisenkern in das Innere der Spirale. Nach kurzem Stromschluss und Klopfen ist das Bild Fig. 78 entstanden.

Die in dem Inneren der Spirale untereinander parallel verlaufenden

Kraftlinien konvergieren stark gegen das eine Ende des hineingebrachten Eisens *Fe* (Fig. 78); sie gehen in dasselbe hinein und erscheinen erst am anderen Ende wieder, um in grösserer Entfernung durch ihren parallelen Lauf die wiederhergestellte Homogenität des Feldes anzuzeigen. Von der Seite her drängen neue Kraftlinien heran. Weiches Eisen in dem Inneren einer Stromspirale sammelt Kraftlinien.

Fig. 78.

Da auf der einen Seite von *Fe* gerade so viele Kraftlinien ein- wie auf der anderen austreten und da die Kraftlinien in grösserer Entfernung weder konvergieren noch divergieren, so heben sich die beiderseitigen ponderomotorischen Wirkungen auf das Stück auf; es würde im Inneren keinen Bewegungsantrieb erfahren.

Die richtende Kraft, welche in dem homogenen Inneren von Stromspiralen auf Eisenteilchen ausgeübt wird, kann man durch folgenden Projektionsversuch auch einem grösseren Auditorium veranschaulichen: Auf einem kurzen weiten Glascylinder, der an den Enden durch aufzuschraubende Deckgläser geschlossen werden kann (wie er zur Untersuchung der Drehung der Polarisationsebene bei Zuckerbestimmungen benutzt wird), sind mehrere Lagen eines dicken Leitungsdrahtes aufgewunden. In ihn füllt man ein Gemisch aus Glycerin und Eisenfeilspänen und stellt ihn vor der Projektionslampe in die Achse des austretenden Strahlenkegels. Das Bild des Röhrenquerschnittes erscheint zunächst dunkel, weil die Eisenteilchen durcheinander liegen. Schickt man aber einen kräftigen Strom durch die Spirale, so ordnen sie sich in achsiale Ketten und die Röhre wird durchsichtig.

184. Magnetisierungsspiralen. — Die homogenen kräftigen Innenfelder langer Stromspiralen benutzt man zum Magnetisieren von Stahlstäben. Dies ist eine viel wirksamere Art der Magnetisierung als die § 19 besprochenen Strichmethoden, denn man verfügt hier über viel dichtere Kraftlinienbündel und kann daher eine grössere Anzahl Kraftlinien selbst bei hoher Coercitivkraft § 18 in den Stahl hinein bringen. Wenn die Spirale länger als der zu magnetisierende Stahlstab ist, so ist ferner die magnetische Kraft längs desselben überall die gleiche, es wird daher eine sehr gleichförmige Ausmagnetisierung erzielt.

Versuch 61. Unmagnetische Stahlstricknadeln steckt man in eine längere, stromdurchflossene Spirale. Nach dem Herausziehen der Nadeln erweisen sie sich als sehr kräftige Magnetstäbe.

Wie schon erwähnt, hängt die Zahl der im Inneren einer Stromspirale gesammelten Kraftlinien von der Zahl der Windungen und der Stromstärke, also der Zahl der „Ampèrewindungen“ § 175 ab. Da bei einer langen Spirale in allen von den Enden weit genug entfernten Querschnitten die Intensität des Feldes die gleiche ist, so genügt zur

Bestimmung der Feldstärke im Inneren die Angabe der Ampèrewindungen pro Centimeter Länge.

Ist l die Gesamtlänge und liegen auf der Spirale im Ganzen n Windungen, so kommen auf jede Längeneinheit n/l derselben. Die Ampèrewindungszahl pro 1 cm Spiralenlänge ist also bei i Ampère Stromstärke $n/l \times i$. Ihr muss die Feldstärke im Inneren an jeder Stelle proportional sein. Eine der in § 165 durchgeführten, analoge Betrachtung zeigt, dass die Feldstärke $\mathfrak{H}$ im Inneren einer aus n Windungen bestehenden langen Spirale von der Länge l bei einer Stromstärke von i Ampère

$$\mathfrak{H} = 4\pi \frac{n}{l} \frac{i}{10} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 33)$$

ist.

Bei der Spirale Fig. 74, bei welcher n/l rund 28 war, hatten wir bei 20 Ampère oder 2 Dekaampère = 2 E.M.Einheiten Stromstärke, welche bei der Herstellung der Kraftlinienbilder auf kurze Zeit gelegentlich benutzt wurde, im Inneren der Spirale eine Feldstärke von rund 700 Einheiten. Ein Einheitspol würde in der Spirale also mit einer Kraft von 700 Dyne angefasst werden, die etwa dem Druck von 7 Decigramm auf ihre Unterlage entspricht. 700 Kraftlinien gehen durch den Quadratcentimeter Querschnittsfläche im Inneren der Spirale. Im erdmagnetischen Felde kam auf je 2 cm² Fläche eine Kraftlinie, unser Feld ist also ca. 1400 mal stärker als das der Erde im mittleren Europa.

185. Der Elektromagnet. — Weiches Eisen hat eine mehr als 1000fach so gute magnetische Leitfähigkeit als Luft. Füllen wir daher das Innere einer Stromspirale mit diesem Materiale aus, so müssen wir des geringen magnetischen Widerstandes wegen bei derselben Zahl von Ampèrewindungen pro Längeneinheit, also derselben magnetomotorischen Kraft, an jeder Stelle des Inneren der Stromspirale eine ausserordentlich viel grössere Anzahl von Kraftlinien erhalten. An den Enden solcher mit Eisenkernen versehenen Spiralen müssen demnach sehr dichte Kraftlinienbündel ein- und auslaufen. Man nennt diese Stromspiralen mit Eisenkernen: „Elektromagnete".

Versuch 62. Eine Stromspirale wird an biegsame Leitungsschnüre angeschlossen und Eisennägeln genähert: Einzelne derselben werden in das Innere gezogen oder an den Enden festgehalten. Wird in das Innere ein genau hineinpassender Eisenkern geschoben, so wird bei derselben an dem eingeschalteten Ampèremeter abgelesenen Stromstärke eine viel grössere magnetische Wirkung hervorgerufen. Wird (an einer entfernten Stelle) die Leitung unterbrochen, so fallen die Nägel ab, die magnetische Wirkung ist bis auf einen kleinen Rest (Remanenz) verschwunden.

Da der Eisenkern nur die Permeabilität in einem Teile des Stromfeldes wirksam erhöht, so wird an der Polarität der Spirale § 179 nichts geändert:

Der Nordpol eines Elektromagneten ist das Ende, welches dem Uhrzeigersinne entgegengesetzt, der Südpol das, welches dem Uhrzeigersinne gleichgerichtet vom Strome umflossen erscheint.

Bewickelt man einen in sich zurücklaufenden Eisenring ganz mit einer oder mehreren Lagen von isoliertem Draht, so erhält man beim Stromschluss ein elektromagnetisch erregtes Toroid. Die magnetomotorische Kraft im Inneren hängt auch hier von der Zahl der Amperewindungen pro Längeneinheit § 184 in der der Formel 33 entsprechenden Weise ab. Bei dem geringen magnetischen Widerstande des Materiales und dem völligen Fortfallen aller entmagnetisierenden Enden (§ 96) lassen sich in einem solchen Toroid bei dieser Art der Magnetisierung ausserordentlich hohe Intensitäten $\mathfrak{Z}$ und hohe Werte des Induktionsflusses I erzeugen. Solche endenlose Stromspiralen und in sich zurücklaufende Elektromagnete verwendet man daher vorwiegend zur Untersuchung der magnetischen Eigenschaften der verschiedenen Eisensorten u. s. w.

186. Einige Anwendungen der Elektromagnete. — Die Verwendungen der Elektromagnete sind so vielseitig, dass wir uns hier mit einigen ganz flüchtigen Andeutungen begnügen. Zunächst kann man alle jene Versuche, welche wir im 1. und 2. Kapitel mit Dauermagneten angestellt haben, mit Elektromagneten in sehr viel wirksamerer Weise wiederholen. Dazu verbindet man die Magnete mit den Polklemmen durch biegsame Leitungsschnüre oder hängt sie an kräftigen Goldbändern auf.

Wir können gerade oder in Hufeisenform gebogene Eisenstäbe gleichsinnig mit isoliertem Drahte umwickeln und erhalten so Elektromagnete in Stab- oder Hufeisenform. Sie zeigen dieselben Feldeigenschaften wie die entsprechenden Formen der Dauermagnete. Zur Demonstration ihrer Kraftfelder bedient man sich des gröbsten Eisenfeilichts. Diese sind sehr ausgedehnt und es lassen sich Einzelheiten im weiteren Verlaufe der Kraftlinien verfolgen, welche bei gewöhnlichen Magneten nicht sichtbar zu machen sind.

Die Tragkraft namentlich von Hufeisenelektromagneten ist eine sehr grosse. An ihnen haftet der Eisenanker auch nach Öffnung des Stromes, was auf die Erscheinung des „remanenten Magnetismus" zurückzuführen ist.

Diese Remanenz in Kernen der Elektromagnete spielt bei der Dynamomaschine eine grosse Rolle, wie wir später sehen werden. Wir bezeichnen die Pole eines weiterhin wiederholt zu benutzenden grossen Elektromagneten durch rote und blaue übergezogene Papiermanschetten.

Versuch 63. Ein Wismut- und ein gleich grosses Eisenstäbchen wird je an einem dünnen Coconfaden in der Mitte so aufgehängt, dass es horizontal schwebt. Bringt man das erstere zwischen die Pole eines kräftigen Elektromagneten, so stellt es sich infolge seiner diamagnetischen Eigenschaften quer zu den Kraftlinien: äquatoriale Lage § 105.

Dass das paramagnetische Eisenstäbchen sich in die Richtung der Kraftlinien polar stellt, konnten wir schon bei viel schwächeren Magnetkräften nachweisen.

Die grosse Anwendbarkeit des Elektromagneten beruht aber weniger auf seiner Stärke, als vielmehr auf der Möglichkeit, ihm schnell und einfach wieder seinen Magnetismus zu nehmen; namentlich ist es von Wichtigkeit, dass dieses von einem weit entfernten Punkte aus geschehen kann. Wir brauchen nur den den Magneten speisenden Strom zu unterbrechen. Dies kann durch den Elektromagneten selbst veranlasst werden, so bei den automatischen Stromunterbrechern, (Wagnerscher Hammer), Stimmgabelerregern und bei den elektrischen Läutewerken. Der von dem Elektromagneten angezogene Anker aus weichem Eisen ist an einer Feder befestigt, welche sich auf der dem Elektromagneten entgegengesetzten Seite an einen Stift (Platinstift) lehnt. Durch diesen und das festgelegte Ende der Feder wird der Strom geschickt, der dann um den Eisenkern des Magneten in einer Spirale geführt ist. Beim Stromschluss sendet der Eisenkern Kraftlinien aus, die in den Anker einlaufen. Dadurch wird dieser herangezogen und die Feder von dem Stift losgebogen: Der Strom wird unterbrochen, der Elektromagnet verliert seinen Magnetismus und der Anker federt zurück. Bei der Anlehnung der Feder an den Stift wird der Strom wieder geschlossen, das Spiel beginnt von neuem und geht so ohne äusseres Zuthun selbstthätig weiter.

Bei der Telegraphie wird durch einen Taster an der einen Station ein Strom geschlossen; dadurch wandern Stromkraftlinien mit ihrer Energie an dem Drahte der Telegraphenlinie hin, werden in dem in die Leitung eingeschalteten Elektromagneten der anderen Station zusammengeschnürt und ziehen hier den Anker an, der, mit einem Hebelwerk verbunden, entweder Zeichen (Striche bei langandauerndem, Punkte bei kurzem Stromschluss) auf einem vorbeigeführten Papierstreifen aufzeichnet (Morse's Schreibtelegraph) oder aus einem rotierenden Typenrade einen bestimmten Buchstaben hervorhebt (Hughes Typendrucktelegraph).

Bei den elektrischen Uhren oder Chronoskopen wird von der bei jeder Schwingung einmal durch einen Quecksilbertropfen hindurchgehenden Spitze eines Pendels einer Normaluhr ein Strom geschlossen und dadurch eine Reihe von Elektromagneten, welche in die Leitung eingeschaltet sind, magnetisiert; der von ihnen angezogene Anker schiebt ein Zeigerwerk um einen Zahn weiter, wodurch von einer Centralstation (Sternwarte) aus die Zeit auf eine grosse Reihe von Sekundärstationen mit Sicherheit übertragen wird.

11. Kapitel.

Bewegungsantriebe von Magnetfeldern auf Stromträger. („Linke-Handregel".)

Wir hatten im 9. Kapitel Wechselwirkungen von Magneten und Stromträgern besprochen, bei denen die letzteren festliegend und die Magnete beweglich waren. Aus der gegenseitigen Beeinflussung geht aber eine neue Gruppe von Erscheinungen hervor, wenn wir innerhalb feststehender Magnetfelder kürzere oder längere Teile eines Stromträgers beweglich machen. Dass die Bewegungsantriebe, welche diese unter der Wirkung von Magneten erfahren, auch hier in vielen Fällen zu Rotationen führen, kann bei der konachsialen Anordnung des einen der beiden aufeinander wirkenden Felder nicht überraschen.

187. Bewegliches Gleitstück im homogenen Magnetfelde. — Um die bewegende Kraft, welche ein Strom in einem Magnetfelde erfährt, nachzuweisen, muss man einen Teil des Stromträgers derart beweglich machen, dass er diesem Antriebe frei folgen kann und sich dadurch doch nicht aus dem Verbande mit den übrigen feststehenden Leiterteilen löst. Fast alle dazu verwendeten Anordnungen führen ein sogenanntes „Gleitstück" in den Leiterkreis ein, d. h. sie lassen ein Stück des Leiters auf parallelen Schienen oder in Quecksilberrinnen gleiten, welche auf der einen Seite mit den Stromzuleitungen verbunden sind. Die überragenden, blind endenden Stücke der „Gleitbahnen" haben keine eigenen Kraftlinien, weil sich der Strom durch das Gleitstück ausgleicht.

Eine solche Gleitanordnung, welche geeignet ist, die Erscheinung auch einem grösseren Auditorium vorzuführen, zeigt Fig. 79. Auf einem 45 cm langen, 20 cm breiten, mit Rand, Füssen und verschliessbarer Öffnung (zum Ablassen etwa verschütteten Quecksilbers) versehenen Grundbrette AA sind zwei vertikale Holzsäulen BB befestigt, welche oben das Brett CC tragen. An zwei Fäden f_1 und f_2 hängt ein zweimal rechtwinklig umgebogener Kupferdrahtbügel m, der durch ein Messingstück beschwert ist; er bildet das Gleitstück. An die nach unten gebogenen Schenkel von m sind schmale Schaufeln aus Platinblech angelötet (in der Figur

zu geraden Strichen verkürzt erscheinend und nicht besonders hervorgehoben). Mit diesen Schaufeln tauchen die Bügelenden in Quecksilberrinnen, welche in die in der Figur von vorn nach hinten verlaufenden Holzleisten H_1 und H_2 eingeschnitten sind. Diese Leisten tragen unten etwas hervorragende Stifte, mit denen sie auf dem Grundbrette an den geeigneten Stellen festgesteckt werden können. Von ihnen führen dicke, aber leicht bewegliche metallische Verbindungen (Leiterschnüre) deutlich sichtbar, also oberhalb, nicht unterhalb des Brettes AA nach den Klemmen K_1 und K_2. Zwischen den Holzleisten steht der Eisenklotz E, der zum Sammeln von Magnetkraftlinien dient.

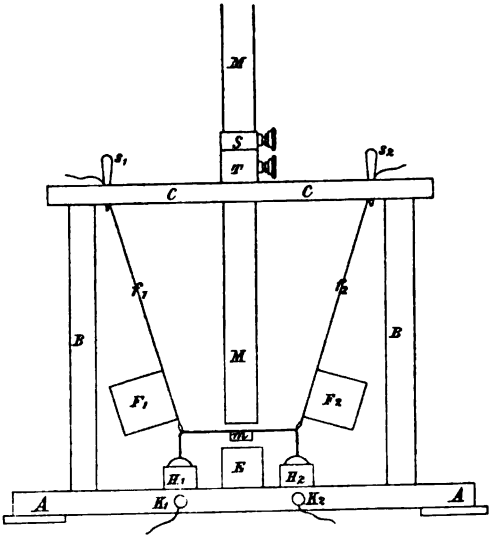


Fig. 79.

Die Fäden f_1 und f_2 werden in dem Brette CC durch die Holzpflöcke s_1 und s_2 gehalten. Die Papierfahnen F_1 und F_2 an den Fäden machen selbst kleine Bewegungen des Drahtbügels m nach vorn und rückwärts weithin sichtbar, namentlich wenn die Schmalseite des Apparates dem Auditorium zugekehrt ist. Um Bewegungen des Gleitstückes herbeizuführen, wird von oben her der kräftige Stabmagnet MM genähert. Derselbe kann in der auf dem Brette CC befestigten Messinghülse T festgeklemmt werden. Schliesst man den Strom, so wird der Bügel m nach der einen oder anderen Seite aus dem Magnetfelde zwischen M und E hinausgedrängt, öffnet man ihn, so kehrt m wieder in die Ruhelage zurück. Will man bei schon vorhandenem Stromfelde den Magneten MM nähern und entfernen, so klemmt man auf ihm die Messinghülse S fest, löst die Verbindung mit der Hülse T und kann nun MM rasch von oben her dem Bügel m nähern, ohne befürchten zu müssen, auf diesen selbst zu stossen.

Bei Annäherung eines Magnetpoles an ein stromdurchflossenes Gleitstück, oder bei Erregung eines Stromes in einem beweglichen Leiterteile, welcher in einem ruhenden Magnetfelde liegt, ergeben sich immer Bewegungsantriebe des Stromträgers senkrecht zur Kraftlinienrichtung des Magnetfeldes und seiner Achse; bei der Anordnung Fig. 79 demnach Bewegungen des Bügels m nach vor- oder rückwärts. Dabei sind acht Einzelversuche möglich: 1) Magnet fest, a) Nordpol unten: α) Strom im einen, β) im anderen Sinne gerichtet (Ausbildung eines Stromfeldes inmitten eines feststehenden Magnetfeldes). b) Südpol unten: die Ausschlagrichtung bei α und β ist umgekehrt. 2) Der Strom ist erregt, der Magnet wird von oben her genähert a) mit dem Nordpol, b) mit dem Südpol; beim Umkehren der Stromrichtung: α

und β ergeben sich entsprechende Wechsel der Bewegungsrichtung (Heranführen eines Magnetfeldes an ein gegebenes Stromfeld, welches vor demselben ausweicht).

Die Bewegung eines Gleitstückes in einem Magnetfelde zeigt also eine Doppelsymmetrie; die Bewegungsrichtung kehrt sich um, sowohl wenn der Strom, als auch wenn der Kraftliniensinn des Magnetfeldes sich umkehrt, sie muss also durch beide, Stromsinn und Kraftliniensinn, bestimmt sein.

Die auftretenden Bewegungen des Stromträgers wollen wir durch blau angestrichene Pfeile bezeichnen, wie wir schon früher die des Trägers selbst durch rote und die Kraftlinienrichtung durch weisse Pfeile bezeichnet hatten.

Versuch 64. Weniger vollkommen, aber immerhin deutlich kann man die Bewegungen von Stromteilen in einem Magnetfelde auch ohne Gleitstück demonstrieren, wenn man ein stromdurchflossenes Goldband (Tressenschnüre, welche man auf kurze Zeit mit 20 Ampère und mehr belasten kann) oder biegsame Leitungsschnüre zwischen den Polen eines kräftigen Hufeisenmagnetmagazins oder eines Elektromagneten frei herabhängen lässt. Beim Commutieren des Stromes schnellt das Band kräftig nach der einen oder anderen Seite aus dem Magnetfelde heraus.

188. Die Linke-Handregel. — Alle Erscheinungen, bei denen bewegliche Leiterteile in einem festgehaltenen Magnetfelde Bewegungsantriebe erfahren, lassen sich auf eine einfache Regel zurückführen, so kompliziert diese Bewegungsverhältnisse auch in einzelnen Fällen erscheinen mögen. Mit Hilfe der rechtwinklig zu einander ausgestreckten drei ersten Fingern unserer Hand können wir uns ein Bild der im vorigen Paragraphen konstatierten Doppelsymmetrie machen. Drehen wir die Hand um den ausgestreckten Mittelfinger, so kehrt sich die Daumenrichtung um, etwa aus vorwärts in rückwärts. Dasselbe geschieht, wenn wir die Hand um den ausgestreckten Zeigefinger drehen.

Stellt man die Grundversuche des vorigen Paragraphen in jeder Kombination der Kraftlinienrichtung des Stromes und des Magnetfeldes an, so ergiebt sich immer wieder, dass die drei zu einander senkrecht stehenden Richtungen: des Stromes, der Magnetkraftlinien und der hervorgerufenen Bewegung in derselben Weise miteinander verknüpft sind. Wir waren übereingekommen, durch den Zeigefinger die Richtung der magnetischen Kraftlinien vom N-Pol zum S-Pol zu bezeichnen. Durch den Mittelfinger wollten wir die Stromrichtung angeben. Wir halten also diesen Finger in dem positiven Sinne an die Kraftachse des Stromfeldes. Dann finden wir, dass die erzeugte Bewegung des Stromes quer zu den Magnetkraftlinien immer übereinstimmt mit der Richtung des ausgespreizten Daumens, wenn wir die Finger der linken Hand wählen.

Wir gelangen zu der sogenannten „FLEMING'schen Dreifingerregel", welche lautet:

Halten wir den Zeigefinger der linken Hand in die Richtung der Kraftlinien eines festliegenden Magnetfeldes, den Mittelfinger in die des Stromes, so wird dieser in der Richtung des Daumens derselben Hand quer zur Kraftlinienrichtung vorwärts bewegt. („Linke-Handregel.")

Es empfiehlt sich, diese Regel bei allen acht Kombinationen, welche oben genannt wurden, zu verifizieren. Die drei rechtwinklig zu einander ausgestreckten Finger der linken Hand bilden dabei ein links- oder hopfenwendiges Koordinatensystem. Beim Unterricht versieht man zweckmässig die Finger mit weissen, roten und blauen Papierhülsen dem Kraftliniensinne, der Strom- und der Bewegungsrichtung entsprechend. Dann tritt der Gegensatz dieser Regel zu der bei der Induktion einzuführenden „Rechten-Handregel" augenfällig hervor.

Die „Daumen- und Schwimmregel" § 160, bei denen der Strom als unbeweglich und der Träger des Magnetkraftliniensystems als beweglich vorausgesetzt wird, sind in unserer Regel mit enthalten. Da jeder Wirkung eine Gegenwirkung entspricht, so muss bei festgehaltenem Stromträger das vom Nordpole ausgehende Kraftlinienbündel des Magneten im umgekehrten Sinne, also der Daumenrichtung entgegen, aus dem Stromfelde herausgedrängt werden; diese stimmt aber mit der Daumenrichtung der rechten Hand überein, wenn die Handfläche dem Quellpunkte der Kraftlinien, also dem *N*-Pole zugekehrt ist; hiervon überzeugt man sich leicht durch Anlegen der rechten Hand an den Mittelfinger der linken Hand in dem in § 160 angegebenen, der Stromrichtung entsprechenden Sinne.

189. Mechanische Interpretation der elektroponderomotorischen Bewegungsantriebe. — Wir haben im 2. Kapitel die ponderomotorischen Wirkungen zweier Magnete nicht auf Anziehungen und Abstossungen ihrer Pole zurückgeführt, sondern dieselben durch die Druck- und Zugwirkungen im Zwischenmittel, d. h. in den gemeinsamen Kraftfeldern erklärt. Jetzt soll gezeigt werden, dass auch die Bewegungsantriebe, welche Ströme und Magnete aufeinander ausüben, sich aus der Struktur des gemeinsamen Feldes ergeben, ohne dass man nötig hätte, neue Erklärungsprinzipe heranzuziehen.

Bringen wir einen geradlinigen Stromträger in ein Magnetfeld, welches wir der Einfachheit halber als homogen voraussetzen, so verlaufen die Kraftlinien beider Systeme auf der einen Seite des Stromes nach derselben, auf der anderen nach entgegengesetzter Richtung, wenn nicht gerade der Strom den Kraftlinien parallel verläuft. Nach § 123 verstärken sich dann die Kraftlinienwirkungen auf der einen Seite des Stromes, auf der gegenüberliegenden schwächen sie sich; der

Stromleiter muss einen Bewegungsantrieb in dem als feststehend gedachten Magnetfelde erfahren. Dass dieser mit seinem Sinne der linken Handregel entspricht, erkennt man, wenn man sich den Richtungssinn der Stromkraftlinien vergegenwärtigt.

Sehr anschaulich lässt sich der vorliegende Fall der Übereinanderlagerung zweier Felder an dem Modelle Fig. 80 verfolgen: Die beiden einander parallelen Fortsätze eines Holzgestelles sind mit N (rot) und S (blau) bezeichnet und repräsentieren etwa die Pole eines Hufeisenmagneten. Zwischen ihnen sind, auf Holzpflöcke gesteckt, Gummischläuche mit aufgezeichneten Pfeilen wie in Fig. 39 ausgespannt zur Bezeichnung der Kraftlinien hh des homogenen Feldes zwischen N und S. In dieses legen wir das Modell eines Stromkraftliniensystems Fig. 65. T ist der Querschnitt des Trägers, der Strom ist gegen den Beschauer gerichtet, rr sind die konzentrischen Stromkraftlinienringe. Um einen Strom durch T hindurch leiten zu können, muss der Träger T auf Gleitschienen parallel mit sich selbst beweglich sein, welche vor und hinter dem Magnetsystem parallel mit den Schenkeln N und S vertikal aufgestellt sind. Die Kraftlinienringe sind in der Figur bei der angegebenen Stromrichtung in einem dem Uhrzeiger entgegengesetzten Sinne gerichtet, die Drehbewegungen quellen also aus dem Inneren hervor und gehen für den Beschauer nach aussen, wie es die kleinen eingezeichneten Pfeile andeuten.

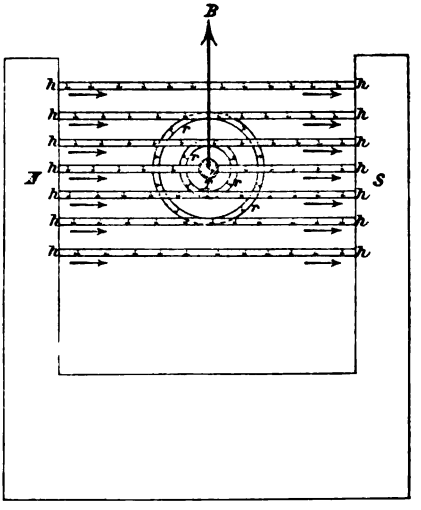


Fig. 80.

Oberhalb des Trägers T Fig. 80 begegnen sich in jedem Raumelemente die Kraftlinien in entgegengesetzter Richtung, so dass sich ihre Wirkungen gegenseitig schwächen, die gesamte Feldenergie und damit die Kraftlinienquerdrucke herabgesetzt werden; unterhalb verstärken sich die Wirkungen, denn die Kraftlinien beider Systeme laufen hier gleichsinnig durch das gemeinsame Feld. Von unten wirkt also ein Überdruck vom Felde her gegen den Träger T, welcher von oben nicht kompensiert wird. T wird demnach im Felde NS nach oben im Sinne des Pfeiles B gedrängt. Die mehr seitlich liegenden Kraftlinienteile unterstützen diese Wirkung, da in die unteren Teile der Stromkraftlinien immer grössere Komponenten der resultierenden Drehbewegungen fallen, als in die entsprechend liegenden oberen.

Legen wir den Zeigefinger der linken Hand an die Kraftlinien hh in der Pfeilrichtung ($N \rightarrow S$) und strecken den Mittelfinger parallel der durch die Bildebene von rückwärts nach vorn tretenden Stromrichtung

uns entgegen, so weist der Daumen nach oben, in die Bewegungsrichtung B: Linke-Handregel.

Hierbei ist die besondere Form des Bewegungsmechanismus, den wir in das Feld verlegen, weniger von Bedeutung, als der durch ihn dargestellte Energieinhalt der einzelnen Teile des Feldes. Denn wir sahen in § 170, dass es eine gewisse Menge dieser Feldenergie ist, welche bei der Erzeugung solcher ponderomotorischen Bewegungen aufgewendet werden muss, da bei ihnen die von der Strombahn umschlossene Kraftlinienzahl sich ändert, vgl. auch weiter unten § 194.

190. Elektromagnetische Rotationen. — Beschränken wir die Bewegungsfreiheit des Stromträgers insoweit, dass ein Punkt desselben seine Lage im Raume beibehalten muss, und ordnen wir das bewegliche Stromstück und das Magnetfeld symmetrisch um diesen Punkt herum an, so geht aus der Wechselwirkung von Strom und Magneten eine kontinuierliche Rotation hervor.

Aus der Fülle von Apparaten, welche man konstruiert hat, um diese Rotationen beweglicher Stromträgerteile in einem Magnetfelde zu demonstrieren, greifen wir nur wenige typische Beispiele heraus, welche teils durch ihre historische Bedeutung, teils wegen ihrer praktischen Verwertbarkeit wichtig sind.

a) Faradays Rotationsapparat. Dieser älteste und einfachste Apparat bewährt sich noch immer schon bei mässigen Stromstärken am besten. Ein in einer Öse beweglicher Leiterteil hängt in dem Felde eines Stabmagneten, dessen Achse durch den Aufhängepunkt geht; das untere Ende taucht in Quecksilber; beim Stromschluss rotiert dann der Stromträger um den Magneten.

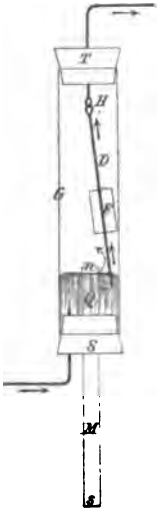


Fig. 81.

Ein gewöhnlicher Lampencylinder G, Fig. 81, von 24 cm Länge und 4,5 cm lichter Weite ist unten und oben mit Korkstopfen S und T geschlossen. In der Mitte des unteren Korkes ist der Magnetstab M so befestigt, dass das eine seiner Polenden n noch etwa 3 cm weit in das Innere des Glascylinders G hineinragt. Ausserdem nimmt der untere Kork den Zuleitungsdraht auf. Durch T ist ebenfalls ein Kupferdraht geführt, welcher in dem amalgamierten Haken H endet. In diesem hängt das geradlinige Drahtstück D, an dem eine Papierfahne befestigt ist. In den unteren Teil des Cylinders wird so viel Quecksilber gefüllt, dass das untere amalgamierte Ende des Drahtes D gerade eintaucht. Der Magnetstab M wird in vertikaler Stellung an einem Stative befestigt.

Wird durch das bewegliche Drahtstück D, Fig. 81, ein Strom von unten nach oben geschickt, und befindet sich der Nordpol n des Magneten M oben, so wird der Draht D nach der Linken-Handregel bei der gezeichneten Stellung

zunächst nach rückwärts gestossen und gerät bei dauernder Wirkung der beiden Felder aufeinander in Rotation in dem durch den gestrichelten Pfeil bezeichneten Sinne, d h. dem des Uhrzeigers entgegengesetzten, wenn man auf das Polende *n* des Stabes blickt.

b) Rotierender Drahtbügel. Man erhält eine mehr symmetrische Anordnung, wenn man den Strom verzweigt und seine beiden Hälften in den Schenkeln eines Bügels zu beiden Seiten eines Stabmagneten herunterleitet.

Auf den Pol *n*, Fig. 82, eines kräftigen Stabmagneten oder Elektromagneten setzt man die hölzerne, cylindrische Kappe *H*, welche unten eine ringsum laufende horizontale Rinne *RR* trägt, in welche Quecksilber gefüllt wird. Der Draht *Z* vermittelt die leitende Verbindung nach aussen. Oben trägt die Kappe genau in der Achse die Spitze *s*, auf welche der mit einem Doppelnäpfchen *N* versehene Drahtbügel *BB* gesetzt wird; die vertikal nach unten gehenden, am Ende amalgamierten Schenkel dieses Bügels tauchen beiderseitig in das Quecksilber der Rinne *RR* ein. Um diesem Drahtbügel den Strom zuzuführen, füllt man in das nach oben gekehrte Näpfchen *N* etwas Quecksilber und taucht hier die amalgamierte Spitze eines dicken Kupferdrahtes *D* ein, der durch ein besonderes Stativ festgehalten wird.

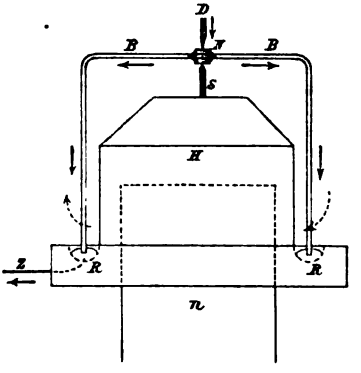


Fig. 82.

Der bei *N*, Fig. 82, zugeleitete Strom teilt sich und fliesst in beiden Schenkeln des Bügels *BB* hinunter in die mit Quecksilber gefüllte Rinne *RR*, aus welcher er durch den Draht *Z* weiter geführt wird. Ragt der Nordpol *n* des Magneten in das Stromfeld hinein, so wird der rechte Schenkel nach vorn, der linke nach rückwärts getrieben und der auf der Spitze *s* bewegliche bügelartige Stromträger rotiert im Sinne der gestrichelten Pfeile, also im Uhrzeigersinne für ein von oben auf den Magneten blickendes Auge, hopfenwendig beim Emporblicken in der Kraftlinienrichtung des Magneten.

191. Magnetelektrischer Motor. — Die im Felde feststehender Magnete eintretenden Rotationen von beweglichen Stromträgern können wir bei Maschinen verwenden, welche auf Kosten magnetischer Feldenergie entgegenstehende Reibungswiderstände überwinden, sich in dauernden Umdrehungen erhalten und mechanische Arbeiten zu leisten im stande sind. Das ist das Prinzip der magnetelektrischen Motoren, der „Elektromotoren". Überall bedarf die Technik zunächst rotierender Bewegungen, die durch Übertragung in fortschreitende, hin- und hergehende oder andere umgesetzt werden können.

Die Dampfmaschine giebt primär nur hin- und hergehende Bewegungen, welche erst durch Zwischenmechanismen, Pleuelstange und Kurbel in kontinuierliche Drehbewegungen umgesetzt werden können. Hierin ist der Elektromotor der Dampfmaschine prinzipiell überlegen, da er unmittelbar die gewünschten rotatorischen Bewegungen liefert.

Fig. 83 stellt eine derartige Anordnung dar, welche als Modell einer magnetelektrischen Arbeitsmaschine dienen kann. Zwischen die beiden gleich starken entgegengesetzten Pole N und S zweier Magnete oder eines mit geeigneten Polschuhen versehenen Hufeisen- oder Elektromagneten ist der Drahtbügel BB auf einem in einer Spitze auslaufenden vertikalen Träger T drehbar aufgehängt. Der obere horizontale Teil des Bügels ist in der Mitte etwas breit geschlagen und sitzt mit einem Körnerpunkte auf T auf. Die unteren Enden EE des Bügels sind in dem isolierenden Elfenbeinklotze D aneinander vorbeigeführt, ohne dass sie sich berühren. Der Klotz D dreht sich frei um den Träger T, der in einer Holzplatte H befestigt ist. In diese sind zwei halbkreisförmige Rinnen Q_1 und Q_2 eingeschnitten, in welche die Drähte z_1 und z_2 von aussen her einmünden. Wird in die Rinnen Quecksilber gegossen, so entsteht ein horizontaler leitender Ring, der aber an zwei gegenüberliegenden Stellen unterbrochen ist (vergl. die unter der Hauptfigur stehende Nebenfigur, die den hölzernen Fuss H von oben gesehen darstellt. Man bringt den Apparat so zwischen die Pole des Magneten, dass die Trennungslinie der Ringe senkrecht zu den Kraftlinien steht.

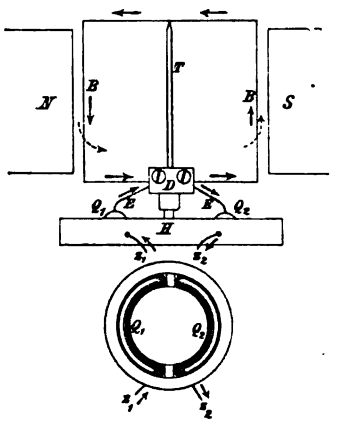


Fig. 83.

Sind die Rinnen hinreichend mit Quecksilber gefüllt, so ragt das flüssige Metall so weit über die Oberfläche von H hervor, dass die über dieselbe hingleitenden amalgamierten Enden EE des Drahtbügels eintauchen, ohne dass das Quecksilber über den beide Rinnen trennenden Holzstegen zusammenfliesst.

Wird bei der in Fig. 83 dargestellten Anordnung bei z_1 ein Strom in die horizontale halbkreisförmige Quecksilberrinne Q_1 geschickt, so geht er in das eintauchende Ende E des Bügels B hinein, in dessen rechter Seite in die Höhe, durch das horizontale obere Verbindungsstück hindurch, auf der linken Seite hinunter und durch Q_2 bei z_2 wieder hinaus. In dem von N nach S gehenden Kraftliniensysteme ergiebt sich ein Bewegungsantrieb im Sinne der gestrichelten Pfeile, also in einer der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzten Richtung.

Der Stromträger bewegt sich unter dem Einflusse des festliegenden Magnetfeldes so lange weiter, bis er das Maximum an gleichgerichteten von N herkommenden Kraftlinien in sich aufgenommen hat, d. h. bis seine Ebene senkrecht zur Feldrichtung NS steht. Nach dem Beharrungsprinzip treibt ihn die aufgenommene kinetische Energie noch

etwas über diese Mittellage hinaus. Um aber die Rotation im gleichen Sinne fortsetzen zu können, muss das Stromfeld seine Richtung umkehren. Dies wird automatisch dadurch herbeigeführt, dass das Bügelende E, welches vorher in Q_2 eintauchte, beim Überschreiten der Mittellage nach Q_1 gelangt und umgekehrt; dadurch steigt jetzt der Strom dort hinauf, wo er vorher hinunterging, und das Magnetfeld sucht den ganzen Bügel umzulegen, was einer Fortsetzung der einmal eingeleiteten Rotation im gleichen Sinne entspricht. Beim nächsten Passieren der Mittellage (Indifferenzstelle) findet ein abermaliges selbstthätiges Umstellen der Stromrichtung, Kommutieren, in dem beweglichen Teile der Strombahn statt u. s. f.

Wenn man statt eines einzigen Bügels eine grössere Anzahl derselben kreuzförmig auf derselben Achse übereinander legt, entsteht eine von Stromträgern ganz umhüllte Trommel, an der auf einer Seite Ströme hinauf- und an der anderen Seite hinuntergehen. Eine solche Trommel gerät mit einem geeigneten Kommutator verbunden, in einem Magnetfelde in Rotation, wobei die einzelnen, dicht aufeinander folgenden Windungen sich gegenseitig unterstützen (Trommelanker).

Um möglichst viele Kraftlinien zu sammeln, stellt man die Trommel aus Eisen her, und zwar aus später zu besprechenden Gründen nicht als einen massiven Kern, sondern aus einzelnen, voneinander isolierten aufeinander geschichteten Blättern von dünnem Eisenblech („Blätteranker"). Besondere Vorrichtungen sind noch zu treffen, um die Stromrichtung in den einzelnen Windungen im richtigen Augenblicke umzukehren. Wir besprechen sie erst später bei der Dynamomaschine, der Umkehrung des Elektromotors.

192. Rotation von Radiärströmen. — Überall, wo wir von dem konzentrischen Kraftliniensystem des galvanischen Stromes gesprochen haben, setzten wir voraus, dass die Kraftlinienringe dieses Systems an den materiellen Träger gebunden sind, an dem sie uns entgegentreten, wie die Kraftlinien der gewöhnlichen Magnete an die Stahlmassen, von denen wir diese Linien ausgehen sehen. Diese Annahme wird in besonders instruktiver Weise bestätigt, wenn wir die kontinuierlichen Rotationen betrachten, welche sogenannte Radiärströme hervorbringen, wenn sie in feststehenden Magnetfeldern verlaufen.

Versuch 65. Wir führen der Mitte einer um eine horizontale Achse leicht drehbaren, am Rande amalgamierten Kupferkreisscheibe durch die Achse einen starken Strom zu, den wir dadurch wieder abnehmen, dass wir den Rand der Scheibe in die Oberfläche eines in einer untergesetzten Rinne enthaltenen Quecksilbertropfens ein-

tauchen lassen, von dem der Strom dann weitergeführt wird. Derselbe folgt hauptsächlich dem nach dem Quecksilbertropfen gerichteten Radius und umgiebt die auf ihm gelegenen Teile der Scheibe mit dem konzentrischen Kraftliniensystem. Lassen wir die Kraftlinien eines kräftigen Hufeisenmagneten quer durch den unteren Teil der Scheibe hindurchgehen, so wird sie in Rotation versetzt (Barlowsches Rad). Die stromdurchflossenen Scheibenteile werden nach der linken Handregel aus dem Magnetfelde herausgedrängt. Sie hören dabei auf, Stromträger zu sein, da jetzt nachfolgende Teile des Scheibenrandes in das Quecksilber eintauchen. Die ablenkende Wirkung äussert sich an den neuen, wiederum radiär angeordneten Leiterteilen, drängt diese heraus u. s. f., so dass eine kontinuierliche Umdrehung der Scheibe erfolgt.

Versuch 66. Noch auffallender tritt diese Wirkung hervor, wenn wir auf den Pol eines kräftigen (Elektro-)Magneten eine flache, mit Quecksilber gefüllte Schale setzen, welche an ihrem inneren Rande mit einem ringförmig geschlossenen Kupferblechstreifen ausgelegt ist. Tauchen wir in der Mitte eine metallische Stromzuleitung ein und führen wir den Strom vom Rande aus weiter, so verbreitet er sich in der Quecksilbermasse von der Mitte aus radiär gleichförmig nach allen Seiten. Da die Magnetkraftlinien von oben nach unten oder umgekehrt durch die ganze bewegliche Masse hindurchgehen, so gerät diese in ihrer Gesamtheit in Rotation, deren Richtung durch die Linke-Handregel bestimmt ist.

In der Mitte ist die Rotation am stärksten, da hier das gesamte konzentrische Kraftliniensystem noch an wenige Träger geknüpft ist, die Mitte senkt sich infolge der Centrifugalkräfte etwas ein. Um die Erscheinung weithin sichtbar zu machen, lässt man auf dem Quecksilber flache Korke schwimmen, welche Lichtchen tragen.

Man wird diese wie die vorhergehenden Versuche immer unter Einschaltung von Kommutatoren bei verschiedenem Richtungssinn des Stromes und des Magnetfeldes vorführen, da sie willkommene Gegenheit bieten, die linke Handregel in den verschiedensten Fällen zu üben.

193. Bewegungen eines biegsamen Leiters im Felde eines Stabmagneten. — Eigenartig gestalten sich die elektromagnetischen Wechselwirkungen, wenn wir den Stromträger biegsam machen und ihn parallel zur Achse eines feststehenden Stabmagneten neben diesem frei herabhängen lassen. Eine hierzu dienende Anordnung rührt von Helmholtz her.

Auf einem quadratischen Grundbrette *B*, Fig. 84, ist der vertikale hölzerne Halter *H* befestigt, welcher an einer Messingzwinge den Magnetstab *M* mit kräftigen Polen *n* und *s* trägt. An *H* ist ferner der oben umgebogene dicke Kupferdraht *D* befestigt, welcher über der Mitte des vertikalen Magnetstabes *M* in nicht

zu kleiner Entfernung von n in einem vertikal nach unten gebogenen Stücke endet. Hier ist er durch einen schmalen Längsschnitt gespalten, in den ein Goldband $s\,s$ eingeklemmt ist, welches an dem Magneten M herabhängt und reichlich bis zum Grundbrett B hinabreicht. Am unteren Ende wird eine Stromzuführung durch eine Klemmschraube angeschlossen, die andere Zuleitung wird unter Zwischenschaltung eines Kommutators nach dem Drahte D geführt.

Versuch 67. Man hebt das Goldband $s\,s$, Fig. 84, in der Mitte etwas empor, so dass es an dem oberen und unteren Ende von M frei hängt und schliesst den Strom (ca. 10 Ampère): Das Band wickelt sich um den oberen und unteren Teil des Magneten so herum, dass eine fortlaufende Spirale entsteht. Kommutiert man den Strom, so wickelt sich das Band auf und schlingt sich in dem entgegengesetzten Sinne um den Magneten. Namentlich das Ab- und Aufwickeln bei wiederholtem Kommutieren ist sehr deutlich zu verfolgen. Hat man die Polarität des Magnetstabes festgestellt, so giebt auch hier die „Linke-Handregel" den Sinn des Bewegungsantriebes, den jedes Stück des beweglichen Stromleiters erfährt.

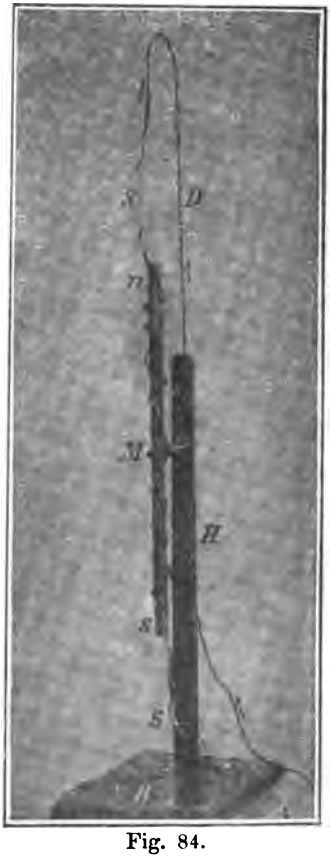


Fig. 84.

So finden wir z. B., dass am oberen Ende des Stabes, wo die von n ausgehenden Kraftlinien auf den Beschauer zukommen, das in der Pfeilrichtung durchflossene Band vor dem Magnetstab M nach links vom Beschauer (Daumenrichtung) getrieben werden muss, wie es die Figur zeigt; am unteren Ende werden die vor dem Stabe liegenden Teile des Stromes nach rechts, die dahinter gelegenen Teile nach links gedrängt.

194. Quantitatives Gesetz der ponderomotorischen Wirkung, welche ein beweglicher Stromträger in einem ruhenden Magnetfelde erfährt. — Wir haben im Vorhergehenden für eine Reihe von Fällen die Wirkungen eines Magnetfeldes auf einen beweglichen Leiter qualitativ verfolgt. Wir sahen, dass die auftretenden Bewegungserscheinungen sämtlich durch die Linke-Handregel ihrem Sinne nach bestimmt sind und hatten auch diese selbst aus dem Symmetriegesetze, welches die in Wechselwirkung tretenden Felder beherrscht, abgeleitet. Es liegt uns nun noch ob, auch die quantitativen Beziehungen, welche hier bestehen, zu formulieren.

Überall, wo quantitative Relationen zwischen messbaren Grössen auftreten, finden dieselben ihren allgemeinsten Ausdruck in dem Energiegesetze. Aus dem Ausdrucke für die elektromagnetische Energie eines Stromfeldes $i \cdot dN$ § 170 können wir leicht mittels des Energieprinzipes die mechanische Kraft P berechnen, mit der die magnetische Wechselwirkung eines Stromfeldes und eines Magnetfeldes den Träger des ersteren im letzteren zu bewegen strebt.

Denken wir uns z. B. in Fig. 80 die Gleitschienen des Trägerstückes T nach oben verlaufend und sich dort zu einem geschlossenen Stromkreise vereinigend, so treten bei der Bewegung von T im Sinne des Pfeiles B immer Magnetkraftlinien des Feldes NS, welche sich vorher noch innerhalb des Stromkreises befanden, aus diesem heraus, die Zahl von Kraftlinien N, welche durch ihn hindurchgeht, vermindert sich. Halten wir daher auch die Stromstärke i konstant, so verschwindet doch elektromagnetische Energie und zwar der Betrag $i \cdot dN$ für eine Bewegung von T, bei welcher dN Kraftlinien des festen Systems NS austreten, also von dem Träger T geschnitten werden. Dies finde statt bei einer Vorwärtsbewegung von T um die kleine Strecke ds. An Stelle der Energie $i \cdot dN$ muss eine andere auftreten, welche nach dem Energieprinzipe derselben numerisch gleich ist. Ist die am Träger T angreifende mechanische, in Dynen zu messende Kraft P, so leistet diese bei der genannten Bewegung die Arbeit $P \cdot ds$. Finden sonst keine Energieverluste statt, so muss diese gewonnene Arbeit gleich der dafür hingegebenen elektromagnetischen Energie sein oder es muss

$$P \cdot ds = i \cdot dN \quad \ldots \ldots \ldots \quad 34\,a)$$

sein, oder

$$P = i \frac{dN}{ds} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 34\,b)$$

In dem durch die Fig. 80 dargestellten Falle eines homogenen Feldes und eines geradlinigen, zu den Kraftlinien senkrecht verlaufenden Trägers und einer zu beiden rechtwinkligen Bewegung lässt sich dN sehr leicht angeben. Ist $\mathfrak{H}$ die Feldstärke, l die Länge des Trägers T (von der Gleitschiene auf der einen bis zu der auf der anderen Seite gemessen), so ist die bei der Bewegung um ds cm vom Leiter T überstrichene Fläche gleich $l \cdot ds$ cm^2; durch dieselbe gehen $\mathfrak{H}\, l \cdot ds$ Kraftlinien des Feldes hindurch. Diese $\mathfrak{H}\, l \cdot ds$ Linien werden bei der Bewegung von T geschnitten und treten aus dem Inneren des Stromkreises bei der Bewegung im Sinne B aus; es ist also $dN = \mathfrak{H}\, l \cdot ds$ und

$$P = i\, \mathfrak{H}\, l \quad \ldots \ldots \ldots \quad 35)$$

Die ponderomotorische Kraft, mit welcher ein geradliniges Stück einer Strombahn von der Länge l in einem homogenen Felde von der Intensität $\mathfrak{H}$ bei einer Stromstärke von i Dekaampère ergriffen wird, ist dem Produkte der drei genannten Grössen gleich, wenn das Leiterstück senkrecht zu den Kraftlinien des Feldes verläuft.

Dieser Satz ist für die Konstruktion der elektromagnetischen Arbeitsmaschinen, der Elektromotoren, von der grössten Wichtigkeit, da durch ihn die Leistung dieser Maschinen bestimmt ist.

Stehen die drei genannten Richtungen nicht senkrecht zu einander, so treten Projektionen, also Winkelbeziehungen in die Formel ein. Bildet die Bewegungsrichtung ds mit der Kraftlinienrichtung den Winkel ϑ, so ändert sich die umschlossene Kraftlinienzahl bei einer Bewegung des Gleitstückes von ds cm um

$$dN = \mathfrak{H}\, l \cdot ds \sin\vartheta.$$

Ist ausserdem das geradlinige Leiterstück um den Winkel ε gegen die Kraftlinien geneigt, so tritt an Stelle von l das Produkt $l \sin\varepsilon$, so dass der allgemeine Ausdruck für die mechanische Arbeit, welche von den Spannungen im elektromagnetischen Felde an einem Leiter verrichtet wird, gleich

$$i\,\mathfrak{H}\, l \cdot ds \sin\vartheta \sin\varepsilon$$

und dementsprechend die Kraft

$$P = i\,\mathfrak{H}\, l \sin\vartheta \sin\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 35\,a)$$

ist.

12. Kapitel.

Mehrachsige Magnetkraftfelder (Elektrodynamik).

Wir haben bisher nur das Feld eines einzelnen galvanischen Stromes betrachtet, sowie seine Vereinigung mit den Feldern eines oder mehrerer Magnete. Letztere gab zu der grossen Gruppe von Erscheinungen Veranlassung, die man unter dem Namen „Elektromagnetismus“ zusammenfasst. Wir wollen nun die Felder betrachten, welche dadurch entstehen, dass gleichzeitig zwei oder mehrere Ströme vorhanden sind. Jeder derselben bildet die Achse eines ihm eigentümlichen Magnetkraftliniensystems. Der Bau des Kraftfeldes wird darum von mehreren gleichzeitig sich geltend machenden Achsenrichtungen beherrscht; wir sprechen in diesem Sinne von „mehrachsigen Magnetfeldern“.

Das konzentrische Kraftliniensystem eines Stromes war vollkommen äquivalent mit einem eigentlichen Magnetkraftliniensystem. Darum mussten auch Ströme auf Magnete und diese auf Stromträger eine Wirkung ausüben. Für diese Wirkungen muss es aber auch gleichgültig sein, ob wir die Magnete ihrerseits wieder durch Stromkraftliniensysteme, z. B. in Form von Solenoiden oder Spiralen, ersetzen. Es müssen daher auch Ströme auf Ströme wirken, da Magnete auf Magnete wirken. Dies ist ein Schluss, den schon Ampère 1820, also unmittelbar nach Bekanntwerden der Ørstedschen Entdeckung der Wechselwirkung von Strom und Magneten zog. Nach den damaligen Anschauungen wurde ein Strom durch das Fliessen desjenigen Etwas hervorgebracht, welches durch Reiben von Körpern sich im ruhenden Zustande anzusammeln schien, der sogenannten Elektrizität. Ampère setzte den Wirkungen, welche die geriebenen Körper mit ihren „ruhenden Elektricitäten“ aufeinander ausüben, die der „strömenden Elektricität“ gegenüber und nannte sie „elektrodynamische“, erstere „elektrostatische“ Wirkungen, wie man in der Mechanik die Bewegungserscheinungen in der Dynamik, die die Ruhe sichernden

Gleichgewichtsbedingungen in der Statik behandelt. Daher hat das ganze Gebiet den Namen der „Elektrodynamik“ erhalten.

Bei zu Grundelegung des Kraftlinienbegriffes geht dieses Kapitel ganz naturgemäss aus den vorangehenden hervor; wir ersetzen einfach das seither neben einem achsialen System betrachtete magnetische Kraftliniensystem durch ein zweites, einem anderen Träger konachsiales System.

A) Elektrodynamische Wechselwirkung zweier verschieden gegeneinander orientierter Stromträger.

195. Feld zweier gleichgerichteter Parallelströme. — Wir gehen von dem Kraftlinienbilde aus und schliessen aus ihm unmittelbar, welche Erscheinungen unter gewissen Bedingungen eintreten müssen. Gegeben seien zwei geradlinige, parallel nebeneinander in nicht zu grosser Entfernung verlaufende Stromträger. Jeder sei Kraftachse, d. h. in bestimmtem, und zwar zunächst in gleichem Sinne an Polklemmen angeschlossen.

Man kann denselben Strom verwenden, indem man die entgegengesetzten Enden der beiden geraden Paralleldrähte mit einem metallischen Zwischenstück verbindet, welches in so weitem Bogen herumgeführt wird, dass es den betrachteten Teil des Feldes, namentlich den Zwischenraum zwischen den beiden Parallelträgern, nicht beeinflusst.

Wir stellen die Träger vertikal und untersuchen das Bild in einer zu ihrer Längsrichtung senkrechten, horizontalen Ebene. Die Stromstärken in beiden Trägern seien gleich.

Zu den Versuchen verwenden wir wieder den in § 145 näher beschriebenen Apparat Fig. 47. Wir hängen neben dem ersten Drahte L_1 noch einen gleich beschaffenen Leiter L_2 in die Nachbarrinnen ein, nachdem wir ihn durch eine entsprechende benachbarte Durchbohrung in dem Brette C und dem Karton P hindurchgesteckt haben. Tauchen wir den Draht H_1, der von der + Klemme K_1 kommt, in die linke obere Rinne ein, so steigt der Strom in dem linken Leiter L_1 (vergl. die Nebenfigur) hinunter. In die linke Rinne des unteren Klotzes E_2 führen wir das Ende R des Hilfsdrahtes; sein oberes Ende tauchen wir in die rechte Rinne des oberen Klotzes E_1. Dann steigt von hier der Strom in dem Nachbarleiter L_2 ebenfalls hinunter; in die rechte Rinne von E_2 tauchen wir H_2, welcher den Strom der − Klemme K_2 zuführt. Beim Umlegen eines vorgeschalteten Kommutators steigt derselbe Strom in beiden Drähten in die Höhe.

Dadurch, dass man die Drähte durch andere Bohrungen in dem Brette C hindurchführt, kann man die Kraftlinienbilder bei verschiedenen gegenseitigen Abständen der Träger und derselben Stromstärke hervorrufen.

Sind die beiden Stromträger weit voneinander entfernt, so beeinflussen sich ihre Felder fast gar nicht, Fig. 85; um jeden der Querschnitte SS bilden sich kreisförmige Stromkraftlinien aus, gerade so, als ob der zweite Strom gar nicht vorhanden wäre. Rücken jedoch

die beiden Träger einander näher, so dass die beiden achsialen Felder in die gegenseitige Wirkungssphäre kommen, so wird der Verlauf der Linien ein anderer, Fig. 86.

Jeder der beiden Stromträger S_1 und S_2 hat für sich ein konzentrisches Ringsystem ausgebildet, welches in unmittelbarster Nähe des Leiters auch ungestört zur Geltung kommt, abgesehen von den leeren Stellen ganz im Inneren, in denen der Verkürzungszug längs der Kraftlinien so stark ist, dass die in ihnen liegenden Eisenteilchen nach der Leiteroberfläche hingleiten. Sind die Ströme beide absteigend, so gehen die Kraftlinien beider Systeme im Uhrzeigersinne um S_1 bezw. S_2. Zwischen den Trägern treffen ihre Kraftlinienringe im entgegengesetzten Sinne, in den entfernteren Raumpunkten mehr und mehr gleichgerichtet aufeinander. Nach §§ 88 und 123 heben sich zwischen S_1 und S_2 die Wirkungen beider Systeme mehr oder weniger vollkommen auf, in den äusseren Feldteilen verstärken sie sich dagegen.

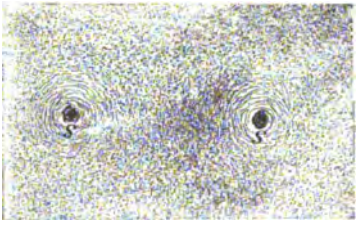


Fig. 85.

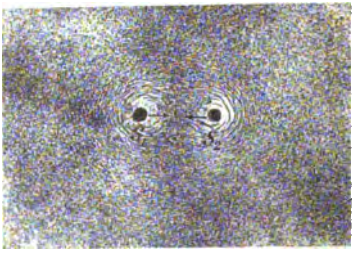


Fig. 86.

Es entstehen lemniscatenartig sich um beide Stromträger schlingende Kurven. Die inneren der resultierenden Linien sind an der Seite von oben und unten her ziemlich stark eingedrückt. Genau in der Mitte zwischen S_1 und S_2 berühren sich die beiden Kurventeile sogar und bilden hier einen Doppelpunkt. Innerhalb derselben sind die Kraftlinien getrennte Ovale, welche sich stark in der Verbindungslinie $S_1 S_2$ gegeneinander verlängern. Erst die ganz innen gelegenen Linien nähern sich immer mehr der Kreisgestalt. Weiter nach aussen verlieren sie ihre Einbiegung immer mehr und bilden schliesslich nur noch verlängerte Ovale oder ellipsenähnliche Formen. In grosser Entfernung sind beide Felder derart miteinander verschmolzen, dass man sie für das Feld eines einzigen Stromes halten könnte, doch ist die Feldstärke doppelt so gross.

196. Elektrodynamische Wirkung der gleich gerichteten Parallelströme (Anziehung). — Die Zugwirkungen längs der magnetischen

Kraftlinien Fig. 86 müssen die beiden Stromträger gegeneinander zu bewegen suchen. Jeder Ring zieht sich wie ein über beide Drähte gespannter Gummifaden zusammen; er drückt dadurch auf die mehr nach Innen liegenden Ringe und diese schliesslich auf die innersten Ovale und Kreisringe. Die letzteren liegen aber den Stromträgern selbst an und vermitteln diesen die im umgebenden Medium vorhandene Spannung, so dass sie gegeneinander gedrängt werden.

„Gleichgerichtete Parallelströme ziehen sich an."

Wir wollen diese Ausdrucksweise der älteren Theorien der Kürze halber beibehalten, wiewohl wir den Sitz der Erscheinung ganz in den Aussenraum der Drähte verlegen und sie auf Spannungen im Felde, auf ein Schieben und Drängen der Kraftlinien zurückführen. Die angestrebten massenbewegenden, „ponderomotorischen" Wirkungen sind in Fig. 86 durch zwei gegeneinander gekehrte Pfeile angedeutet.

Das gemeinsame Feld beider Ströme ist der Sitz elektromagnetischer Energie. Nicht an allen Stellen ist die Intensität derselben, die Feldstärke die gleiche. Kompensieren wir die bestehenden Intensitätsunterschiede durch andere, etwa durch mechanische Kräfte, welche die Stromträger in ihrer Lage festhalten, so geschieht nichts. Heben wir die Kompensationen auf, indem wir die Drähte frei beweglich machen, so tritt das genannte „elektrodynamische" Phänomen ein, die Drähte bewegen sich aufeinander zu, ein Teil der elektromagnetischen Feldenergie wandelt sich in Bewegungsenergie um.

197. Feld zweier entgegengesetzt gerichteter Parallelströme und ihre elektrodynamische Wechselwirkung (Abstossung). — Wir wollen jetzt die beiden geradlinigen in kurzer Entfernung nebeneinander parallel verlaufenden Träger zu Achsen von zwei entgegengesetzt gerichteten gleich starken Stromfeldern machen.

Das Kraftlinienbild erhalten wir wieder am besten an dem Apparate Fig. 47. Wir heben die Enden $R\,R$ des Hilfsdrahtes aus den Quecksilberrinnen heraus und tauchen etwa H_1 in die linke obere Rinne (von vorn gesehen). Dann ist das von K_1 kommende System um den linken Draht herum nach unten gekehrt. Man setzt den Bügel b in die Rinnen des unteren Klotzes E_2 ein; der Strom steigt dann am rechten Nachbardraht empor und wird durch den Draht H_2, den man nach oben hinauf biegt, vom rechten oberen Quecksilbernäpfchen aufgenommen und K_2 zugeführt. Beim Kommutieren bleiben die Richtungen in beiden Trägern einander entgegengesetzt.

Fig. 87 stellt das Kraftlinienbild dar. S_1 und S_2 sind die Querschnitte der beiden Stromträger. Geht in S_1 ein Strom von oben durch die Bildebene hindurch nach unten, so verlaufen seine Kraftlinien uhrzeigermässig. Alsdann fliesst der andere Strom durch S_2 von unten durch die Zeichnungsebene nach oben, seine Kraftlinien laufen für den Beschauer in einem der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzten Sinne. So kommen in der Mitte zwischen S_1 und S_2 Kraftlinien nebeneinander, welche die gleiche Richtung haben. Sie vereinigen sich, ihre

Zug- und Druckwirkungen addieren sich. Wir erhalten dicht gedrängte Kraftröhren, welche einen kräftigen Druck aufeinander ausüben, der so stark ist, dass die Ringe beider Ströme deutlich aus ihrer konzentrischen Stellung nach aussen verschoben werden: Zwischen S_1 und S_2 sind die Abstände kleiner, ausserhalb der Verbindungsstrecke grösser, als wenn jedes Kraftliniensystem ungestört für sich existieren würde (vergl. Fig. 48). Dieser Querdruck treibt die beiden Stromträger auseinander, wie die beiden nach links und rechts gehenden, in das Kraftlinienbild eingezeichneten Pfeile andeuten. Sind die Stromträger beweglich, so kommt diese Feldspannung als ponderomotorische Wirkung zum Ausdruck: „Die Stromträger stossen sich ab.“ Wir haben hier die, von der in § 196 besprochenen Wirkung polar verschiedene, elektrodynamische „Abstossung“.

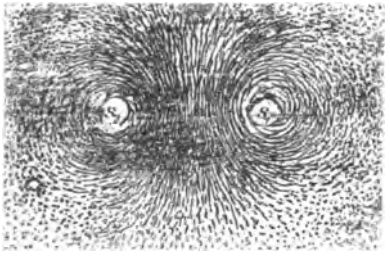


Fig. 87.

Man stellt die in § 195 und 197 besprochenen Kraftfeldschnitte wieder her, nachdem man den Strom kommutiert hat und überzeugt sich davon, dass die Richtung der Parallelströme im Raume keinen Einfluss hat, sondern dass lediglich die Gleichsinnigkeit oder der entgegengesetzte Sinn der Achsenrichtung auf die Ausgestaltung des resultierenden zweiachsigen Feldes von Bedeutung ist.

198. Elektrodynamische Grundversuche. — Die aus dem Kraftlinienverlaufe sich ergebenden ponderomotorischen Wirkungen werden sehr leicht an einer grossen Reihe von Anordnungen, von denen wir einige typische beschreiben, demonstriert.

a) Ampèresches Stativ. Ampère setzte Drahtrechtecke auf Spitzen, welche in kleine, mit Quecksilber gefüllte Näpfchen tauchten. Leitet man diesen den Strom zu, und nähert man einen zweiten, etwa in einer biegsamen Leitungsschnur fliessenden, möglichst gleich starken Strom, so findet Anziehung bei gleicher Stromrichtung, bei Umkehr des einen oder anderen Stromes Abstossung statt.

Um sich von den bei diesen Versuchen leicht störenden Einwirkungen des Erdmagnetismus frei zu machen, verwendet man zweckmässig ein Doppelrechteck, d. h. einen Leitungsdraht, welcher in Form von zwei nebeneinander liegenden Rechtecken gebogen ist, die beide in entgegengesetztem Sinne vom Strom umflossen werden; das eine entsendet dann ein Kraftlinienbündel, welches dem gleich starken des Nachbarrechteckes gerade entgegengesetzt gerichtet ist. Die erdmagnetische Wirkung auf das eine wird durch die auf das andere gerade aufgehoben; das Rechteck ist „astatisch“. Einer der beiden Vertikal- oder Horizontaldrähte, an dem man die Stromrichtung durch einen Pfeil bezeichnet hat, dient dann zur Anstellung des elektrodynamischen Versuches.

b) Schwebende Spulen. Sehr zu empfehlen ist es, zwei grosse

Spulen aus dickem übersponnenen Aluminiumdraht mit offenen, leicht verfolgbaren Windungen an je zwei Goldfäden nebeneinander aufzuhängen. Jeder wird unter Zwischenschaltung je eines Kommutators ein kräftiger Strom (4 bis 6 Ampère) zugeleitet. Laufen die Ströme gleichsinnig in beiden Spiralen (die Stromrichtung wird am besten durch angeheftete Pfeile kenntlich gemacht), so ziehen sie sich beim Stromschluss kräftig an und haften aneinander, beim Kommutieren stossen sie sich ab.

Einfluss der Permeabilität des Zwischenmediums. Da die ponderomotorischen Wirkungen von dem Kraftliniendrucke herrühren, so müssen sie in verstärktem Maasse auftreten, wenn man mehr Kraftlinien im Inneren der Spulen sammelt.

Versuch 68. Während die von zwei gleich starken, aber entgegengesetzt gerichteten Strömen durchflossenen Spulen sich abstossen, schiebt man durch ihr Inneres einen dicken runden Stab weichen Eisens, ohne dabei an sie anzustossen: Die Divergenz der Fäden nimmt zu. Wenn bei gleich gerichteten Strömen die Aufhängepunkte der beiden Spulen so weit voneinander entfernt sind, dass sich die Drahtwindungen nicht berühren können, so wird, wenn man den Eisenkern einschiebt, die Ablenkung aus der Ruhelage noch erheblich vergrössert, so dass einer viel stärkeren Komponente der Schwere das Gleichgewicht gehalten wird.

Die anziehende und abstossende Wirkung der beiden Spulen ergiebt sich auch mit Rücksicht darauf, dass jede von ihnen stromdurchflossen ein Kraftlinienbündel repräsentiert. Man stellt zum Vergleiche das Modell Fig. 53 daneben. Der Kraftlinienverlauf lässt erkennen, dass bei gleich gerichteten, durch Spulen mit parallelen Windungen gesendeten Strömen ungleichnamige Polaritäten einander zugekehrt sind; die aus der einen Spule austretenden Kraftlinien werden also unmittelbar von der anderen aufgenommen (Anziehung), bei entgegengesetzter Stromrichtung sind in beiden gleichnamige Polaritäten einander zugekehrt (Abstossung).

199. Elektrodynamische Wechselwirkung der einzelnen Windungen derselben Spirale aufeinander. — Wir sahen bei der Betrachtung des Kraftlinienverlaufes durch das offen gewickelte Solenoid Fig. 73, dass auch die einzelnen Windungen desselben Stromträgers in der Weise von Kraftlinien umschlungen werden, wie die beiden Paralleldrähte S_1 und S_2 der Fig. 86, da sie ja ebenfalls von gleich gerichteten Strömen durchflossen werden. Wenn auch die nächsten Kraftlinien sich nur um das einzelne Leiterstück legen, die weiteren Ringe fliessen schon mit denen der Nachbarwindungen zusammen. Wie bei zwei verschiedenen Parallelströmen diese Kraftlinien die beiden Träger gegeneinander ziehen, so müssen auch die parallel nebeneinander liegenden, in der-

selben Richtung durchflossenen Windungen des Solenoides elektromagnetisch einander genähert werden. Die ganze Spirale sucht sich zu verkürzen; die einzelnen Windungen scheinen sich anzuziehen. Dies kommt besonders augenfällig bei der sogenannten Rogetschen Spirale zum Ausdruck.

Versuch 69. Eine lange, aus dünnem Kupferdraht möglichst dicht in einer Lage gewickelte Spirale wird in vertikaler Richtung aufgehängt und unten mit einem kleinen Gewichte beschwert. Ihr geradlinig nach unten gebogenes (amalgamiertes) Ende taucht in ein Quecksilbernäpfchen ein. Dieses und das obere Ende der Spirale wird an Polklemmen angeschlossen. Sowie der Strom geschlossen wird, beginnt das Aufeinanderdrücken der einzelnen Windungen. Da die oberste Windung fest ist, werden die unteren gehoben, und das Ende des Drahtes wird aus dem Quecksilber gezogen. Damit ist der Strom unterbrochen; die Kraftlinien und ihr Zug verschwinden; die einzelnen Windungen folgen der Schwere und das Drahtende taucht wieder ein. Von neuem beginnt das Stromphänomen und das Zusammendrücken der Felder u. s. f. Es entsteht ein kontinuierliches Auf- und Abwippen des Federendes, begleitet von dem rhythmischen Geknatter lebhaft glänzender Öffnungsfunken.

200. Einwirkung verschiedener Teile desselben Stromträgers aufeinander. — Die älteren Theorien suchten alle beobachteten Wirkungen zwischen endlichen Gebilden auf die Wirkung ihrer Elemente zurückzuführen. So zerlegte man sich auch die Wirkung, welche ausgedehnte Stromleiter aufeinander ausüben, in die der sogenannten Stromelemente, schrieb diesen eine bestimmte gesetzmässige Wechselwirkung zu und ging zu der Wirkung der Stromträger selbst dann wieder durch Addition (Integration) dieser „Elementarwirkungen“ über. Halten wir uns an die in der Natur uns allein entgegentretenden Wechselwirkungen endlich ausgedehnter Gebilde aufeinander, so liegt uns ob, gewisse Versuche von unserem Standpunkte aus zu erklären, durch welche die älteren Theorien solche Wirkungen einzelner Elemente auf die übrigen Teile des Stromes zu beweisen suchten.

Versuch 70. (de la Rives schwimmender Bügel.) In ein Brett sind zwei Rinnen nebeneinander mit schmaler Zwischenwand eingetieft, welche mit Quecksilber gefüllt werden. Die Rinnen müssen so breit sein, dass der Quecksilberspiegel in der Mitte frei von kapillarer Krümmung ist. Ihnen wird der Strom zugeführt. Die leitende Verbindung wird durch einen Kupferdrahtbügel hergestellt, der mit zwei langen horizontalen parallelen Fortsätzen auf dem Quecksilber schwimmt. Der ganze Bügel ist mit isolierendem Siegellack umkleidet, nur an

den Enden der Fortsätze, welche nach unten umgebogen sind, liegt das Kupfer frei am Quecksilber. Hier findet also der Stromzufluss statt.

Schliesst man den Strom, so schwimmt der Bügel voran, gleichgültig, welche Stromrichtung man einführt. Es scheint also, als ob die Stromteile im Bügel auf die festliegenden eine abstossende Wirkung ausübten.

Die Erscheinung erklärt sich aber bei unserer Auffassung aus dem Querdruck der gesamten durch die Leiterbahn zusammengeschnürten Kraftlinien. Jede Strombahn umschliesst eine nach ihrer Gestalt, Grösse, Umgebung und Stromstärke verschiedene Menge von Kraftlinien § 155. Diese drängen gegen die Leiterbahn an, vergl. den Versuch 54 § 150. Befindet sich in dieser irgendwo eine Stelle, welche leicht nachgiebt, wie hier der Bügel, so wird diese vom Kraftliniendruck hinausgeschoben. So kann der Anschein entstehen, als ob dieses Leiterstück von den anderen abgestossen würde.

201. Verhalten gekreuzter Ströme. — Verlaufen die Stromträger nicht einander parallel, sondern bilden ihre Richtungen irgend einen Winkel miteinander, so ergiebt sich die Wirkung am einfachsten, wenn wir den Kraftlinienverlauf in jedem von vier Winkelräumen betrachten, in die wir uns das Feld zerlegt denken können. Die geradlinigen Träger gehen im allgemeinen windschief aneinander vorüber. Die Linie ihres kleinsten Abstandes steht senkrecht zu beiden. Durch sie und durch je einen der Träger legen wir je eine Ebene; dann ist das Feld in vier Teile geteilt. Durch die Stromrichtungen ist in jedem die Richtung der Kraftlinien bestimmt. Fassen wir weiter ausserhalb in den Winkelräumen gelegene Raumelemente ins Auge, in denen die Kraftlinienvereinigung beider Systeme leichter zu übersehen ist, so finden wir, dass diese in den beiden Räumen, in denen die Ströme zu dem Kreuzungspunkte hin oder von ihnen fort gerichtet sind, ganz ähnlich wie die entfernteren Punkte zweiachsiger Felder paralleler gleich gerichteter Ströme von den Linien beider Systeme durchzogen werden; diese Teile werden also gegeneinander gedrängt. Umgekehrt durchsetzen die Kraftlinien beider Träger die einzelnen Punkte der beiden anderen Winkelräume ebenso, wie bei entgegengesetzten Parallelströmen und drängen die begrenzenden Trägerteile voneinander weg. Der Kraftliniendruck sucht diese Winkelräume also zu erweitern und unterstützt dadurch die Wirkung in den beiden anderen Teilen des Feldes, welche auf Verkleinerung hinstrebt. Der Gesamteffekt ist also der, dass die gekreuzten Träger in die Parallelstellung gedrängt werden.

Entsprechende Versuche, etwa am Ampèreschen Stative, bestätigen diese Folgerungen. So erhalten wir auch diese Erscheinung als eine Folgeerscheinung des Kraftlinienverlaufes ohne Hinzunahme von Anziehungen und Abstossungen der einzelnen Stromträgerteile.

202. Senkrecht gegeneinander gerichtete Ströme; kontinuierliche Rotation eines Stromträgers unter der Wirkung eines anderen. — Denken wir uns einen geradlinigen Leiter, etwa eine Quecksilberrinne, in die von oben her senkrecht ein anderer, ebenfalls geradliniger Stromteil einmündet, etwa ein in die Rinne tauchender, von Stromkraftlinien umschlossener Kupferdraht. Betrachten wir den Kraftlinienverlauf in der durch beide Trägerteile gelegten Ebene. Die Kraftlinienringe stehen senkrecht zu dieser Ebene und senkrecht zu einander. In dem einen Winkelraum treten sie in derselben Richtung durch die betrachtete Ebene hindurch; hier verstärken sie sich gegenseitig und zwar geschieht dies in dem Raume, an dessen Grenze der eine Strom zum Kreuzungspunkt hin-, der andere von ihm fortgerichtet ist; wir haben also verstärkten Kraftliniendruck. Im Nachbarraume, an dem die Ströme beide vom Kreuzungspunkte ab oder beide ihm zufliessen, laufen die Kraftlinien im entgegengesetzten Sinne durch die betrachtete Ebene. Hier schwächen sie sich gegenseitig, das Feld weist eine Verminderung des Querdruckes auf. Das vertikale Leiterstück muss also einen Überdruck in seiner Querrichtung von der erstgenannten Seite her erfahren. Ist es beweglich, wie der Draht in der Quecksilberrinne, so wird es parallel mit sich selbst längs des anderen Leiters hingeschoben und zwar nach der Seite hin, wo die Ströme beide in Bezug auf den gemeinsamen Kreuzungspunkt denselben Richtungssinn aufweisen.

Diesen Querdruck kann man leicht dazu verwenden, lediglich unter der Wirkung der elektrodynamischen Wechselwirkung, eine kontinuierliche Rotation eines Stromträgers in dem Bereiche eines anderen herbeizuführen, wie unter der Wirkung feststehender Magnetfelder: Ein auf einer Spitze drehbarer Kupferbügel taucht mit seinen beiden vertikalen Schenkeln in eine kreisförmige Quecksilberrinne, durch die ihm in allen Stellungen Strom zugeführt wird, der in beiden Schenkeln auf- oder absteigt. Die Ableitung des Stromes erfolgt durch die Spitze. Um die vertikalen Schenkel ist in einer Horizontalebene ein anderer Stromkreis am besten in mehreren Windungen herumgelegt. Bei der Wirkung beider Felder aufeinander erfolgt eine kontinuierliche Rotation des Bügels in dem einen oder anderen Sinne je nach der Stromrichtung.

Die Wirkung in der von uns betrachteten vertikalen Tangential-

ebene überwiegt die Wirkungen der weiter weg gelegenen, gekrümmten Teile der Leiterbahnen.

203. Die Intensität der elektrodynamischen Wechselwirkung. — In jedem Punkte eines mehrachsigen Magnetfeldes wird die Gesamtwirkung durch die Wirkung jedes einzelnen Stromträgers bestimmt. Die Feldstärke eines Stromsystems ist aber an jedem seiner Punkte proportional der Stromstärke § 165. In dem aus der Superposition zweier solcher Felder hervorgehenden Magnetfelde muss die Wirkung sowohl der Stromstärke des einen wie der des anderen Stromes, d. h. dem Produkte der beiden Stromstärken, proportional sein. Da von der Kraftlinienverteilung, insbesondere auch ihrer Zahl, die ponderomotorischen Wirkungen abhängen, welche die Stromträger in dem gemeinsamen Felde erfahren, so muss auch diese von dem Produkte der Stromintensitäten, oder bei gleichen Stromstärken von dem Quadrate derselben bestimmt sein.

W. Weber hat die Richtigkeit dieser Folgerung durch sehr sorgfältige Versuche mit Stromrollen, von denen die eine bifilar aufgehängt war, bestätigt (Bifilar-Elektrodynamometer).

B) Elektrodynamische Induktionsflussdiagramme.

Die in § 172 besprochenen Diagramme einachsiger Magnetfelder gestatten uns, sie mit gleichartigen Diagrammen zu kombinieren, wie wir früher die Diagramme mehrerer magnetischer Felder zu neuen Bildern vereinigten. Wir erhalten so die Bilder mehrachsiger oder elektrodynamischer Felder.

204. Kombination von Diagrammen zweier konzentrischer Kraftlinienfelder. — Durch Übereinanderlagern der Diagramme, die wir nach § 172 für jeden einzelnen Strom zeichnen, erhalten wir die Kraftlinienverteilung für das Feld zweier paralleler, gleich- oder entgegengesetzt gerichteter Ströme. Die Betrachtungen, welche dazu führen, sind ganz analog denen, die früher aus unipolaren Feldern die bipolaren ableiten liessen. Sie führen auf die folgende Regel. Man zeichnet in einer zur Kraftachse senkrechten Ebene um den Durchstosspunkt eines jeden Stromes das Kraftlinienbild (die Permeabilität des Feldmediums sei gleich 1); dann hat man in den entstehenden rautenförmigen Figuren bei gleich gerichteten Strömen, bei denen also auch die Kraftlinien in demselben Sinne um die Achsen gehen, die Diagonalen wie in Figg. 89 und 90, Tafel II zu zeichnen, bei entgegengesetzt verlaufenden Strömen, also auch bei umgekehrtem Richtungssinne der Kraftlinien die Diagonalen Figg. 91 und 92.

Im ersteren Falle erhält man die gesonderten Kraftlinienringe in der unmittelbaren Umgebung der Achsen A_1 und A_2, welche durch Lemniskaten zu allmählich immer mehr kreisähnlichen Figuren übergehen, entsprechend dem Feilichtbilde Fig. 86; im zweiten die gesonderten Kraftlinienringe, welche sich nie vereinigen, sondern sich gegenseitig voneinander wegdrängen, also Figuren, wie sie das Eisenfeilichtbild Fig. 87 zeigte.

Dass diese Diagonalregel richtig ist, erkennt man, wenn man sich an die Eigenschaft der einachsigen Felddiagramme erinnert, dass die Feldstärke in jedem Punkte umgekehrt proportional dem Abstande der benachbarten Kraftlinien ist (vergl. § 173). Sind in Fig. 88 r_1' und r_1'' zwei im Abstande a_1 aufeinander folgende Kraftlinien des einen Systems A_1, r_2' und r_2'' zwei im Abstande a_2 aufeinanderfolgende Kraftlinien des anderen Systems, und haben wir es mit gleich gerichteten Strömen zu thun (die etwa von oben herab durch die Zeichnungsebene hindurchtreten), so sind auch die Kraftlinien gleich gerichtet (im genannten Falle im Uhrzeigersinne). Wir können (bei hinreichend engem Kraftliniennetz) die Kraftlinienpaare innerhalb ihrer Durchkreuzungsfigur annähernd als geradlinig und diese Figur selbst als Parallelogramm betrachten. Die im Feldpunkte P angreifenden Kräfte, welche von dem einen und dem anderen Felde herrühren, seien durch die Strecken $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ dargestellt; sie tangieren im Punkte P die Kreise r_1' und r_2''. Ist das Parallelogramm klein, so fallen die Seiten s_1 und s_2 sehr nahe mit den Anfängen der Strecken $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ zusammen.

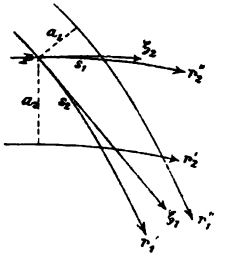


Fig. 88.

Nach § 173 verhalten sich diese Strecken umgekehrt wie die Abstände der zugehörigen Kraftlinienpaare, es ist also

$$\mathfrak{H}_1 : \mathfrak{H}_2 = \frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} = a_2 : a_1.$$

Wegen der Ähnlichkeit der entsprechenden Dreiecke verhalten sich aber weiter diese Abstände wie die Parallelogrammseiten $a_2 : a_1 = s_2 : s_1$, folglich geht die Resultierende der Kräfte durch den dem Punkte P gegenüberliegenden Eckpunkt des Parallelogrammes.

Dass auch hier der Abstand aufeinander folgender resultierender Kraftlinienpaare der Feldstärke des kombinierten Feldes umgekehrt proportional ist, ergiebt sich durch ganz ähnliche Schlüsse wie in § 88 für die kombinierten Magnetfelder. Das Zeichnen der Kraftlinien können wir bei den beiden aus der Kombination zweier einachsiger Felder hervorgehenden Feldern auch nach der folgenden Regel ausführen:

Denken wir uns die Kreise der beiden zu Grunde gelegten einfachen Felder derart numeriert, dass den innersten Kreisen mit den Radien $r_0 = 1$ der Index $p = 0$, den folgenden der Index $p = 1$ u. s. w. zukommt, so ist eine beliebige Kraftlinie, etwa mit dem Index m des einen Systems mit einer anderen, etwa der mit dem Index n des anderen Systems zu kombinieren. Es ist nach § 172 $r_m = e^{m/2i}$, $r_n = e^{n/2i}$. Sind die beiden Felder gleichsinnig, so gehen wir von dem Punkte P, Fig. 88, auf dem m^{ten} Kreise des einen Systems zu dem nächst äusseren, dem $m+1^{\text{ten}}$ Kreise desselben Systems, von dem n^{ten} Kreise des anderen aber zu dem nächst inneren, dem $n-1^{\text{ten}}$ Kreise u. s. f. über. Wir verbinden also den einen Eck-

punkt P mit demjenigen, bei dem die Summe der Indices wieder den gleichen Wert $m+n$ hat. Jede der resultierenden Kraftlinien zweier gleichsinniger einachsiger Felder ist also durch einen bestimmten Wert der Indicessumme $m+n$ ausgezeichnet. Die Linien des resultierenden Feldes zweier entgegengesetzt gerichteter Achsen werden erhalten, wenn wir von irgend einem Punkte (r_m, r_n) auf beiden Ringsystemen zu Linien mit höheren oder niederen Indices übergehen, so dass für alle Punkte derselben Linie immer die Differenz $m-n$ denselben Wert beibehält. Die einzelnen Individuen dieser Linienschaar sind also durch die verschiedenen Ziffernwerte der Zahl $m-n$ ausgezeichnet.

205. Eigenschaften der zweiachsigen Kraftflussdiagramme. — Aus der Konstruktion geht hervor, dass jedes der Diagramme Fig. 89 bis 92 Tafel II die Eigenschaft hat, dass zwischen je zwei Linien der Induktionsfluss 1 oder bei einem Medium von der Permeabilität $\mu = 1$ auch der Kraftfluss 1 hindurchgeht. Wir haben uns über der Zeichenebene dabei eine zweite Ebene im Abstande von 1 cm parallel gelegt zu denken, welche die Kraftflusskanäle nach oben zu begrenzt. Wie bei den früher betrachteten kombinierten Magnetfeldern können wir auch hier aus dem Abstande je zweier Linien die Feldstärke an der betreffenden Stelle des Feldes unmittelbar entnehmen. Tragen wir dem Maasstabe Rechnung, in dem bei gegebener Stromstärke in Dekaampère die Längeneinheit im Diagramm erscheint, so ist die Feldstärke gleich dem Reciproken der Centimeterzahl des gemessenen Abstandes.

a) Diagramme gleich gerichteter Parallelströme. Fig. 89 und Fig. 90. Letzteres stellt den inneren Teil eines anderen, aber gleichartigen Kraftliniensystems in vergrössertem Maassstabe dar. Die Pfeile bei den Trägern A_1, A_2 sollen die Gleichsinnigkeit der Grundfelder andeuten. Bei diesen Bildern tritt die Eigentümlichkeit des Kraftlinienverlaufes noch viel deutlicher hervor, als bei dem direkten Feilichtbild Fig. 86, welches namentlich in seinen centralen Partien nie recht klar zu erhalten ist. Man erkennt, wie die inneren Kraftlinien sich zu Ovalen verlängert haben, die sich mit ihren Spitzen immer mehr einander nähern. Die Einbiegung der ineinander verschmolzenen Linien sowie die immer mehr der Kreisgestalt sich wieder nähernden der ferneren Linien bilden die charakteristischen Züge des Bildes.

Für jede Linie ist nach den Ausführungen des vorigen Paragraphen: $r_m \times r_n = e^{\frac{m+n}{2i}} = \text{Konst.}$ Linien dieser Gleichung nennt man „Lemniskaten". Wie die Konstruktion und die eben erhaltene Gleichung zeigt, sind die einzelnen Punkte jeder Linie dadurch ausgezeichnet, dass das Produkt ihrer Abstände von zwei festen Punkten A_1 und A_2 denselben Wert hat.

b) Diagramm entgegengesetzt gerichteter Parallelströme. Fig. 91 lässt den Kraftlinienverlauf in einem weiteren Bereiche erkennen, Fig. 92 stellt in vergrössertem Maassstabe den inneren Teil des Feldes dar. Die resultierenden Linien werden wiederum Kreise.

die Mittelpunkte derselben schieben sich aber auf der Linie $A_1 A_2$ immer weiter hinaus. Die die Figur in zwei symmetrische Hälften teilende geradlinige mittlere Kraftlinie kann als eine Linie gelten, welche einem Kreise mit unendlich grossem Radius angehört. Jede andere Linie trifft die Linie $A_1 A_2$ in einem dem Träger näheren Punkte im Zwischenfelde und in einem demselben Träger ferneren Punkte des Aussenfeldes.

In der Mitte zwischen beiden Drähten verlaufen die Kraftlinien viel enger aneinander gedrängt; in der Figur ist z. B. die Feldstärke im Verhältniss von 1/0,26 cm (Abstand zweier Kraftlinien im einfachen Felde) zu 1/0,13 cm (Abstand im kombinierten Felde), d. h. im Verhältniss 1 : 2 vergrössert.

Für diese Linien ist immer

$$\frac{r_m}{r_n} = e^{\frac{m-n}{2i}} = \text{Konst.}$$

Linien solcher Gleichungen bilden in ihrer Gesamtheit ein sogenanntes „Kreisbüschel". Die Verbindungslinie der Achsenpunkte $A_1 A_2$ wird von jedem Kreise „harmonisch" geteilt.

Zu empfehlen ist die Konstruktion der Kraftlinien für ungleich starke Ströme, welche genau in derselben Weise, wie es hier für gleich starke geschehen ist, durchgeführt werden kann. MAXWELL, dem wir diese und ähnliche Konstruktionen verdanken, hat ferner die Kraftlinien um viele Paralleldrähte herum gezeichnet, welche zu einem Gitter vereinigt sind.

206. Diagramm einer Stromschleife mit inliegender Magnetnadel. — Wie die einachsigen Felddiagramme, so kann man auch die mehrachsigen wieder mit Magnetfelddiagrammen kombinieren und so zur konstruktiven Darstellung von Fällen fortschreiten, welche einer rechnerischen Behandlung Schwierigkeiten entgegenstellen würden. Als Beispiele wählen wir den praktisch besonders wichtigen Fall, bei welchem in dem Zwischenfelde zweier Achsen eine Magnetnadel um ihren Mittelpunkt in einer zu den Achsen senkrechten Ebene drehbar aufgestellt ist. Wir könnten zwei von gleich starken Stromfeldern im entgegengesetzten Sinne begleitete Paralleltäger wählen. Das Bild weicht aber nicht wesentlich von dem ab, welches wir erhalten, wenn wir denselben Strom durch einen schleifenförmig gebogenen Leiter senden, und in der Mitte der Schleife die Magnetnadel aufstellen. Da dieser Fall bei der Tangentenbussole Verwendung findet, so wollen wir ihn hier zu Grunde legen. Wir denken uns durch die Zeichenebene der Fig. 93 bei A' eine Stromachse heraustreten, über die Papierebene von rechts nach links gehen und bei A wieder hinab-

steigen und konstruieren um A' und A die konzentrischen Kraftlinien. Ziehen wir die Diagonalen durch Schnittpunkte, welche gleichen Differenzen in den Indices der Ringlinien entsprechen, so erhalten wir das der Fig. 50 entsprechende Diagramm (Feilichtbild Fig. 51).

In der Mitte zwischen zwei parallelen geradlinigen Trägern von entgegengesetzt gerichteten Strömen von i Dekaampère Stärke ist die Feldstärke $2 \cdot 2i : a/2 = 8i/a$, wenn a der Abstand der Träger ist. Biegen wir den Träger desselben Stromes zu einer Schleife vom Durchmesser a zusammen, so drängen wir von oben und unten her mehr Kraftlinien in die Zeichenebene hinein. Nach § 165 beträgt die Feldstärke in der Mitte derselben Schleife beim Strome i $4\pi i/a$. Wir müssen unsere Diagramme also für eine Stromstärke von $\pi/2\, i$ Dekaampère zeichnen, um ein möglichst zutreffendes Bild des Kraftlinienverlaufes im Inneren der Schleife des Achsenfeldes bei der Stromstärke i zu erhalten, wenn dieses Bild den Verlauf des Kraftflusses durch eine von diesem Strome durchflossene Tangentenbussole wenigstens in den mittleren Partien im richtigen Grössenverhältnisse veranschaulichen soll.

In die Verbindungslinie AA' legen wir symmetrisch zur Mitte die beiden Pole $s = -8/4\pi$ und $n = +8/4\pi$ Polstärkeeinheiten, so dass sie einen Kraftfluss gleich 8 Einheiten aufnehmen, bezw. produzieren. Wir erhalten das resultierende Feld, wenn wir die vorher gezeichneten Linien des zweiachsigen Feldes mit den von s und n ausgehenden acht geraden Linien verbinden, wobei wir auf die Richtung der Kraftlinien zu achten haben. Wir sehen, dass acht von den durch die einzelnen Schnittpunkte gezogenen Linien nach s hineinlaufen und acht aus n heraustreten und mit den Linien des zweiachsigen Feldes verschmelzen. Wir erhalten so ein Diagramm, welches dem Feilichtbilde Fig. 61 entspricht. Der Zug der Kraftlinien lenkt die Magnetnadel in dem Sinne der Daumenregel ab.

Wenn man noch das homogene Feld des Erdmagnetismus in der Richtung A nach A' überlagert § 91, so hat man alle an der Tangentenbussole zusammenwirkenden magnetischen Kräfte zur Darstellung gebracht.

Teil II.

III. Abschnitt.

Erscheinungen der Induktion.

Wir haben im II. Abschnitte die Eigenschaften des konachsialen magnetischen Kraftfeldes untersucht und dasselbe mit den Feldern von Dauermagneten in die verschiedensten wechselseitigen Beziehungen gebracht. Dabei sahen wir jenes Feld, den sog. „galvanischen Strom" als gegeben an. Jetzt wollen wir zeigen, wie solche Felder erhalten werden. Wir gehen dabei wiederum von rein magnetischen Erscheinungen aus und gelangen so direkt zu denjenigen Methoden der Stromerzeugung, welche am unmittelbarsten verständlich sind, da bei ihnen die ineinander verwandelten Energieformen durch rein geometrische Beziehungen bestimmt werden können. Nur die mechanischen und elektromagnetischen Energieformen treten ins Spiel, deren Werte wir im Vorhergehenden anzugeben gelernt haben; thermische und chemische Energieen können wir ganz ausserhalb des Rahmens unserer Betrachtungen lassen. Dazu gesellt sich der Vorteil, dass wir mit der in der Praxis wichtigsten Methode der Erzeugung starker Ströme zuerst vertraut werden.

13. Kapitel.

Das Schneiden der Kraftlinien.

(Rechte-Handregel, Zeigerstrom, Gegenzeigerstrom.)

Wie überall, so stellen wir auch bei der Beschreibung der Induktionserscheinungen das Experimentelle voran und führen eine Reihe von Versuchen aus, welche gewissermaassen die Grunderscheinungen des ganzen Gebietes darstellen. In demselben wird die Wichtigkeit des Kraftlinienbegriffes in seiner ganzen Tragweite hervortreten, denn es zeigt sich, dass der Verlauf der magnetischen und elektromagnetischen Kraftlinien in erster Linie für die Erzeugung von galvanischen Strömen in geschlossenen Leitern maassgebend ist.

Der Kraftlinienverlauf bildet das einzige Mittel, die mannigfaltigen hier zu behandelnden Phänomene in ein einfaches Gesetz zusammenzufassen und aus diesem wiederum abzuleiten; die darauf bezüglichen Bilder und Modelle der vorhergehenden Abschnitte werden demgemäss auch in diesem und den folgenden Kapiteln eine grosse Rolle spielen.

Wie wir bei den magnetischen Kraftlinien an jeder Stelle ausser der Richtung und dem Richtungssinn die Stärke des Feldes zu unterscheiden hatten, so werden wir auch hier diese Begriffselemente in den Induktionserscheinungen, die von ihnen abhängen, wiederfinden. Wir unterwerfen sie gesondert der Betrachtung, indem wir in diesem Kapitel zunächst nur die qualitativen Momente, vornehmlich die Gesetze des Richtungssinnes der neuen Phänomene verfolgen und erst später die durch die Kraftliniendichte bestimmten quantitativen Beziehungen besprechen.

Diese letzteren sind von energetischen Betrachtungen nicht zu trennen und sollen im folgenden Kapitel behandelt werden. Die qualitativen Erscheinungen sind so mannigfaltig, dass wir nur besonders charakteristische Typen herausgreifen und beschreiben werden.

207. Grundversuch. — Wir wollen an einem einfachen Versuche für einen möglichst übersichtlichen Fall die zuerst von FARADAY entdeckte Grunderscheinung unseres neuen Gebietes erläutern. Derselbe

bildet ein Gegenstück zu den in § 187 besprochenen Versuchen mit beweglichem Gleitstück.

Versuch 71. Ein grosser Hufeisenmagnet oder ein Magnetmagazin wird auf einem Holzklotz so festgelegt, dass die Polenden frei über die Unterlage hinausragen und ein Pol vertikal über dem anderen liegt, die Kraftlinien also vertikal von unten nach oben oder umgekehrt in dem nahezu homogenen Teile zwischen beiden Polen (§ 26) verlaufen. Vor diesem Magneten wird auf dem Tische eine Drahtschleife aus biegsamer, mit Isolierschicht umkleideter Leitungsschnur so befestigt, dass sie leicht zwischen die Magnetschenkel hineingezogen werden kann.

Ihr vorderes Ende bildet demnach gewissermaassen ein bei allen Bewegungen mit den übrigen Teilen der Schnur metallisch verbunden bleibendes Gleitstück (§ 187).

Die Befestigung der Schnur muss eine solche sein, dass Erschütterungen beim Herein- und Herausziehen des Schleifenendes aus dem Magnetfelde nicht auf die übrigen Teile der Leitung übertragen werden; die Enden sind an ein nur eine einzige Drahtwindung enthaltendes Galvanoskop (§ 161) oder einen Multiplikator mit astatischem Nadelpaar (§ 176) aber nur wenigen, offen liegenden Drahtwindungen angeschlossen, so dass, wenn ein Strom durch die Leitungsschnur und die Windungen des Instrumentes geht, die Nadel bezw. das Nadelpaar abgelenkt wird.

Damit die Nadelausschläge weithin deutlich sichtbar sind, werden die Polenden der oberen Nadel mit einer roten bezw. blauen Papierfahne bezeichnet, eventuell wird das Instrument mit einem Spiegel versehen und dadurch zur Projektion geeignet gemacht. Der durch eine Linse auf den Spiegel konzentrierte Lichtkegel einer hellen Lampe wird von ihm auf eine Skala geworfen, auf der ein reelles Bild der Lichtquelle erzeugt wird.

Man bewegt die Drahtschleife so zwischen den Magnetschenkeln hin und her, dass die Kraftlinien von ihrem oberen horizontalen Teile quer durchschnitten werden; die Nadel des eingeschalteten stromanzeigenden Instrumentes wird in eine schwingende Bewegung versetzt.

Man steigert die Amplitude dieser Schwingungen, wenn man jedesmal beim Durchgang der Nadel durch die Gleichgewichtslage die entsprechende Bewegung mit dem beweglichen Leiterteile vornimmt und dadurch jede Schwingung gerade in dem Augenblicke durch einen neuen Impuls verstärkt, wenn er die Nadel in der günstigsten Stellung, dem Drahte am nächsten, antrifft („Multiplikationsverfahren").

Bei der Bewegung eines einem geschlossenen Leiterkreise angehörenden Metallstückes in einem Magnetfelde wird in dem Kreise ein galvanischer Strom erzeugt. Man nennt den Vorgang nach Faraday „Induktion" und sagt: Durch die Bewegung wird ein Strom „induziert" oder ein „Induktionsstrom" geweckt.

In dem festliegenden Magneten und dem durch sein Feld sich bewegenden Leiterstücke haben wir das einfachste Bild dessen vor uns, was wir die „Stromquelle“ eines achsialen Kraftliniensystems genannt haben. Die an die Enden der Drahtschleife angesetzten Klemmen sind die „Polklemmen“. Teil I, p. 137.

So lange der Leiter relativ zu den Kraftlinien des Feldes ruht, wird kein Strom induziert. Die Bewegung ist also ein wesentliches Bestimmungsstück des Vorganges.

208. Die Rechte-Handregel. — Fassen wir bei dem vorigen Versuche am Galvanoskope den Richtungssinn der Kraftlinien des durch die Bewegung in dem Drahtkreise erzeugten und die Magnetnadel ablenkenden Stromes ins Auge, so lässt uns die Anwendung der Daumenregel (§ 160) etwa auf die oberen Teile der Windungen und auf die nach ihrer Polarität gekennzeichnete Nadel die Richtung des Induktionsstromes in jedem Falle leicht feststellen.

Die Nadel zeigt, dass sich mit der Bewegung auch die Richtung des induzierten Stromes umkehrt. Drehen wir den Hufeisenmagneten um, so wird bei derselben Bewegungsrichtung des Leiters jetzt ein Induktionsstrom im umgekehrten Sinne erzeugt. Wie früher (§ 187 und 188) veranschaulichen wir eine derartige Doppelsymmetrie dreier zu einander senkrechter Richtungselemente (Vektoren) durch die drei ersten ausgestreckten Finger einer Hand. Wir behalten auch hier wieder die Bezeichnungen: Kraftlinienrichtung = Zeigefinger, Stromrichtung = Mittelfinger, Bewegungsrichtung = Daumen bei und erkennen aus allen vier Kombinationen, in denen der Grundversuch 71 ausführbar ist, dass die Beziehung der genannten drei gerichteten Elemente unserer Erscheinung zu einander jetzt durch die drei Finger der rechten Hand ausgedrückt wird.

Wir stellen somit der in § 188 formulierten Regel, welche den Sinn des Bewegungsantriebes beschreibt, den ein gegebener Strom in einem feststehenden Magnetfelde erfährt, die zweite „Flemingsche Dreifingerregel“ für die Induktion eines Stromes bei Bewegung eines zunächst stromlosen Leiters durch ein ruhendes Magnetfeld gegenüber:

Halten wir den Zeigefinger der rechten Hand in die Richtung der Kraftlinien eines festliegenden Magnetfeldes und bewegen wir einen Leiter in der Richtung des Daumens derselben Hand quer zur Kraftlinienrichtung vorwärts, so wird in diesem ein galvanischer Strom induziert, dessen Richtung der des Mittelfingers folgt („Rechte-Handregel“).

Wie sich aus der Linken-Handregel alle Erscheinungen des Elektromagnetismus ableiten lassen, so umfasst die Rechte-Handregel die Gesamtheit aller Induktionserscheinungen, soweit deren Richtungsbeziehungen

zwischen Entstehungsursachen (Kraftfeld und Bewegung) und Folgen (induzierter Strom) in Betracht kommen.

Man hat die Induktionsregel noch in verschiedene andere Formen gebracht, von denen nur die folgende hervorgehoben sei, welche mit der oben gegebenen Form in leicht ersichtlichem Zusammenhange steht.

„Legt man die rechte Hand so auf den Leiter, dass die Kraftlinien durch die Hand von Handfläche zu Handrücken hindurchgehen und der Daumen in die Richtung der Bewegung gehalten wird, so zeigen die ausgestreckten Finger in die Richtung des induzierten Stromes."

Diese „Daumenregel" stellt sich der in § 160 gegebenen an die Seite. Der Gegensatz liegt darin, dass bei jener das Magnetfeld und sein Träger bewegt wird und der Strom festliegt, hier dagegen der Stromträger sich bewegt und das Magnetfeld ruhend gedacht ist. Die eine Regel zieht in der That die andere unmittelbar nach dem Satze von actio und reactio nach sich.

209. Kombination beider Handregeln: die „Lenzsche Regel". — Um den Gegensatz der Wechselwirkung zwischen Strom und Magneten (ponderomotorischer Antrieb des Leiters bei feststehendem Felde) einerseits und der Erzeugung von Strömen durch Induktion bei Bewegung ihrer Träger durch magnetische Kraftfelder hindurch andererseits möglichst klar hervortreten zu lassen, stellen wir die beiden folgenden Parallelversuche an.

Versuch 72a. Ein Hufeisenmagnetmagazin HH, Fig. 94, wird so befestigt, dass die Pole N und S vertikal übereinander liegen. Zwischen sie wird ein breiter Streifen s aus dickem Aluminiumblech gehängt, der mit seinen Enden an oben befestigte Goldbänder b_1 und b_2 von ca. 1 m Länge dadurch leitend angeschlossen ist, dass die Streifenenden um die unteren Enden der Goldbänder gebogen und an diese festgedrückt wurden. Man führt s durch die Bänder unter Zwischenschaltung eines Kommutators (I, p. 144 unten) einen Strom von einer beliebigen Quelle aus zu, dessen Richtung man an dem beweglichen Aluminiumstreifen durch (rote) Pfeile bezeichnet.

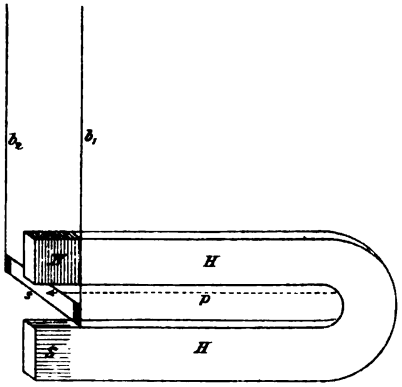


Fig. 94.

Die Entfernung des Streifens von der indifferenten Biegungszone des Magnetmagazins bietet ein bequemes Mittel zur Beschreibung der Lage des Bügels. Wir können sie als sog. Koordinate oder als Parameter der Lage benutzen (§ 137 und 144); daher bezeichnen wir sie mit p.

Beim Stromschluss wird der Streifen kräftig aus seiner Ruhelage nach der

einen oder anderen Richtung herausgestossen. (Elektromagnetische Wechselwirkung: Linke-Handregel.) Dadurch wird der Parameter p entweder vermehrt oder vermindert. Sowie die Stromstärke sich ändert, etwa von 0 bis zu i Ampère ansteigend, ändert sich p um einen bestimmten Betrag dp im einen oder anderen Sinne. Die Grösse dieser Veränderung dp hängt von der Stärke des Stromes und der des Feldes ab. Bei der Bewegung um dp beschreibt der Schwerpunkt des Aluminiumstreifens nicht genau eine gerade Linie, er wird etwas gehoben, da er sich, streng genommen, auf dem Mantel eines horizontal liegenden Cylinders mit einer durch die Aufhängepunkte gehenden Achse bewegt. Gleichgewicht tritt ein, wenn die rücktreibende Komponente der Schwere gleich der entgegenwirkenden ponderomotorischen Kraft der elektromagnetischen Wechselwirkung geworden ist. Die Wirkung des Stromfeldes auf das Magnetfeld hält einem Teile der Schwere des Stromträgers das Gleichgewicht.

Dieser Versuch entspricht vollkommen der Versuchsgruppe des § 187 mit dem Gleitstücke.

Versuch 72 b. Die Stromquelle wird ab- und an ihre Stelle ein empfindliches (Projektions-)Galvanometer angeschaltet, für das die einer bestimmten Ausschlagsrichtung zugehörige Stromrichtung vorher festgestellt worden ist. Man bewegt den Aluminiumstreifen in dem Felde des Hufeisenmagneten hin und her. Bei jeder Bewegung zeigt das Galvanometer einen Strom von bestimmter Richtung an (Induktionswirkung: Rechte-Handregel).

Ändern wir den Lagenparameter p, so tritt ein Strom auf, d. h. während der Veränderung wächst die Stromstärke vom Werte 0 bis zu einem bestimmten anderen Werte an.

Vergleichen wir in jedem Falle die zur Bewegung gehörige Stromrichtung mit den entsprechenden der vorigen Versuche, so finden wir, dass die Richtung des durch eine bestimmte Bewegung induzierten Stromes immer gerade die umgekehrte von der desjenigen Stromes ist, der bei dem Versuche 72 a dieselbe Bewegung erzeugte. Alle Einzelfälle beider Erscheinungsgruppen ordnen sich demnach der folgenden Regel unter:

Durch die Bewegung eines Leiters in einem magnetischen Kraftfelde wird immer ein Strom von solcher Richtung induziert, dass er elektromagnetisch auf das Feld zurückwirkend, gerade die umgekehrte Bewegung hervorrufen würde (Lenz).

Diese Rückwirkung kann man direkt nachweisen:

Versuch 72 c. Zwischen die Polschuhe eines kräftigen Elektromagneten hängt man eine dicke massive Kupferscheibe an zwei Fadenpaaren so auf, dass sie in einer Ebene, welche durch die Mitte des Feldes senkrecht zu den Kraftlinien geht, schwingen kann, ohne dass sie dabei eine Drehung auszuführen vermag. Ist kein magnetisches Kraftfeld vorhanden, so werden die Pendelschwingungen der Scheibe

nur durch den Luftwiderstand und die Reibung an der Aufhängung und zwar sehr langsam gedämpft. Erregt man aber den Elektromagneten durch Schliessen des ihn speisenden Stromes, so wird die Kupferscheibe plötzlich gehemmt, sie bewegt sich wie in einem zähen Medium und kommt nach wenigen kleinen Ausschlägen ganz zur Ruhe. Sie setzt dem (schnellen) Herausbringen aus dieser Ruhelage einen fühlbaren Widerstand entgegen.

In der Metallmasse werden beim Durchschneiden der Feldkraftlinien Ströme nach der Rechten-Handregel induziert; diese wirken nach der Linken-Handregel auf das feststehende Feld derartig zurück, dass ein Widerstand gegen die erzeugenden Bewegungen geweckt wird. Man verwendet diese Wirkung z. B., um die Schwingungen einer Magnetnadel schnell zur Ruhe zu bringen: „Dämpfung". Aus diesem Grunde waren die Magnete der Galvanometer, wie in § 177 erwähnt wurde, mit Kupferhülsen umgeben. Oft stören die in den bewegten Metallmassen induzierten Ströme („Wirbel- oder Foucault-Ströme"); um sie zu schwächen, zerteilt man die Metall(Eisen-)kerne durch Schnitte oder setzt sie aus dünnen, voneinander isolierten Lamellen oder Drähten zusammen. —

Bei den Handregeln kommt diese Gegensätzlichkeit durch die geometrische Thatsache der Symmetrie unserer beiden Hände zum Ausdruck. Legen wir Zeige- und Mittelfinger beider Hände aneinander, so weisen die dazu senkrecht ausgestreckten Daumen nach entgegengesetzten Richtungen. Die beiden Erscheinungsgruppen stehen sich also wie Spiegelbilder einander gegenüber.

Das Lenzsche Gesetz lehrt eine eigentümliche Reciprocitätsbeziehung zwischen elektromagnetischen und Induktions-Erscheinungen kennen, von der sich zeigen lässt, dass sie für Bewegungssysteme charakteristisch ist, in denen in sich zurücklaufende, d. h. cyklische Bewegungen § 136—144 vorkommen.

210. Mechanisches Analogon des Induktionsvorganges. — Wir haben in § 189 ein mechanisches Bild der elektromagnetischen Wechselwirkung von Strom- und Magnetkraftfeldern entworfen, indem wir von der Helmholtz-Maxwellschen Anschauung ausgingen, dass längs der Kraftlinien gyroskopische, in sich zurücklaufende, wirbelartige oder cyklische Bewegungen vor sich gingen, die zwar an sich „verborgen" sind, aber doch mit ihrer Energie den Energieinhalt der genannten Felder ausmachen (Kapitel 7). Bei dem Versuche, die Induktionserscheinungen in weitere Begriffselemente aufzulösen und so zu sagen in ihren „Mechanismus" tiefer einzudringen, werden wir in sehr bemerkenswerter Weise wiederum auf analoge Beziehungen bei mechanischen Systemen mit solchen in sich zurücklaufenden Kreiselbewegungen hingewiesen. Da wir oft auf diese nahe Beziehung zurückkommen werden, so möge schon hier ein solch einfaches mechanisches Beispiel zum Vergleiche herangezogen werden.

Kreisel in Cardanischer Aufhängung (Gyroskop). Fig. 95. In dem feststehenden vertikalen Ringe R dreht sich um eine vertikale

Achse der Ring r_1 und in diesem um eine horizontale der kleinere Ring r_2. In diesem ist senkrecht zu seiner eigenen horizontalen Umdrehungsachse die Rotationsachse eines homogenen, abgeplatteten Umdrehungskörpers K gelagert, an dem die mit einem kurzen Stift s versehene Rolle u befestigt ist. Wird um u eine Schnur, die mit einer Schleife am Ende an s festgehängt ist, geschlungen, so kann K durch Abziehen derselben in sehr schnelle Rotation versetzt werden.

Versuch 73. Durch das Aufziehen des Kreisels erhält man ein mechanisches System mit einer cyklischen Bewegung, von welcher man aber fast nichts direkt bemerkt: sie ist in hohem Grade eine „verborgene Bewegung".

Drücken wir den Ring r_1 an einer Seite voran, etwa so, dass der spitze Winkel zwischen ihm und dem feststehenden Ringe R vergrössert wird, so hebt sich der Ring r_2 mit einer Hälfte. Wenn wir jetzt umgekehrt an dieser Hälfte den Ring r_2 erfassen und die hebende Bewegung unsererseits ausführen, so geht der Ring r_1 zurück, der vorher betrachtete Winkel zwischen ihm und dem Ringe R vermindert sich.

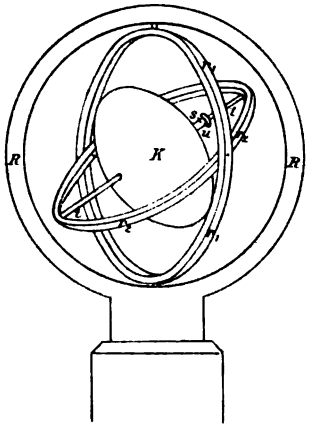


Fig. 95.

Jeder Änderung der einen Grösse entspricht eine „reciproke" der anderen; beide Erscheinungsgruppen stehen wie Spiegelbilder einander gegenüber.

Auf die tiefere dynamische Bedeutung dieser Analogie mit der Lenzschen Regel kommen wir erst später zu sprechen. Nur muss schon hier hervorgehoben werden, dass in Bezug auf das Lenzsche Gesetz § 209 noch insofern ein Unterschied besteht, als wir hier bei dem Gyroskop offenbar die reciproken Änderungen zweier langsam sich verändernder Koordinaten p_1 und p_2 (der Grössen der beiden Winkel § 144) herbeiführen und nicht in den Verlauf der cyklischen Bewegung selbst eingreifen, um etwa (direkt) ihre cyklische Geschwindigkeit q zu ändern. Da aber nach § 171 die Stromstärke i der cyklischen Geschwindigkeit q parallel steht, so ist die Erzeugung eines Induktionsstromes identisch mit einer Änderung der cyklischen Geschwindigkeit q des supponierten Bewegungssystems. Das Lenzsche Gesetz bezieht sich also auf eine Reciprocität in dem Verhalten der cyklischen Geschwindigkeit und eines langsam veränderlichen Parameters, des Lagenparameters p § 209.

Auf Analoga aus der Theorie der mechanischen Cykelbewegungen, welche sich auch hierin an die Induktionserscheinungen anschliessen, werden wir erst später eingehen.

211. Induktionswirkungen in einer Leiterschleife mit Gleitstück. — Bisher wurde nur ein kleiner Teil einer Strombahn zum Schnitt mit den Feldkraftlinien gebracht. Um den Übergang zu den in ausgedehnteren Teilen eines geschlossenen Leiterkreises, in beliebig gestalteten Leiterschleifen, Spulen und Spiralen induzierten Strömen herzustellen, gehen wir von einer im homogenen Magnetfelde befindlichen ebenen

Leiterschleife aus, deren eine Seite wir beweglich machen. Am besten geben wir der Schleife rechteckige Gestalt, lassen zwei Seiten aus vertikalen Röhren, die mit Quecksilber gefüllt sind, bestehen und verwenden als Gleitstück einen Bügel, der mit seinen Enden in das Quecksilber taucht. Die Kraftlinien mögen senkrecht zur Ebene der Schleife verlaufen.

Eine auch für die späteren Betrachtungen geeignete Anordnung zeigt Fig. 96 in der Vorder-, Fig. 97 in der Seitenansicht (nach Wegnahme eines Magnetschenkels). Auf ein kräftiges, aus mehreren Lamellen bestehendes Hufeisenmagnetmagazin *H H*, welches durch ein aus horizontalen Brettern und vertikalen Trägern *T* bestehendes Gestell (vergl. auch Fig. 101) in vertikaler Stellung gehalten wird, werden eiserne Polschuhe von dem aus Fig. 96 ersichtlichen Profil aufgesetzt. Die Innenseiten dieser Schuhe sind eben abgeflacht und gegeneinander vorgerückt, so dass zwischen ihnen ein starkes homogenes Feld entsteht. In dieses ragen die

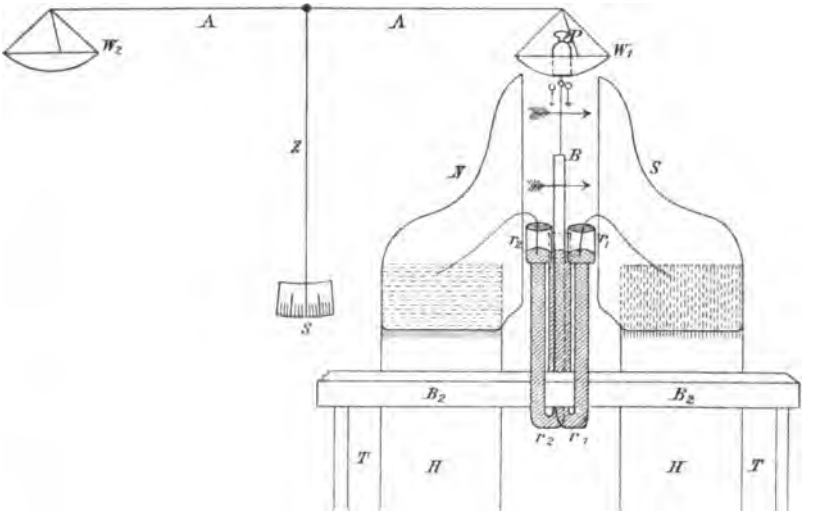


Fig. 96.

Enden zweier je zweimal rechtwinklig umgebogener, mit Quecksilber gefüllter Glasröhren r_1 und r_2 hinein, deren vertikale innere Enden durch das Brett $B_2 B_2$ gesteckt und in diesem befestigt sind. Die äusseren Enden sind näpfchenförmig erweitert; hier werden die Zuleitungsdrähte eingehängt. Das Gleitstück ist der Bügel *B*, der mit seinen vertikal nach unten gebogenen amalgamierten Enden in die Quecksilbersäulen eintaucht und dadurch den metallischen Schluss in der rechteckigen Leiterschleife herstellt. Dieser Bügel wird an die in der Figur 96 nur schematisch skizzierte, möglichst eisenfreie Wage mit den Schalen W_1 W_2, dem Balkenarme *A A*, dem Zeiger *Z* und der Skala *S* gehängt. Ein kleines Übergewicht in der linken Wagschale W_2 hält dem Bügel *B* das Gleichgewicht. (Da die in das Quecksilber tauchenden Enden einen Auftrieb erfahren, muss dasselbe etwas kleiner als das Bügelgewicht sein.)

Vorversuch. Wir senden durch die Leiterschleife $r_1 B r_2$ in Fig. 97 einen Strom, welcher diese in Fig. 97 von vorn (also in der Richtung der Kraftlinien) gesehen dem Uhrzeigersinne entgegengesetzt durchläuft, der also gegen die in die Figur 97 eingezeichneten Pfeile gerichtet ist und in dem Bügel B nach links läuft. Dann wird B der Linken-Handregel entsprechend (§ 188) heruntergezogen.

Wir legen in die linke Wagschale W_2 so lange Gewichte, bis der ponderomotorischen Zugkraft am Bügel B gerade das Gleichgewicht gehalten wird.

Hat der Strom eine Stärke von i E. M. Stromeinheiten ($= 10\ i$ Ampère § 167), so ist hierzu nach § 194 eine Kraft $P = i \mathfrak{H} l$ Dyne erforderlich ($\mathfrak{H}$ die Stärke des homogenen Feldes zwischen den Polschuhen N und S des Hufeisenmagnetmagazins $H H$ und l die Länge des Bügels B in Centimetern), d. h. das Gewicht von $P/981$ gr.

Versuch 74. Die in $r_1 r_2$ eintauchenden Drähte werden von der Stromquelle abgenommen und an ein empfindliches Galvanometer angeschlossen. Die rechte Wagschale W_1 wird dadurch heruntergedrückt, dass wir in sie ein beliebiges Übergewicht legen. Während der Bewegung des Bügels macht sich ein Induktionsstrom bemerkbar, der nach der Rechten-Handregel in dem sinkenden Bügel nach rechts verläuft (entsprechend dem Lenzschen Gesetze). Dadurch wird in dem ganzen geschlossenen Leiterkreise ein Strom hervorgerufen, welcher in der in das Magnetfeld tauchenden Leiterschleife *uhrzeigermässig gerichtet* ist, d. h. in allen einzelnen Teilen so, wie es die Pfeile in der Fig. 97 andeuten. Die Zahl der von der Schleife umschlossenen Feldkraftlinien des Magneten *vermindert* sich dabei.

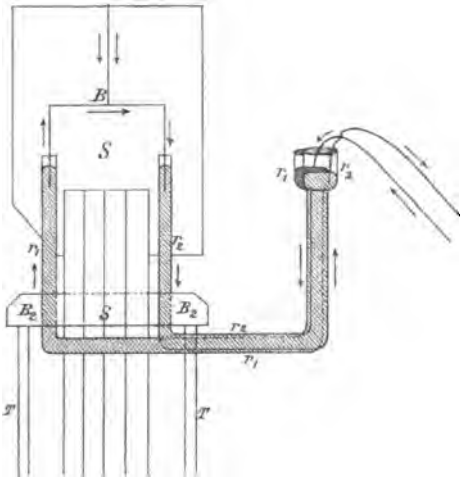


Fig. 97.

Versuch 75. In die Wagschale W_2 wird ein Übergewicht gelegt; die Schale W_1 und damit der Bügel B wird gehoben, die Zahl der von der Schleife umschlossenen Feldkraftlinien *vermehrt* sich. In dem Gleitstück wird ein nach links gerichteter Strom induziert und damit die ganze Leiterschleife von einem dem *Uhrzeigersinne entgegengesetzt gerichteten* Induktionsstrome umflossen.

212. Direkte und inverse Ströme. — Die beiden vorigen Versuche zeigen, wie man in einer Leiterschleife und damit in einem geschlossenen Leiterkreise überhaupt Induktionsströme von dem einen oder anderen Richtungssinne dadurch induzieren kann, dass man mit einem Teile der Schleife die Kraftlinien eines Feldes in dieser oder jener Richtung durchschneidet. Die Stromrichtung in dem ganzen Kreise ist durch diejenige im Gleitstück vollkommen bestimmt. Zwei Fälle sind möglich. Blicken wir in dem Sinne der Feldkraftlinien auf die Leiterschleife, so kann der Strom im Sinne der Uhrzeigerbewegung (Versuch 74) oder dieser Bewegung entgegen gerichtet sein (Versuch 75). Man nennt einen im Sinne der Uhrzeigerbewegung umlaufenden Strom einen „direkten“ oder „Zeigerstrom“, den entgegengesetzten einen „inversen“ oder „Gegenzeigerstrom“. Immer ist vorausgesetzt, dass man den Leiterkreis in der Richtung der durch ihn hindurchgehenden Kraftlinien des Magnetfeldes betrachtet, in dem der Kreis oder ein schleifenartiger Teil desselben liegt.

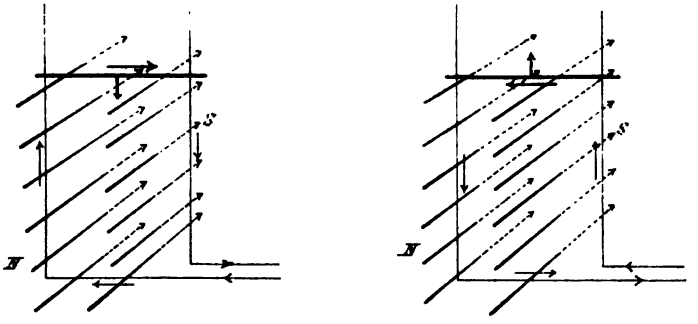


Fig. 98.

213. Die Maxwellsche Regel. — Wenden wir die Rechte-Handregel auf das obere stark ausgezeichnete beweglich gedachte Leiterstück der rechteckigen Schleifen Fig. 98 an, so ergeben sich bei Bewegungen desselben im Sinne der vertikalen Pfeile die in die Figur eingezeichneten Richtungen des Induktionsstromes. Dabei ist angenommen, dass die Kraftlinien von vorn durch die Zeichenebene nach hinten verlaufen, vor dieser also der *N*-, hinter ihr der *S*-Pol des Feldmagneten liegt.

Im ersten Falle wird ein direkter Strom induziert; durch die Bewegung wird die Zahl der umschlossenen Feldkraftlinien vermindert. Im zweiten erweitert sich die Leiterschleife, die umschlossene Kraftlinienzahl nimmt zu, der induzierte Strom ist ein inverser.

Dasselbe findet statt, wenn irgend eine andere als die obere Seite der Schleife bewegt wird; das Gesagte gilt also ganz allgemein.

Wird durch irgend einen Vorgang innerhalb einer Leiterschleife die Kraftlinienzahl vermindert, so wird ein direkter, wird sie vermehrt, ein inverser Strom induziert (MAXWELLsche Regel).

Diese Regel gilt für jede beliebige Leiterbahn, da man sich dieselbe immer aus kurzen geradlinigen Stücken zusammengesetzt denken kann.

214. Prinzip der Summation der Induktionswirkungen. — Bringen wir gleichzeitig zwei Stellen desselben Leiterkreises im gleichen Sinne mit Kraftlinien zum Schnitt, so addieren sich die stromerzeugenden Wirkungen.

Würden wir bei dem Versuche 75 anstatt nur den Bügel B nach oben zu heben, gleichzeitig auch die beiden seitlichen Leiterteile nach aussen und die untere Begrenzung nach unten verschieben, so würden wir die gesamte Induktionswirkung erheblich steigern, da jede Einzelwirkung für sich schon einen inversen Strom zu erzeugen strebt. Durch jede einzelne Bewegung wird aber auch die von dem Rechteck umschlossene Kraftlinienzahl vermehrt. Führen wir alle diese Bewegungen gleichzeitig aus, so müssen sich ihre Wirkungen addieren.

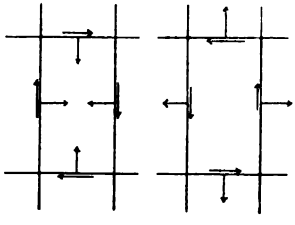


Fig. 99.

Denken wir uns einen Leiterkreis aus vier gegeneinander verschiebbaren Gleitstücken bestehend Fig. 99 und wenden wir die Rechte-Handregel bei beiden Rechtecken auf jede Seite an, so werden in jeder gleichsinnig umlaufende Ströme induziert. Gehen die Kraftlinien von vorn nach rückwärts durch die Zeichenebene hindurch, so giebt die nach innen gerichtete Bewegung einen direkten, die nach aussen gerichtete einen inversen Strom. Dies entspricht vollkommen der MAXWELLschen Regel, denn im ersten Falle vermindert, im zweiten vermehrt sich die Kraftlinienzahl im Inneren.

215. Induktion durch Lagenveränderung einer Leiterschleife im Magnetfelde. — Wir hatten im vorigen Paragraphen, um einen Induktionsstrom zu erhalten, die Kraftlinienzahl innerhalb einer Schleife durch Variation ihres Flächeninhaltes vermindert oder vermehrt. Dasselbe wird erreicht, wenn wir die Schleife selbst unverändert lassen und nur ihre Lage zu einem Magneten variieren, d. h. sie von einem Magneten entfernen oder ihm nähern oder umgekehrt den Magneten relativ von ihr fort oder zu ihr hin bewegen. Wird z. B. ein Stabmagnet senkrecht gegen eine ebene Leiterschleife bewegt, und zwar mit dem Nordpol, von dem aus die Kraftlininien divergieren, voran, so gehen immer mehr Linien durch das Innere der Schleife hindurch (vergl. das Modell Fig. 40).

Während vorher eine grosse Anzahl der Linien ausserhalb der Schleife vorbeiging, schneiden sie jetzt beim Nähern des Magneten einzeln die Drahtbahn und vermehren dadurch gleichzeitig die von der Schleife umschlossene Kraftlinienzahl. Beim Entfernen des Stabes tritt demgemäss eine Verminderung derselben ein, die Längenelemente des Leiters werden im umgekehrten Sinne geschnitten. Die MAXWELLsche Regel giebt uns auch hier wieder Aufschluss über den Richtungssinn der induzierten Ströme.

Versuch 76. Ein fast geschlossener Kreisring aus starkem Kupferdraht wird mit Zuleitungen versehen und in vertikaler Stellung befestigt. Ein Stabmagnet, dessen Polaritäten bezeichnet sind, wird

a) mit dem Nordpole voran achsial der Ringmitte genähert. An einem eingeschalteten (Projektions-)Galvanometer wird ein Ausschlag beobachtet, so lange eine relative Bewegung des Stabes gegen den Leiter stattfindet, also Kraftlinien zum Schnitt kommen. Ruht der Stab relativ zum Ring, so wird kein Strom beobachtet. Beim Herausziehen erfolgt der induzierte Stromstoss im umgekehrten Sinne, als wie beim Hineinbewegen. Die Stromrichtung im Kreise entspricht der MAXWELLschen Regel.

b) Wird der Stab befestigt und der Ring auf den Nordpol zu oder von ihm weg bewegt, so ergeben sich dieselben Ausschläge; die Erscheinung hängt also nicht von der Bewegung des einen oder anderen Teiles an sich ab, sondern von der relativen Bewegung beider Teile zu einander und der Kraftlinienerfüllung des Zwischenmittels. Für jedes Längenelement bestätigt sich wieder die Rechte-Handregel, die in den einzelnen Elementen geweckten Impulse sind alle „gleichsinnig hintereinander geschaltet".

c) Wird der Ring gedreht, so werden zwar nicht alle Elemente von Kraftlinien geschnitten; einzelne bewegen sich gewissen Kraftlinien parallel (z. B. an den Drehpunkten); doch schneiden die anderen den Kraftlinienstrom so, dass sich die umschlossene Kraftlinienzahl vermehrt oder vermindert, wodurch inverse bezw. direkte Ströme induziert werden.

d) Wird der Südpol dem Ringe zugekehrt, so muss zur Feststellung des Stromsinnes (invers oder direkt) bei den besprochenen Versuchen der Ring von der anderen Seite betrachtet werden, da die Kraftlinien in die Sinkstelle des S-Poles einlaufen.

Es ist nützlich, bei diesen Versuchen die kinematischen Bilder, die wir im 7. Kapitel ausführten, zum Vergleiche heranzuziehen. Führt man mit den Kraftröhrenmodellen Figg. 40, 41 oder 42 die Bewegungen der Versuche a—d gegen den Ring aus, so sieht man, dass, der MAXWELLschen Regel entsprechend, sowohl bei Annäherung wie bei Entfernung ein Strom erzeugt wird, dessen Sinn der Drehrichtung der unmittelbar mit dem Leiter in Anlehnung kommenden Wirbelröhren analog ist. Haben wir hier auch nur ein Bild, so lässt es uns doch (mechanisch) verständlich erscheinen, dass Bewegungen, die wir in den Induktionsströmen konstatieren, aus dem Magnetfelde an den Leiter übertragen werden können. Es ist nicht nötig, das Bild hier weiter auszumalen, da wir später, durch die präzisere Formelsprache unterstützt, dasselbe viel vollkommener durchführen werden auf dem Wege, den die HERTZsche Mechanik zum ersten Male ganz durchmessen hat.

216. Steigerung der Induktionswirkungen durch Multiplizieren der Windungslagen. — Bei den elektromagnetischen Erscheinungen (§ 175) hatten wir die Wirkung einzelner Leiterschleifen durch Anein-

anderlegen vieler Windungen erheblich gesteigert. Dem analog müssen wir auch hier durch Anwendung von Spulen (§ 175) sehr viel höhere Induktionswirkungen erzielen.

Versuch 77 a. Bildet man aus dem bei dem Versuch 76 benutzten Leitungsdrahte eine Spule, indem man an die dort erwähnte einfache Schleife Windungen von gleichem Durchmesser anlegt und führt man gegen dieses Bündel von Schleifen dieselben Lagenveränderungen des Magnetstabes wie in den Versuchen 76 a—d aus, so lässt das Galvanometer eine Steigerung der Wirkung erkennen, die der Zahl der vereinigten Windungen proportional ist, wie dies nach dem Prinzipe der Summation (§ 214) zu erwarten ist.

Stellt man die Spule aus einem längeren als dem ursprünglich benutzten Leitungsdrahte her, indem man in denselben Schliessungskreis Spiralen mit immer grösserer Windungszahl einschaltet, so ist die Wirkung aus später zu erörternden Gründen nicht mehr proportional der Windungszahl; sie nähert sich einem gewissen Grenzwerte, welcher trotz fortgesetzter Steigerung der Windungszahl nicht überschritten werden kann (galvanischer Widerstand).

Versuch 77 b. Ausgehend von der Überzeugung der Einheit und gegenseitigen Verwandelbarkeit aller Naturkräfte (Energien) hatte Faraday versucht, Schwerkraft in Elektricität zu verwandeln. Er liess fest zusammengewickelte Spulen aus isoliertem Drahte, die durch biegsame Leitungsschnüre an empfindliche Multiplikatoren angeschlossen waren, unter der Einwirkung der Schwere aus grossen Höhen herabfallen: es zeigte sich kein Strom. Nur wenn das Fallen in der Nähe von Magneten stattfand, erhielt er einen Ausschlag. Befestigen wir einen langen Magnetstab an seiner Indifferenzzone an einem hohen Stativ in vertikaler Stellung, bringen eine ihn umschliessende Drahtspule von unten her an diese Stelle und schliessen den Draht an ein Galvanometer an, so erhalten wir einen Strom, wenn die Spule unter der Wirkung ihrer eigenen Schwere an dem Magnetstabe entlang herabgleitet. Die Fallbewegung allein reicht also noch nicht zur Strombildung aus, es müssen zu ihr noch die Spannungszustände eines Magnetfeldes treten.

217. Magnetoinduktion und Elektroinduktion. — Wir haben seither Ströme induziert, indem wir Teile eines geschlossenen Leiterkreises mit den Kraftlinien von Dauermagneten schnitten. Da aber die temporären Kraftlinien von galvanischen Strömen, Stromschleifen, Stromspiralen, -Solenoiden und Elektromagneten mit den permanenten der erstgenannten Feldträger wesensgleich sind (§ 157), so muss auch der Schnitt mit Stromkraftlinien in einem zunächst stromlosen Leiterstück Induktionsströme erzeugen. Dadurch ergeben sich naturgemäss zwei Gruppen von Erscheinungen, die man vielfach als die der Magneto- und der Elektro-Induktion einander gegenübergestellt hat. Dieser Gegensatz tritt bei den neueren Anschauungen mehr zurück, bei denen das Hauptgewicht auf die Kraftfelder selbst gelegt wird; jedenfalls besteht hier kein prinzipieller Unterschied. Es ist dann ohne weiteres klar, dass man alle Versuche der §§ 215 und 216 in gleicher Weise statt mit einem Stabmagneten mit einer Stromspule ausführen kann; da man durch Verstärken und Schwächen des Stromes diese Kraftfelder

beliebig verändern kann, ohne den Träger selbst zu bewegen, so bieten sie doch noch ein besonderes Interesse dar.

Versuchsanordnung. Zu diesen, sowie den vorhergehenden und den folgenden Versuchen verwendet man am besten eine glatte, von einem starken Fusse getragene horizontale Holzrinne, auf der sich vier Schlitten in einer Schwalbenschwanzführung leicht bewegen lassen. Auf diesen Schlitten ist befestigt:

1. ein einfacher, vertikal stehender Drahtring, dessen Zuleitungsdrähte dicht nebeneinander horizontal umgebogen sind;

2. ein Magnetstab, der so auf seinem Schlitten befestigt ist, dass seine Achse horizontal und in der Höhe der Ringmitte, der Schiene parallel, verläuft; seine Pole sind durch Farbenanstrich bezeichnet;

3. eine Spirale I aus dickem Drahte.

4. eine Spirale II aus vielen Windungen eines dünnen Drahtes;

Zu dem Apparate gehören ferner noch ein Eisen- und ein Messingkern mit Griff, welche in das Innere der Spiralen geschoben werden können, sowie ein Blätterkern, welcher aus aufeinander geschichteten Eisenblechen mit Papierzwischenlagen besteht, die durch umgewickeltes Isolierband zusammengehalten werden, und der so abgedreht ist, dass er ebenfalls in die Spiralen geschoben werden kann.

218. Elektroinduktion. — Die bisherigen Verfahren, Induktionsströme zu erzeugen, würden der im vorigen Paragraphen erwähnten Begriffsbestimmung gemäss in das Gebiet der Magnetoinduktion fallen. Wir könnten sämtliche Versuche mit elektromagnetischen Kraftfeldern wiederholen, indem wir die kräftigeren Kraftlinienbündel dieser durch Leiterteile, Gleitstücke oder Spulen schneiden lassen. Dann hätten wir Fälle der Elektroinduktion. Abgesehen von der der vermehrten Stärke der Kraftfelder (§ 185) entsprechenden Steigerung der Wirkung würden diese Versuche nichts neues ergeben. Wir begnügen uns daher, einige für die Elektroinduktion typische Formen hervorzuheben.

Versuch 78. Vor der mit dem (Projektions-)Galvanometer verbundenen Spule II eines langen dünnen Drahtes wird in dem oben erwähnten Gestelle § 217 die verschiebbare dickdrahtige Spule I aufgestellt und unter Zwischenschaltung eines Ampèremeters, etwa des Kohlrauschschen (§ 182), eines Kommutators und eines Ausschalters an eine Stromquelle angeschlossen. Die Spule I wird vom Gestell entfernt, der Strom in ihr geschlossen, die Ampèrezahl und ihre Polarität bestimmt; nähert man die stromdurchflossene Spule I mit ihrem Kraftlinienbündel (vergl. Fig. 71) der stromlosen Spule II, so wird in II während der Dauer der relativen Bewegung ein Strom erzeugt. Ruhen beide Spulen nebeneinander, so wird kein Strom, entfernt man Spule I wieder, so wird ein Strom im umgekehrten Sinne induziert. Die Versuche entsprechen ganz genau den Versuchen 76 und 77, die Richtung der Induktionsströme ergiebt sich mit Hilfe der Maxwellschen Regel aus der Stromrichtung und damit der Polarität der Spule I.

Man nennt die stromführende Spule I die „induzierende, primäre

oder Hauptspule"; die Spule II, in welcher die Induktionsströme geweckt werden, die „induzierte, sekundäre oder Nebenspule".

Versuch 79. Der Strom in Spule I wird unterbrochen; stromlos wird sie neben Spule II gestellt. Schliesst man den Strom in der primären Spule I, so entwickelt sich in dem Aussenraum derselben ein Kraftlinienbündel, welches sehr bald die Form Fig. 71 im Längsschnitt angenommen hat. Hierbei müssen die Linien notwendig die Windungen der sekundären Spirale II schneiden und damit einen Induktionsstrom erzeugen, den das Galvanometer auch in der That anzeigt.

Öffnet man in I den Strom, so verschwinden die Kraftlinien, die vorher im Inneren der Spule zusammengeschnürt waren; die Windungen von II werden dabei im umgekehrten Sinne von allen vorher umschlossenen Kraftlinien wieder geschnitten: Induktionsstrom im entgegengesetzten Sinne.

Das Schliessen des Stromes in I entspricht dem Heranführen der stromdurchflossenen Spule des Versuches 78 aus grosser Ferne; das Öffnen, das Entrücken des gesamten Primär-Spulenkraftfeldes in solche Ferne, dass die Sekundärspirale ganz ausserhalb desselben zu liegen kommt (§ 11).

Versuch 80. Der Strom in I wird verstärkt und geschwächt (etwa durch Abnehmen und Anlegen eines Nebenschlusses an die Leitung, durch den sich ein Teil des von der Quelle gelieferten Stromes ausgleichen kann, ehe er in die Spule I eintritt). Bei jeder Änderung der Intensität i des Stromes und damit eines Herein- oder Heraustretens eines Teiles der Kraftlinien durch die Windungen von II wird ein Strom induziert.

Ein Schwächen ist einem stückweisen Entfernen in abgelegenere Teile des Feldes, ein Verstärken des Primärstromes einem Eintauchen der sekundären Spirale in die kraftliniendichteren Teile des primären Feldes äquivalent.

219. Das Grundgesetz über Elektroinduktion. — Wir wollen für die Erscheinungen der Elektroinduktion eine Regel ableiten, welche man meist an die Spitze der ganzen Lehre von der Induktion stellt und durch die im vorigen Paragraphen angestellten Versuche näher begründet. Hier soll dieselbe aus dem Kraftlinienverlaufe direkt erschlossen werden.

Eine Spirale I stehe vor einer anderen II oder sei in dieselbe hineingesteckt oder von ihr umgeben; man erregt in I einen Strom von solcher Richtung, dass man im Kraftliniensinne gegen die beiden konachsial zu einander aufgestellten Spulen blickt, d. h. dass sich auf der vorderen Seite von I ein Südpol, auf der anderen, abgewandten ein Nordpol entwickelt. Dazu muss nach § 151 der Strom für den Beschauer die Spirale I uhrzeigermässig umkreisen. In der Nachbarspirale II wird bei der Erregung des Stromes in I durch die eintretende

Vermehrung der Kraftlinien ein inverser Strom erzeugt, § 213, der dem in I zirkulierenden direkten also gerade entgegengesetzt gerichtet ist. Beim Öffnen des Stromes sinkt die Zahl der durch II gegangenen Kraftlinien auf Null zurück; der Verminderung entspricht ein direkter, d. h. ein dem eben verschwindenden Strome in I gleichgerichteter Strom.

Wir finden also:

Beim Entstehen (Schliessen, Nähern, Verstärken) eines Stromes in einem Leiterkreise wird in jedem benachbarten geschlossenen Kreise ein entgegengesetzt gerichteter, beim Vergehen (Öffnen, Entfernen, Schwächen) ein gleichgerichteter Strom induziert („Schliessungs- und Öffnungs-Induktionsströme").

Diese wichtige Regel ist für uns nicht der Ausdruck einer neuen Erfahrungsthatsache, sondern eine logische, notwendige Folge unserer bisherigen Ergebnisse, in letzter Instanz also der Rechten-Handregel. Wir haben nicht, wie es gewöhnlich geschieht, den Versuch mit den ineinander steckenden Induktionsrollen an die Spitze unserer Betrachtungen gestellt, sondern den weit einfacheren Versuch 71, bei dem die in die Erscheinung eingehenden Begriffselemente viel klarer zu Tage treten.

Auch hier tritt die Lenzsche Regel in ihr Recht. Elektromagnetisch ziehen gleichgerichtete nebeneinander verlaufende Ströme sich an, entgegengesetzt gerichtete stossen sich ab. Die bei Annäherung (oder Entstehen oder Verstärken) induzierten Ströme verlaufen so, dass sie durch ihre elektrodynamische Rückwirkung der sie erzeugenden Bewegung entgegenwirken; gleiches gilt für die durch Entfernen (oder Öffnen oder Schwächen) hervorgerufenen gleichgerichteten Induktionsströme.

220. Beteiligung des Zwischenmittels. — Durch weiches Eisen werden Kraftlinien in einem Felde vermöge der hohen Permeabilität dieses Materiales gesammelt § 101. Ersetzen wir daher einen Teil der Luft in der Umgebung der induzierten Spirale durch Eisen, so werden mehr Kraftlinien in das Innere derselben hineingezogen, also sowohl die Schliessungs- wie die Öffnungsinduktionsströme erheblich verstärkt.

Versuch 81. Man wiederholt die Versuche über Magnetoinduktion des § 215 und 216, indem man in das Innere der mit dem Galvanometer verbundenen Induktionsspule den in § 217 am Ende erwähnten Eisenkern einschiebt. Die Ausschläge sind so gross, dass man in den meisten Fällen das stromanzeigende Instrument erheblich unempfindlicher machen muss (z. B. durch Aufhebung der Astasierung), um dieselbe Skala wie früher benutzen zu können.

Versuch 82. Man befestigt die Spule und den Stabmagneten auf dem Gestelle § 217 in bestimmten Stellungen; schiebt man den Eisenkern in die Spule, so erhält man einen der Vermehrung der Kraftlinienzahl entsprechenden Ausschlag, beim Herausnehmen einen, welcher der Verminderung derselben entspricht. Eine mit Eisenkern versehene Spule bietet ein Mittel zum Ausmessen eines magnetischen Kraftfeldes durch die am Galvanometer zu messenden Stärken von Induktionsströmen. Dreht man eine Spirale, deren Achse man an irgend einer Stelle des Feldes in die Kraftlinienrichtung gebracht hat, rasch in eine dazu senkrechte Lage,

so geht bei dieser Drehung der gesamte vorher umschlossene Kraftfluss aus ihr heraus. Der entsprechende Induktionsstoss giebt ein Maass für die Anzahl der an dieser Stelle vorhandenen Kraftlinien (die durch das Eisen der Spule auf das ca. 800fache verdichtet erscheint).

Bei FARADAY spielt die Durchforschung elektromagnetischer Kraftfelder mit Hilfe solcher Probespulen (exploring coils) eine grosse Rolle; dieselben entsprechen den exploring needles § 29. Letztere gewähren nur eine Angabe über die Richtung der vektoriellen Feldzustände, die coils orientieren uns ausserdem auch über die Intensität derselben.

Versuch 83. Die Spule wird mit einem Eisenkern versehen. Von der Seite her führt man den Pol eines kräftigen Magneten, Magnetmagazins oder Elektromagneten in Stabform vorbei; der Kern nimmt beim Herannahen des Poles Kraftlinien auf: ein der Steigerung der Kraftlinienzahl entsprechender inverser Strom wird induziert, so lange bis der Pol vor der Mitte des Spulenkernes steht. Beim Weiterbewegen im gleichen Sinne wird durch die wachsende Entfernung des Poles die Kraftlinienzahl vermindert und ein direkter Strom induziert.

In dieser Weise kann man bei jedem Vorüberführen eines präformierten Poles vor einer Induktionsspule einen Strom in dieser erzeugen, welcher seine Richtung in dem Momente wechselt, in dem der Pol der Spule gerade gegenüber steht, also einen „Wechselstrom". Auf diesem Prinzipe beruhen viele neuere Konstruktionstypen grosser, namentlich „mehrpoliger" Wechselstrommaschinen, siehe weiter unten im 15. Kapitel.

Versuch 84. Der Stabmagnet wird dicht an die mit Eisenkern versehene Spule herangeschoben. Wenn das Galvanometer zur Ruhe gekommen ist, wird dem anderen Ende des Eisenkernes eine dicke Eisenplatte genähert. Dadurch, dass auch hier der magnetische Widerstand des Feldmediums herabgesetzt wird, nimmt der Induktionsfluss (§§ 108 und 115) zu; ein inverser Strom wird induziert. Beim Entfernen der Platte entsteht ein direkter Induktionsstrom.

Derartige Induktionswirkungen werden beim Telephon verwendet. Bei diesem liegt vor den Polen eines Stab- oder kleinen Hufeisenmagneten ein (zerteilter) Eisenkern, welcher die Spule trägt. Vor dem Kerne vibriert eine dünne Eisenplatte in dem Rhythmus, in dem die Schallschwingungen der Luft, die an sie anschlagen, von der Stimme erregt worden sind. Dadurch werden Induktionsströme erzeugt, welche in die Spulen eines analogen Apparates auf der anderen Station eintretend, die hier permanent durch den Kern hindurchgehende Kraftlinienzahl vermehren oder vermindern und dadurch die vor diesem stehende Platte in gleichem Rhythmus vibrieren lassen und die Luft erregen; so wird dem Ohre ein Laut, ja sogar die Klangfarbe (also auch Oberschwingungen) vermittelt.

Versuch 85 a. Auch die Versuche des § 218 über Elektroinduktion ergeben erheblich grössere Galvanometerausschläge, wenn man in dem Felde der Primärspule mehr Kraftlinien zur Ausbildung bringt, indem man einen Eisenkern in diese einführt, oder in der Sekundärspirale mehr Kraftlinien sammelt, indem man auch in diese einen Eisenkern schiebt. Umschliessen sich die Spulen, so erreicht man beides gleichzeitig durch ein und denselben Kern, den man in den gemeinsamen Innenraum einführt.

Versuch 85 b. Bringt man in das Innere der Sekundärspirale II den in § 217 am Ende erwähnten Messingkern, so vermindert sich die Induktionswirkung der primären Spirale I: Es wird immer in II und in dem metallischen Kerne gleichzeitig ein Strom induziert; der letztere ruft beim Entstehen in II seinerseits einen entgegengesetzten Strom hervor und schwächt dadurch den durch I direkt induzierten. Dasselbe findet bei dem massiven Eisenkern statt. Die günstige Wirkung der grösseren Permeabilität wird also durch die im Eisen selbst hervorgerufene Induktion beeinträchtigt. Man zerteilt darum den Eisenkern in einzelne voneinander isolierte Blätter oder Stäbe, so dass die Bildung geschlossener Induktionsströme in ihm unmöglich wird, ohne dass sein magnetischer Widerstand sich erheblich vermehrt.

Versuch 85 c. Wiederholt man die Induktionsversuche mit dem in § 217 am Ende erwähnten Blätterkern, so erhält man die stärkste Wirkung.

Solche aufgeteilte Eisenkerne verwendet man namentlich dann, wenn man mit Induktionswirkungen von rasch in ihrer Intensität wechselnden Primärströmen zu thun hat, bei denen die das sekundäre Stromphänomen beeinflussenden Induktionsströme im Eisen selbst (die sog. „Wirbel- oder FOUCAULTströme", vergl. auch § 209) sehr störend sein würden.

221. Elektrische Induktion durch Variation der magnetischen Induktion. — Wenn sich im Inneren eines stark paramagnetischen Mediums magnetische Molekülketten ausbilden oder solche zerfallen, wenn also die „magnetische Induktion" (§ 106) variiert, so wird in einem umgebenden Leiter ein galvanischer Strom induziert.

Der Gleichklang der Bezeichnungen für die beiden so wesentlich verschiedenen Begriffe der magnetischen Induktion im Sinne des § 106 und der Induktion eines elektrischen Stromes ist sehr störend an der eingebürgerten Nomenklatur; durch das hier zu besprechende Phänomen wird zwischen beiden wenigstens insofern ein Zusammenhang hergestellt, als zeitliche Änderungen der magnetischen Induktion eine elektrische Induktion zur Folge haben.

Wir wollen diesen Einfluss einer Variation des Induktionsflusses (§ 108) an einer einfachen Anordnung erläutern, welche FARADAY zuerst kräftige magnetinduktorische Wirkungen lieferte.

Versuch 86. Um ein cylindrisches, an den Enden abgeflachtes Stück weichen Eisens, das als Anker vor einem kräftigen Hufeisenmagnetmagazin liegend, die Magnetschenkel vollkommen überbrückt, werden einige Windungen eines übersponnenen dicken Kupferdrahtes gewunden, dessen Enden an das weit entfernte Galvanometer angeschlossen werden. Wird das Eisenstück an den Magneten gelegt, oder

von ihm abgerissen, so erfolgt in der Leitung jedesmal ein kräftiger Stromstoss.

Der Versuch 10 zeigte, wie beim „Ankerschluss", fast alle Kraftlinien ihren Weg durch das vorgelegte Eisenstück nehmen; aus § 115 ergiebt sich, dass die Gesamtzahl der innerhalb der Drahtspirale ausgebildeten Kraftröhren sich erheblich vermehrt, wenn durch das Anlegen des Eisens der magnetische Widerstand (§ 114) in dem aus Hufeisenmagnet und Anker gebildeten magnetischen Kreise (§ 112) vermindert wird. Dadurch wird ein inverser Strom induziert. Beim „Zerreissen des Kraftlinienstranges", d. h. beim Entfernen des Eisens und dem Dazwischentreten von Luftstrecken in den Kraftröhrenkreis wird umgekehrt ein direkter Induktionsstrom erzeugt.

Versuch 86 a. Statt eine Anzahl von Windungen kann man auch nur eine einzige Leiterschleife um das von Kraftlinien durchströmte Eisenstück legen, nur ist dann die Wirkung entsprechend geringer, aber mit einem einigermaassen empfindlichen Galvanometer noch immer deutlich nachweisbar.

Auf die grosse theoretische Bedeutung des Versuches in dieser einfachsten Form werden wir weiter unten zurückkommen.

222. Induktionswirkungen durch das erdmagnetische Kraftfeld. – Die Kraftlinien des Erdfeldes verlaufen sehr wenig dicht § 77 im Vergleich zu denen der bisher angewendeten künstlichen Felder. Gleichwohl können auch diese Linien, wenn sie Leiter schneiden, merkliche Induktionsströme erzeugen. Diese haben für quantitative Bestimmungen, Festlegung und Kontrolle von Einheiten u. s. w. namentlich deshalb eine besondere Bedeutung, weil das Erdfeld (wenn Störungen fern gehalten werden) innerhalb der Versuchsräume vollkommen homogen ist und durch absolute Methoden sehr genau ausgemessen werden kann § 77.

Einige einfache, schon von FARADAY angegebene Versuche sollen zunächst zeigen, dass das erdmagnetische Feld wirklich Induktionsströme hervorzurufen vermag.

Versuch 87. Eine lange auf ein dickwandiges Glasrohr gewickelte einlagige Spirale wird mit ihrer Achse in der Richtung der Inklinationsnadel § 44 und damit der erdmagnetischen Kraftlinien befestigt. Das Modell Fig. 19 § 40 wird zum Vergleich herangezogen; die Spiralenenden sind an das Galvanometer angeschlossen. Wird in dem Inneren der Glasröhre ein Stab weichen Eisens rasch herein- oder herausgeschoben, so erfolgt ein deutlicher Induktionsstoss. Die durch das Eisen verdichteten Kraftlinien, die nach dem Stabende zu stark konvergieren, schneiden beim Einschieben oder Herausziehen die einzelnen Spiralenwindungen.

Wird die Röhre senkrecht zur Inklinationsnadel gestellt, so findet bei derselben Manipulation kein Ausschlag statt. (Das Galvanometer muss weit entfernt sein, damit eine Bewegung des Eisenstabes ausserhalb der Spirale keinen Einfluss auf dasselbe ausübt.) Die Kraftlinien gehen (bei uns) von oben her in den Eisenstab hinein und treten an seiner unteren Hälfte wieder aus; wird der Stab gegen die Spiralenwindungen bewegt, so werden in den beiden entgegengesetzten Hälften jeder Windung gleich starke, aber entgegengesetzt gerichtete Ströme induziert.

Versuch 88. Liegt das Eisen in der Spirale und dreht man sie aus einer den Kraftlinien parallelen Lage auf irgend einem Wege rasch in die um 180° davon verschiedene, umgekehrte Parallellage, so erhält man immer einen Ausschlag am Galvanometer. Kraftlinien gehen aus der Spirale auf der einen Seite heraus und auf der entgegengesetzten wieder hinein.

Zu quantitativen Bestimmungen besonders geeignet ist W. Webers Erdinduktor. Eine auf einen Holzrahmen gewickelte grössere Drahtspule ist mit diametral gegenüberstehenden Zapfen in zwei Trägern so gelagert, dass sie leicht um 180° gedreht werden kann; durch Anschläge wird dafür gesorgt, dass die Drehung nicht grösser oder kleiner ausfällt. Steht die Drehungsachse horizontal und die Spulenebene senkrecht zu den erdmagnetischen Kraftlinien, und dreht man aus dieser Stellung die Spule rasch um 180° herum, so wird ein Induktionsstrom induziert.

Während der ersten Hälfte der Drehung gehen sämtliche von der Spule umfassten Kraftlinien heraus: es wird (bei uns von oben gesehen) ein direkter Strom induziert; während der zweiten Hälfte gehen ebenso viele Linien wieder in das Spuleninnere hinein: es wird ein inverser Strom erzeugt. Da wir dann aber auf die andere Seite der Spule blicken, so geht dieser zweite Strom in der Spule in derselben Richtung wie der erste; beide Ströme werden an den Zapfen, mit denen die Drahtenden leitend verbunden sind, durch Schleiffedern abgenommen. Erfolgte die Drehung bei vertikal gestellter Achse aus einer zum magnetischen Meridian senkrechten Stellung der Spule, so wirkt nur die Horizontalkomponente des Erdmagnetismus, bei Drehung aus der Horizontallage bei horizontaler Achsenstellung nur die Vertikalkomponente. Durch Messung dieser beiden Komponenten kann man den Inklinationswinkel bestimmen ($\operatorname{tg} i = \mathfrak{H}$ vert. / $\mathfrak{H}$ hor.).

223. Erzeugung von dauernden galvanischen Strömen durch Bewegung von Leitern in Magnetkraftfeldern; Faradays Induktionsscheibe. — Bei allen bisherigen Versuchen war der Vorgang des Kraftlinienschneidens ein nur kurze Zeit andauernder; dementsprechend wurden auch nur einzelne Stromstösse erhalten. Schon Faraday erfand indes eine einfache Anordnung, mit deren Hilfe es möglich wurde, Ströme von beliebiger Dauer durch Induktion zu erregen. Zu diesem Zwecke müssen nur immer neue und neue Leiterteile in ununterbrochener Folge mit einem besonders kräftigen Bündel von Kraftlinien zum Schnitt gebracht werden.

Versuch 89. Die innen eben abgeflachten Polschuhe N und S, Fig. 96, werden auf dem Hufeisenmagnetmagazin $H\,H$ so weit gegeneinander vorgeschoben, dass nur ein ca. 1 cm breiter Zwischenraum zwischen ihnen bleibt. Durch diesen hindurch wird ein ca. $^1/_2$ m langer, 5 cm breiter, $^1/_2$ cm dicker Kupferblechstreifen mit geradlinigen, gut geglätteten und amalgamierten Rändern in einer einfachen Führung der Länge nach hindurchgezogen. Am oberen und unteren Rande schleifen Gleitfedern, welche in den zwischen den Polschuhen liegenden homogenen Teil des Feldes hineinragen und die mit dem Galvanometer in Verbindung stehen. Letzteres zeigt, so lange wie die Bewegung dauert, einen Strom an; mit der Umkehr der Bewegungsrichtung ist die der Stromrichtung verbunden. In jedem zwischen den Gleitfedern befindlichen vertikalen Teile des Kupferstreifens wird ein Strom der

Rechten-Handregel entsprechend induziert. Da die die Gleitfedern verlassenden Teile fortwährend durch nachrückende neue ersetzt werden, so wird die Stromerregung zu einer kontinuierlichen.

Ist die ganze Streifenlänge vorübergezogen, so endet auch das Stromphänomen. Dasselbe kann aber noch andauernder und die ganze Anordnung zugleich wirksamer und bequemer gemacht werden, wenn man anstatt des Kupferstreifens eine ebene Kreisscheibe verwendet, an deren Mitte und deren Rande je eine Gleitfeder schleift. So lange man dieselbe zwischen den Magnetpolen in gleichförmiger Bewegung erhält, wird in ihr ein kontinuierlicher Strom erzeugt.

Versuch 90. Auf einem Brette, welches auf das Gestell $B_2 B_2$, Fig. 96, gesetzt werden kann, sind zwei messingene Träger befestigt, auf denen eine Metallachse ruht, die in der Mitte eine Kupferscheibe trägt und am einen Ende mit einer Kurbel (Antriebspunkt vergl. § 136) versehen ist; an einem der Träger ist eine Klemmschraube angebracht. In der Mitte des Brettes steht ein länglicher Holzklotz, in den eine mit Quecksilber gefüllte Rinne eingetieft ist, in die der amalgamierte Rand der Scheibe taucht; das Quecksilber steht mit einer zweiten Klemmschraube (oberhalb des Brettes!) in leitender Verbindung. Wird die untere Hälfte der Scheibe zwischen die eng aneinander gerückten flachen Polschuhe NS Fig. 96 gestellt, und sind die Klemmschrauben an das Galvanometer angeschlossen, so erhält man einen dauernden Ausschlag, so lange man die Scheibe dreht.

Diese Anordnung stellt das genaue Spiegelbild des in Versuch 65 § 192 benutzten Barlowschen Rades dar. Wurde dort durch einen andauernden Radiärstrom die Kupferscheibe in einem Kraftfelde der Linken-Handregel entsprechend in kontinuierliche Umdrehung versetzt, so wird hier durch Drehen der Scheibe im Felde ein kontinuierlicher Radiärstrom der Rechten-Handregel entsprechend induziert. Wir leiten durch die mechanische Kraft unserer Hand die Cykelbewegungen der Scheibe ein § 136; durch die Rückwirkung des Kraftfeldes wird dadurch der monocyklische „verborgene" Mechanismus des Stromphänomens § 171 in Bewegung versetzt und ein dauerndes Hervorquellen von konachsialen Kraftlinienringen aus unserer einfachen „magnetelektrischen Maschine" bewirkt.

Diese Umkehrbarkeit aller in § 190—192 beschriebenen elektromagnetischen Rotationsapparate und Elektromotoren in Induktionsmaschinen ist eine sehr wichtige Konsequenz des Lenzschen Gesetzes. Wurde dort durch elektrische Ströme in den ruhenden Magnetfeldern mechanische Arbeit erzeugt, so wird hier beim Drehen dieser Apparate durch mechanische Arbeit galvanischer Strom entwickelt.

224. Unipolare Induktion. — In § 190 sahen wir, wie Stromträger, welche zur Achse eines Magneten symmetrisch um einen Pol angeordnet sind, unter der Wechselwirkung von Strom und Magneten der Linken-Handregel entsprechend in Rotation geraten.

Wenn man bei einer der dort beschriebenen Anordnungen den zunächst stromlosen Leiter in dem Magnetfelde dreht, wird nach § 223 in ihm ein Induktionsstrom geweckt. Umgekehrt muss wegen der bestehenden Wechselwirkung derselbe Strom erzeugt werden, wenn man den Leiter festhält, dafür aber den Magneten um seine Achse im ent-

gegengesetzten Sinne dreht. Man nennt diese Erscheinung nicht ganz zutreffend: „unipolare Induktion"; „achsiale Induktion" oder „Rotationsinduktion" würde besser sein.

Wir erläutern die typischen hierher gehörigen Fälle mit Hilfe der folgenden einfachen Anordnung:

Ein cylindrischer stark magnetisierter Magnetstab NS, Fig. 100, trägt drei Messinghülsen h_1, h_2, h_3. In der ersten h_1 am einen Ende des Stabes ist eine Vertiefung ausgedreht, in welche eine Stahlspitze ragt. Die zweite h_2, auf der Stabmitte, bildet einen einfachen glatten Ring, die dritte h_3 trägt die beiden senkrecht zur Achse stehenden Messingscheiben s_1 und s_2, sowie die Rolle r. In dem äussersten Ende von h_3 ist ebenfalls eine Vertiefung als Lager für eine zweite Stahlspitze angebracht. Zwischen den beiden an einem Gestell befestigten Spitzen

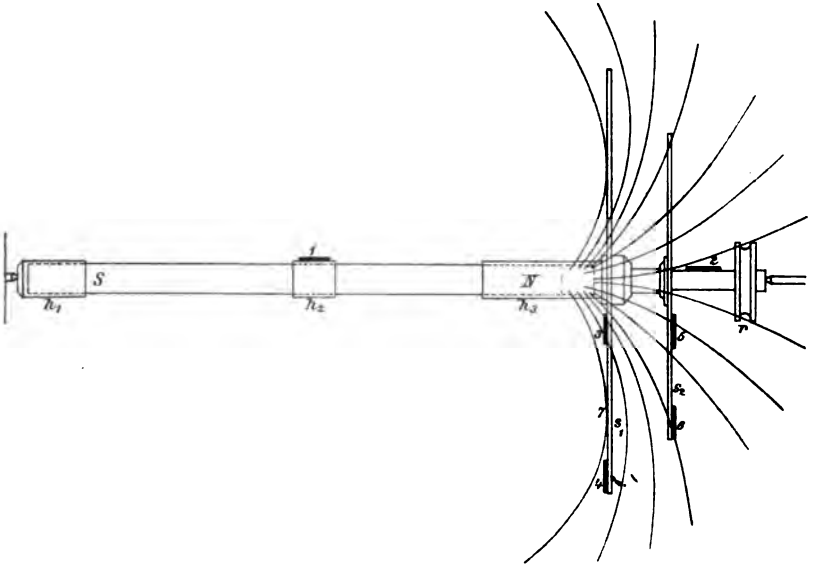


Fig. 100.

kann der Magnetstab durch eine über die Rolle r gezogene Schnur von einer grossen Antriebsscheibe aus in sehr rasche Rotation versetzt werden. An den Stellen 1—6 schleifen Messingfedern,[1]) welche einen Induktionsstrom von der an der Indifferenzzone des Magnetstabes befindlichen Hülse h_2, oder der der Achse sehr nahen Stelle 2 der Hülse h_3, oder von einer mehr zentralen oder mehr peripherisch gelegenen Stelle der Scheiben s_1 oder s_2 abnehmen.

[1]) Man nimmt Messing, wenn die anderen Teile ausser dem Magnetstabe aus Messing bestehen. Jedenfalls müssen die Federn und die Teile, auf denen sie schleifen, aus gleichem Materiale gefertigt sein, was nicht immer bei dem im Handel befindlichen ähnlichen Apparaten der Fall ist. Man erhält sonst erhebliche Störungen (Thermoströme).

Die Federn sind, bis auf die bei 3 und 4, fest mit dem Gestell verbunden, so dass ihre Enden feststehende Punkte bilden, an denen Ströme aus dem System bei dem Rotieren des Magneten abgenommen werden können, welche bei dem Schneiden der nicht mitbeweglichen Teile der Leitung durch die vom Magneten mit herum genommenen Kraftlinien induziert werden. Die Enden der Federn 3 und 4 können auch nach der Mitte der Scheibe s_1, also nach Punkt 7 verschoben werden.

Wenn wir irgend zwei Federn, z. B. 4 und 5 durch einen geschlossenen, ein Galvanometer enthaltenden Leiterkreis miteinander verbinden, so ist bei einer Drehung des Magnetstabes und damit seines allseitig symmetrischen Kraftliniensystems um seine Achse die die Leiterbahn schneidende Kraftlinienzahl genau ebenso gross, wie die zwischen den Gleitpunkten 4 und 5 hindurchgehende. Dieselbe bildet ein Maass für die bei der Drehung des Magneten hervorgerufene Induktionswirkung.

Versuch 91. Man verbindet a) die Stellen 1 und 2 mit einem empfindlichen Galvanometer; selbst bei raschem Drehen erhält man keinen merklichen Ausschlag. Die Strecke 1—2 wird fast von keiner Kraftlinie geschnitten, da beide Punkte sehr nahe auf derselben (achsialen) Linie liegen.

b) Verbindet man irgend zwei andere Gleitpunkte, ausser 3 und 4 gleichzeitig, so erhält man beim Drehen immer deutliche Ausschläge, um so grössere, je mehr Kraftlinien zwischen denselben hindurchgehen.[1])

c) Leitet man Punkt 3 und 7 ab, so erhält man den umgekehrten Ausschlag, als wenn man 7 und 4 ableitet, da derselbe von N kommende Kraftfluss die letztere Strecke im umgekehrten Sinne wie die Strecke 3—7 durchsetzt. Bringt man die Ableitungen an die auf derselben Kraftlinie liegenden Punkte 3 und 4, so heben sich daher die beiden Wirkungen auf, man erhält wie bei a) keinen Ausschlag. Dies lässt besonders augenfällig hervortreten, wie das Richtungselement der Ursachen in das der Wirkungen eingeht (vergl. § 208).

[1]) Um sich zu vergewissern, dass die beobachteten Ströme wirklich durch Induktion geweckt werden und nicht auf die in der vorigen Anmerkung angedeuteten Störungen zurückzuführen sind, kehrt man den Sinn der Rotation um. Da dann die Kraftlinien in umgekehrter Richtung die Leiterbahn durchschneiden, so muss bei gleicher Drehgeschwindigkeit ein entgegengesetzt gleicher Ausschlag erhalten werden; jene Störungen (thermoelektrischen Ursprungs) kehren sich nicht mit um.

14. Kapitel.

Energetik des Induktionsvorganges.

Im vorigen Kapitel wurden die typischen Fälle der Magneto- und Elektroinduktion behandelt, aber lediglich nach ihrer qualitativen Seite. Wir sahen, dass der Kraftlinienbegriff jedesmal die einfachste, übersichtlichste und vollständigste Beschreibung des Vorganges ermöglicht. Nun soll gezeigt werden, dass dies auch bezüglich der quantitativen Beziehungen der Fall ist. Wie sich bei der Beschreibung, Ausmessung und Abbildung der magnetischen und elektromagnetischen Kraftfelder die Kraftlinienzahl als allein maassgebender quantitativer Begriff hervorhob, so ist es auch hier eine bestimmte Kraftlinienzahl z, welche alle quantitativen Einzelgesetze beherrscht; dieselbe tritt in Verbindung mit dem Zeitbegriff auf („Zahl der Kraftlinien, welche senkrecht in der Zeiteinheit geschnitten werden"). Diesen Begriff können wir ganz unabhängig von jedem specielleren mechanischen Bilde, insbesondere dem des Strömens eines gewissen „Etwas" durch die Leiterbahn einführen, definieren und verwenden, und daher so wie überall in unserem Darstellungssysteme auch hier den Kraftlinienbegriff konsequent an die Spitze aller Betrachtungen stellen. Jene für uns wichtige Zahl z führt sich nun vollkommen ungezwungen ein, wenn wir die zur Hervorrufung eines Induktionsstromes aufzuwendende Energie betrachten. Nach diesem Ausgangspunkte, der zur Ableitung der Induktionsformeln gewählt wurde, ist das vorliegende Kapitel eine „Energetik" unseres Erscheinungsgebietes genannt worden. Die Grösse der Energieverwandlung ist zugleich die allgemeinste quantitative Aussage, die wir zur Zeit von jedem Naturvorgange, also auch von dem hier betrachteten, machen können.

War das vorige Kapitel ausschliesslich den experimentellen Grundlagen gewidmet, so ist der Charakter des vorliegenden ein mehr theoretischer.

225. Prinzip der elektrischen Induktionsmaschine. — Jedes System, in dem ein Umsatz einer Energieform in eine andere herbei-

geführt wird, kann man allgemein eine Maschine nennen. Wir wollen eine solche besprechen, bei der mechanische Arbeit in elektromagnetische Feldenergie verwandelt wird und greifen zu diesem Zwecke auf das Modell Figg. 96 und 97 und den Versuch 74 § 211 zurück.

Wird der Bügel B durch ein in die rechte Wagschale W_1 gelegtes beliebiges Gewicht zum Sinken gebracht, so vermindert sich seine, sowie des Gewichtes durch Höhe mal Schwere gemessene Distanzenergie (potentielle Energie) zunächst langsam, dann immer schneller.

Allerdings nicht mit der vollen Geschwindigkeitszunahme eines frei fallenden Körpers, da abgesehen von den zu überwindenden Reibungswiderständen das Übergewicht ähnlich wie bei der Atwoodschen Fallmaschine noch eine Reihe anderer gegeneinander ausbalancierter Massen mit zu bewegen hat. Ferner wird der Auftrieb, den die in das Quecksilber eintauchenden Bügelenden erfahren, in dem Maasse grösser, als der Bügel herabsinkt, so dass auch hierdurch die Bewegung wieder verzögert wird.

Wäre das Magnetfeld nicht vorhanden, so würde, von der Wärmeentwickelung durch Reibung abgesehen, lediglich ein Umsatz von Distanz- in kinetische Energie stattfinden; die Geschwindigkeit wäre allein durch den jeweiligen Verlust an Distanzenergie bestimmt.

Von dem Einflusse des schwachen erdmagnetischen Feldes können wir hierbei absehen.

Da sich aber der Bügel B nicht durch einen Raum von gewöhnlicher Beschaffenheit, sondern durch ein Magnetkraftfeld bewegt, so tritt eine neue Erscheinung, ein Induktionsstrom, auf, der seine Energie nur dem Systeme selbst entnehmen kann.

Dies geschieht in folgender Weise: Zu einer Zeit t sei die Intensität des geweckten Induktionsstromes bis auf i Einheiten gestiegen. Dem Lenzschen Gesetze § 209 zufolge stemmt sich dieser Strom gegen die erzeugende Bewegung. In dem genannten Augenblicke ist die Kraft, welche er der Weiterbewegung des Bügels B entgegenstellt nach § 194 (vergl. auch § 211)

$$p = i \mathfrak{H} l \text{ Dyne.}$$

Diese Kraft wird von dem Übergewichte in W_1 zwar überwunden, aber der Bügel B fällt entsprechend langsamer. Das fallende Gewicht leistet eine Arbeit gegen die ponderomotorische Kraft des erzeugten Induktionsstromes. Ein Teil der anfänglich als Distanzenergie in dem Systeme vorhandenen Energiemenge wird durch die Leiteranordnung im Felde bei geschlossener Strombahn in diese abgeleitet. Diese an die Kraftachse bei B übertretende Energie können wir (zum Teil wenigstens) an irgend einer beliebigen Stelle derselben wieder in mechanische Arbeit umsetzen, indem wir daselbst etwa einen Elektromotor (§ 191) einschalten (ein anderer Teil geht, wie wir später zeigen werden, in

Wärme über). Wir haben also den entstehenden Induktionsstrom als das Äquivalent der an unserem Systeme verbrauchten mechanischen Arbeit anzusehen. Die Stromstärke i können wir wenigstens während der unendlich kurzen Zeit dt als konstant betrachten, da sie bei dem Bewegungsprozess stetig von 0 bis zu einem gewissen Werte anwachsen und dann wieder zu 0 abnehmen wird. Bewegt sich der Bügel in dieser Zeit um die kleine Strecke ds nach abwärts, so ist die an den Stromträger abgegebene mechanische Arbeit gleich

$$dA = p \cdot ds = i \mathfrak{H} l \cdot ds = i \mathfrak{H} l \cdot \frac{ds}{dt} \cdot dt.$$

Der Quotient ds/dt ist aber nichts anderes als die Geschwindigkeit v, mit der sich der Bügel in dem Augenblicke t bewegt. Wir finden demnach

$$dA = i \cdot \mathfrak{H} l v \cdot dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 36)$$

Bei dieser Ableitung sind wir der Grundidee Faradays gefolgt, welche ihn zu der Entdeckung der Induktionserscheinungen überhaupt führte. Er suchte nach einer Beziehung der Elektricität zu der Schwerkraft und liess, wie in § 216 Versuch 77 b erwähnt, Spiralen, welche an einen empfindlichen Multiplikator § 176 angeschlossen waren, aus grossen Höhen herabfallen. Erst durch besondere Versuche wurde er zu der Erkenntnis geführt, dass es für den beabsichtigten Umsatz nötig ist, das Fallen in einem magnetischen Kraftfelde stattfinden zu lassen. Die von ihm geahnte „Einheit aller Naturkräfte" deckt sich im wesentlichen mit dem von Robert Mayer und Helmholtz zuerst in seiner ganzen Allgemeinheit ausgesprochenem Gesetze von der Erhaltung der Energie, welches uns zu der in 36) enthaltenen Formulierung der gesuchten Beziehung verhalf.

Die Grösse $i \mathfrak{H} l v$ ist augenscheinlich die auf die Zeiteinheit bezogene in dem Gleitstück durch das Schneiden der Kraftlinien aus mechanischer Energie erhaltene Quantität der neuen Energieform, welche uns in dem Induktionsstrome entgegentritt. Sie wird an den Stellen, wo Teile der Strombahn zum Schnitt mit Magnetkraftlinien gebracht werden, produziert und teilt sich dem ganzen (geschlossenen) Stromkreise mit. Ein Teil derselben wird u. A. am Galvanometer bei der Ablenkung der Magnetnadel gegen die rücktreibenden Kräfte des Erdmagnetismus wieder verbraucht.

226. Die in der Zeiteinheit geschnittene Kraftlinienzahl. — Die in dem vorigen Paragraphen auftretende Grösse $\mathfrak{H} l v$ hat eine einfache Bedeutung. Da v der Weg des Bügels B ist, den er in einer Sekunde zurücklegen würde, wenn seine Bewegung mit derselben Geschwindigkeit, welche er während der Zeit von t bis $t + dt$ hatte, andauerte, da ferner $\mathfrak{H}$ die Anzahl der Feldkraftlinien pro Quadratcentimeter und l die Bügellänge in Centimetern ist, so ist diese Grösse $\mathfrak{H} l v$ gleich der Zahl der in der Zeiteinheit von dem Bügel gleichsinnig ge-

schnittenen Kraftlinien; wir wollen sie mit z bezeichnen, so dass wir haben

$$z = \mathfrak{H} l v \quad \ldots \ldots \ldots \quad 37)$$

Dass für die Induktionswirkung diese Zahl auch in weniger einfachen Fällen, wie dem hier betrachteten, maassgebend ist, kann durch verschiedene Gleitanordnungen demonstriert werden, wie sie namentlich von PFAUNDLER und SZYMAŃSKI in sehr instruktiven Formen angegeben worden sind. Wir wollen uns damit begnügen, eine einfache derartige Anordnung, die sich ähnlichen der genannten Forscher anschliesst, zu besprechen, welche sich als für die meisten Zwecke ausreichend erwiesen hat.

Das kräftige, aus mehreren Lamellen bestehende Hufeisenmagnetmagazin $H H$, Fig. 101, wird mit seiner Indifferenzzone in einen Ausschnitt des Holzklotzes K gesetzt und durch die von vier Trägern T getragenen, geeignet ausgeschnittenen Bretter B_1 und B_2 in vertikaler Stellung mit nach oben gekehrten Polen N und S gehalten. Auf die Pole wird ein Brett B fest aufgesetzt, welches so tiefe Ausschnitte für die Polenden enthält, dass diese bis fast zur Oberseite des Brettes hinaufragen, wie die gestrichelten Linien in der Figur andeuten. Auf $B B$ ist eine Gleitschienenanordnung aus 4 mm dickem, glatt polierten und dann versilberten Kupferdrahte befestigt. Die gebogene innere Schiene $b c$ und die äussere $a f d$ folgen genau dem Verlaufe einer inneren und einer in weiterem Bogen von N nach S hinüberziehenden äusseren Kraftlinie, wovon man sich überzeugt, indem man das Magazin $H H$ horizontal legt und sein Kraftlinienbild herstellt. Die genannten Kurvenschienen sind durch die geradlinigen Stücke $a b$, $c d$ und $e f$ miteinander verbunden; $c d$ ist ausserdem bis über B hinaus verlängert und trägt am Ende eine Klemmschraube K. Dieses Gleitschienensystem ist unmittelbar über der Vorderfläche von $H H$ auf B befestigt, ein ihm völlig gleiches befindet sich über der Rückseite (in der Figur ist nur das eine gezeichnet, das zweite wird von dem vorderen vollkommen verdeckt). Die beiden Systeme sind etwas nach vorn und rückwärts geneigt und entsprechend dem räumlichen Verlaufe der Kraftlinien (vergl. die Figg. 6 und 3) etwas aus einer Ebene herausgebogen. Dadurch bilden die Schienen die vier Kanten einer Kraftröhre von viereckigem Querschnitt, in der eine ganz bestimmte Menge Kraftlinien von dem N-Pole nach dem S-Pole hinübergeht; der Kraftfluss, d. h. die gesamte hindurchgehende Anzahl von Einzelkraftlinien ist in jedem Querschnitte dieselbe, wenn auch die Kraftlinienzahl pro Flächeneinheit und damit die Feldstärke z. B. in der Mitte, wo die Röhre sehr weit ist, viel geringer als an den den Polen unmittelbar benachbarten Enden ist §§ 81 und 82.

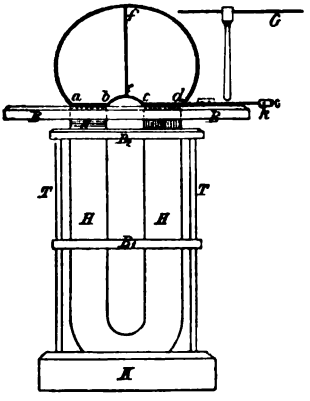


Fig. 101.

Zu dem Apparate gehört das rechts daneben gezeichnete Gleitstück G, welches aus einem geradlinigen Stücke eines ebenfalls versilberten Kupferdrahtes besteht, das an einem Hartgummigriff befestigt ist. Wenn man dieses über die

inneren Schienen $b\,e$ oder $e\,c$, oder über die äusseren $a\,f\,d$ derart hinführt, dass das eine Ende auf den vorderen, das andere auf den entsprechenden hinteren Schienen immer mit metallischem Kontakte gleitet, so bewegt sich jedes Längenelement desselben je einer Kraftlinie parallel, ein Schneiden findet also nicht statt. Wird das Stück G dagegen von b nach a, oder von e nach f oder endlich von c nach d in gleicher Weise bewegt, so werden Kraftlinien geschnitten und zwar immer gleich viele, wiewohl im zweiten Falle die von G überstrichene Fläche eine viel grössere ist.

Versuch 92. Das Gleitstück G wird auf das Schienenpaar gesetzt und a) so bewegt, dass dabei keine Kraftlinien geschnitten werden, also entweder in der Richtung des Kupferdrahtes G selbst oder in der oben angegebenen Weise von b nach e, von e nach c oder d nach f und f nach a; ein angeschlossenes, noch so empfindliches Galvanometer zeigt keinen merklichen Ausschlag: $z = 0$. b) Man gleitet von a nach b und zwar so rasch, dass der ganze Weg etwa innerhalb einer Sekunde zurückgelegt wird (das Galvanometer muss eine erheblich längere Schwingungsdauer und ein nicht zu leichtes Magnetsystem haben, d. h. ein sog. „ballistisches Galvanometer" sein), es kommt ein kräftiger Strom von der vorderen Klemme (K- oder + Klemme). Mit der Richtung der Bewegung b nach a kehrt sich auch die des Ausschlages um. Stellt man dieselben Versuche auf dem Stück $c-d$, also über dem Südpole an, so erhält man gleich grosse Ausschläge in der entgegengesetzten Richtung. Wenn man von e nach f und umgekehrt gleitet, so erhält man Ausschläge von entsprechender Richtung und derselben Grösse. Hier ist die Zahl z der Kraftlinien die gleiche, wie in den Fällen b); wiewohl sie hier über einen viel grösseren Raum verbreitet sind, als in den den Magnetschenkeln näheren Teilen des Kraftlinienbündels ($\mathfrak{H}$ kleiner, l grösser), so ist die Induktionswirkung doch dieselbe, wenn nur die gleiche Anzahl innerhalb derselben Zeit geschnitten wird.

Anmerkung. Bei den Versuchen zeigt sich, dass es gleichgiltig ist, ob man den Bügel schnell oder langsam bewegt, wenn nur überhaupt in einer zur Schwingungsdauer der Nadel kurzen Zeit das Schneiden des ganzen Bündels erfolgt. Im ersteren Falle werden in jedem Zeitteilchen mehr Kraftlinien geschnitten und stärkere einzelne Induktionsstösse erhalten; aber es erfolgen im Ganzen entsprechend weniger, da die Zahl der zur Verfügung stehenden Linien schneller erschöpft ist. Im zweiten Falle verteilt sich der ganze Prozess über eine längere Zeit, die in jedem Zeitelement erzielte Einzelwirkung ist jedoch entsprechend kleiner; in dem Ausschlag kommt aber nur die Summe aller Einzelwirkungen zur Geltung. Aus diesem Grunde erhält man auch dieselbe Wirkung, wenn man das Gleitstück ruckweise mit kurzen dazwischen geschalteten Ruhepausen statt in einem Zuge durch das Kraftlinienbündel hindurchführt, oder wenn man erst vorwärts, dann etwas rückwärts, dann weiter vorwärts u. s. f. gleitet.

Versuch 93. Auf die Schenkelenden des Hufeisenmagnetmagazins $H\,H$, Fig. 101, werden die oben abgeflachten Polschuhe Fig. 96 gesetzt und zwischen diese die rotierende Faradaysche Induktionsscheibe § 223 gestellt, welche man an ein mit nur wenigen Windungen eines dicken Leitungsdrahtes versehenes Galvanometer anschliesst. Man dreht (etwa nach dem Takte eines Metronoms) mit gleichförmiger Geschwindigkeit und erhält einen Ausschlag von bestimmter Grösse. Dreht man doppelt, dreifach so rasch, so wird der Ausschlag (sehr nahe) doppelt, dreimal so gross. Die Induktionswirkung ist durch die pro Zeiteinheit geschnittene Kraftlinienzahl z bestimmt.

Erfolgt der Schnitt mit den Kraftlinien schräg oder liegt das Gleitstück nicht senkrecht zu den Kraftlinien, so gelten ähnliche Betrachtungen wie die am Ende des § 194 angedeuteten; es kommen die entsprechenden Komponenten von l und v in Betracht.

227. Bezeichnung „Elektromotorische Kraft". — Wir können die Erscheinung der Induktion durch Angabe der drei in Betracht kommenden (Richtungs-)Grössen: der Feldstärke $\mathfrak{H}$, des geradlinigen Gleitstückes l und der Bewegung v vollkommen beschreiben, auch nach der quantitativen Seite hin, wie wir soeben gezeigt haben. Ferner ist die Energie in der Strombahn durch die beiden Grössen i und z völlig bestimmt. Die Grösse i ist schon aus dem II. Abschnitt hinreichend bekannt. Sie war die Charakteristik eines (zweifach zusammenhängenden) Magnetfeldes von bestimmter Struktur und war durch die Kraftlinienzahl dieses Feldes völlig und eindeutig definiert. Wir übernahmen die Bezeichnung „Stromstärke" aus den älteren Theorien für diese Grösse i, wiewohl das durch dieselbe geweckte Bild keinen Platz mehr innerhalb der neuen Anschauungen beanspruchen kann. Jetzt befinden wir uns der Grösse $z = \mathfrak{H} l v$ gegenüber in einer ähnlichen Lage. Diese Grösse ist in jedem Kraftfelde eindeutig bestimmt, dessen Struktur uns durch die Kraftlinien vollständig beschrieben wird. Sie ist ebenso wohl definiert, wie etwa die Zahl der Kraftlinien, welche senkrecht die Flächeneinheit durchsetzen, von der wir früher zeigten, dass sie ein Maass für die quantitativen Beziehungen in einem Magnetfelde liefert.

Durch sehr sorgfältige Versuche wurde ferner schon von FARADAY bewiesen, dass es bei der Induktion nicht im geringsten auf das Material ankommt, mit dem die Feldkraftlinien geschnitten werden, wenn er sein Resultat zunächst auch etwas anders formulierte.

Wir bedürfen daher keiner weiteren Bestimmungsstücke für die neue Gruppe von Phänomenen, als die aus Abschnitt I und II bekannten, die Einführung jeder neuen selbständigen Grösse würde einer Überbestimmung der Erscheinung gleichkommen. Aber es wird doch vorteilhaft sein, auch für diese Grösse eine geeignete Benennung einzuführen.

Wie schon wiederholt, kommen wir auch hier bei unserer Darstellung mit der üblichen Terminologie in Schwierigkeit. Um der Kontinuität willen des hier Vorgetragenen mit der sonst in den Lehrbüchern vielfach noch üblichen Darstellung behalten wir die historisch gewordenen Bezeichnungen bei, wenn sie auch in dem Rahmen unserer Entwickelung zur Bedeutung blosser Symbole herabsinken.

Unsere Grösse z, „Zahl der in der Zeiteinheit gleichsinnig rechtwinklig geschnittenen Kraftlinien", ist mit jener identisch, welche die ältere Theorie als die elektromotorische Kraft der Induktion oder kurz die elektrische Kraft längs des Leiterstückes oder die Spannung oder Spannungsdifferenz oder den Potentialunterschied an den Enden des Gleitstückes bezeichnete.

Die älteren Theorien dachten sich, wie schon wiederholt erwähnt, den Strom als einen wirklichen „Strom", d. h. in dem Leiter das „elektrische Fluidum" fliessend. Die Entdeckung FARADAYS wurde daher trotz seiner durchaus objektiven Darstellung in der Weise interpretiert, dass bei der Bewegung des Leiters in der Nähe eines Magneten dieses „Fluidum bewegt werde", dass eine Kraft wie diejenige des Stempels eines Pumpwerkes auf dieses Fluidum zu wirken beginne. Die dieser Vorstellung entsprungene Bezeichnung „elektromotorische Kraft" ist nicht sehr glücklich gewählt. Denn erstens ist das Bild überhaupt unzureichend. Zweitens trägt die Bezeichnung ein neues Moment willkürlich in die Erscheinung hinein, welches nicht in ihr liegt. Dass das Verständnis der elektrischen Erscheinungen aber unter diesen Überbestimmungen erheblich gelitten hat, dass ferner überhaupt „eine Häufung von mehr Beziehungen auf einen Begriff als sich miteinander vertragen, z. B. auf den der „Elektricität", diesen nur verdunkeln, nicht klären konnte", hat H. HERTZ sehr treffend in der Einleitung (p. 9) seiner „Prinzipien der Mechanik" ausgeführt.

Anstatt von einer „elektromotorischen Kraft" spricht man auch gern, wie erwähnt, von einer „Spannung" oder „Spannungsdifferenz", welche an den Enden des durch das Feld bewegten Gleitstückes auftreten solle. Eine Hindeutung auf die mit dem Induktionsstrome vorzunehmenden Arbeitsleistungen enthält die Bezeichnung: „Potential" = Fähigkeit Arbeit zu leisten und „Potentialdifferenz", welche mit den letztgenannten Bezeichnungen synonym gebraucht werden.

Bei der den Strom liefernden Vorrichtung spricht man in diesem Sinne auch von einer „Klemmenspannung", welche die Quelle zur Verfügung stelle. Alle diese Bezeichnungen sind augenscheinlich demselben Bilde angepasst.

Wir wollen diese Namen beibehalten, damit sich namentlich der Anfänger in der Litteratur zurecht findet, uns aber prinzipiell von der Vorstellung des „Strömungsbildes", der „Pumpwerke" und der „Spannungen" freihalten.

Die Zahl der in einem Gleitstück durch Induktion erregten sog. elektromotorischen Krafteinheiten ist daher gleich der Anzahl z, der in der Sekunde senkrecht geschnittenen Kraftlinien. Um aber auch nicht umgekehrt durch die Bezeichnung selbst jene Bilder wieder einzuführen, wollen wir nur das Symbol E.M.K. beibehalten, eine recht bequeme Abkürzung, die sich namentlich in der Technik bereits vollkommen eingebürgert hat.

228. Die Dimension der E.M.K. — Aus der Gleichung 37) geht unmittelbar hervor, welche Dimension (§ 59) wir der Grösse z beimessen müssen. Da die Feldstärke $\mathfrak{H}$ die Dimension $\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-1}$ hat (§ 70), und $\dim l = \mathrm{cm}$, $\dim v = \mathrm{cm\,sek}^{-1}$ ist, so ist

$$\dim \text{E.M.K. } z = \mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-2}.$$

Die Einheit der E.M.K. wird zufolge der Formel 37) in folgender Weise festgelegt:

Die E.M.K. 1 wird in einem Leiterstücke von der Länge von 1 cm induziert, wenn wir dieses senkrecht zu der Kraftlinienrichtung in einem homogenen Felde von der Stärke 1

mit der Geschwindigkeit von 1 cm pro Sekunde bewegen. Durch diese Definition ist die „elektromagnetische" Einheit (E.M.E. § 166) dieser Grösse festgelegt.

Nach § 77 beträgt bei uns die Stärke des erdmagnetischen Feldes rund $^1/_2$ absolute C.G.S.-Einheit. Bewegen wir einen geraden Draht von 100 cm Länge mit der Geschwindigkeit eines Meters pro Sekunde senkrecht zu der Richtung der Inklinationsnadel und senkrecht zu seiner eigenen Richtung parallel mit sich selbst voran, so werden in ihm ca. 5000 E.M.E. elektromotorischer Kraft induziert.

229. Die praktische Einheit der E.M.K.: das Volt. — Die in § 228 festgesetzte E.M.-Einheit der E.M.K. ist eine sehr kleine, wie auch durch das Schneiden der Kraftlinien in der Form, wie wir es seither der Durchsichtigkeit der Anordnungen willen ausgeführt haben, in der That nur so schwache Ströme erhalten werden, dass wir ein empfindliches Galvanometer anwenden müssen, um sie deutlich sichtbar zu machen. In der Praxis spielen erst viel grössere E.M.K. eine Rolle. Wie man auch bei anderen Grössen statt der C.G.S.-Einheit im täglichen Leben bestimmte Vielfache derselben als „praktische Einheiten" benutzt (z. B. bei den Raummaassen, statt des Kubikcentimeters das 1000 oder 10^3 mal so grosse Liter), so auch hier. Es hat sich als zweckmässig erwiesen, 100 000 000 oder 10^8 absolute Einheiten der E.M.K. zu einer neuen „praktischen Einheit" zusammenzufassen; man hat diese nach dem italienischen Physiker Volta genannt, der zum ersten Male E.M.K. erzeugte, wenn auch auf einem ganz anderen Wege als dem hier beschriebenen. Der Gebrauch hat den Namen zu „Volt" verstümmelt; es ist also

$$1 \text{ Volt} = 10^8 \text{ E.M.E. der E.M.K.}$$

230. Der Arbeitseffekt. — Die pro Zeiteinheit geleistete mechanische Arbeit nennt man den Arbeitseffekt. Auf ihn kommt es in der Technik wesentlich an. Denn es handelt sich dort nicht sowohl darum, dass eine gewisse Arbeit in irgend einer Zeit vollführt wird, als vielmehr darum, dass diese Arbeit in einer bestimmten Zeit geleistet wird. So beurteilt man z. B. den Wirkungseffekt einer Dampfmaschine nach der in der Zeiteinheit geleisteten Arbeit, also nach Meter-Kilogrammen pro Sekunde. Die praktische Einheit des Arbeitseffektes ist die Pferdestärke, d. i. die Leistung von 75 mkgr in 1 sek.

231. Der Stromeffekt: das Voltampère oder Watt. — Nach den Ausführungen des § 225 ist die zur Erhaltung eines Induktionsstromes während der Zeit dt aufzuwendende Arbeit

$$dA = i \cdot \mathfrak{H} l v \cdot dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad 36)$$

oder mit Rücksicht auf 37)

$$dA = \mathfrak{i} z \cdot dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad 38)$$

Diese Arbeit ist nicht verloren; sie kann wieder in andere Energieformen umgewandelt werden. Sie ist gleichsam in dem Stromphänomen selbst enthalten. Die Arbeitsmenge, welche ein solcher Strom zur Verfügung stellen kann, nennt man daher die „Stromarbeit."

Die Stromarbeit ist durch das Produkt von Stromstärke i, E.M.K. z und der Zeitdauer dt bestimmt.

Formel 38) giebt die Stromenergie für die Zeit dt. Wird die Stromstärke i und die E.M.K. z während längerer Zeit konstant erhalten, wie etwa bei dem Versuche 93, so ist die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit des galvanischen Stromes offenbar iz. Dies ist aber eine Effektgrösse, der sog. „Stromeffekt".

Der Stromeffekt ist gleich dem Produkte von Stromstärke i und E.M.K. z.

Entsprechend der Bezeichnung der praktischen Maasse der beiden Faktoren spricht man von zi „Voltampère" Stromeffekt. Das praktische Maass hierfür hat man passend nach demjenigen genannt, der zuerst durch die Dampfmaschine der Menschheit Arbeitseffekte zur Verfügung stellte, wie sie bis dahin unerreicht waren: James Watt. Der Stromleistung von 1 Voltampère schreibt man einen Arbeitseffekt von 1 „Watt" zu.

1 Pferdestärke mechanischen Arbeitseffektes ist äquivalent mit 736 Voltampères oder 736 Watt.

Auf die Beziehungen dieser Energiewerte zu denen der Wärmeerscheinungen kommen wir weiter unten zu sprechen. Wie man an Gas- und Wasseruhren den Verbrauch des zugeführten Agens misst, so kontrolliert die elektrische Zentrale den Konsum an elektrischer Energie am „Wattstundenzähler". Der Preis der Kilowattstunde, d. h. der für die in Anspruchnahme eines Stromeffektes von 1000 Watt während der Zeit einer ganzen Stunde zu entrichtende Geldwert beträgt in den grösseren Verkehrscentren zur Zeit 50—80 Pfennige. Der Konsument kauft hier wie in so vielen anderen Fällen Energie. Falsch ist daher die Bezeichnung „Elektricitätszähler". Gegenüber den Gas- und Wasser-Zählern besteht noch der Unterschied, dass überhaupt nichts, weder etwas Materielles noch etwas Imponderabiles dem Konsumenten durch den Zähler zugeführt wird; denn Elektricität ist keine „bewegliche Sache."

232. Bestimmungsstücke der Stromenergie. — Die Zerlegung der Stromenergie in die beiden Faktoren i und z war keine willkürliche, sondern ergab sich aus der zu Grunde gelegten energetischen Betrachtung der sich ineinander umwandelnden Energien ganz von selbst. Bei derselben Stromstärke i kann der Inhalt der gesamten Strombahn an Energie ein sehr verschiedener sein, je nach dem Werte z der E.M.K., welche an der Stromquelle, bei uns dem durch das Magnetfeld geführten Gleitstücke auftritt. Umgekehrt ist der durch das Stromphänomen repräsentierte Energiewert bei demselben z um so höher, je

grösser das zugehörige i ist. Die Stromstärke bestimmt also gewissermaassen die energetische Wertigkeit einer gegebenen E.M.K.

(Bei dem „Strömungsbilde" tritt etwas ganz Ähnliches zu Tage. Die Stromstärke i ist dort geradezu das Maass der Quantität des in der Zeiteinheit durch den Leiterquerschnitt gepresst gedachten „Etwas" § 166: $i = de/dt$. Dieses hat gewissermaassen die Fähigkeit, mit verschieden hoher „Spannung" fortgetrieben zu werden. Je nach der Spannung, welche das Fluidum aufnimmt, hat es einen grösseren oder geringeren Energiefond in sich, mit dem es arbeiten kann, ganz analog wie die Arbeitsfähigkeit eines Wasserlaufes sich nach dem in der Zeiteinheit verfügbaren Wasserquantum nicht minder wie nach dem Gefälle richtet. Ersteres entspricht der Stromstärke i, letzteres der E.M.K. z.)

Ein derartiges Bestimmtsein durch zwei Faktoren lässt sich bei allen Energieformen wiedererkennen. Diese Faktoren haben gewisse Eigenschaften gemeinsam, nach denen man sie in zwei Gruppen teilen kann. Man unterscheidet: Kapazitätsfaktoren und Intensitätsfaktoren der Energieformen (Ostwald).

233. Eigenschaften der Energiefaktoren. — Wir haben den Begriff der E.M.K. z durch eine Definition eingeführt § 226, welche von der gewöhnlich an die Spitze gestellten so sehr abweicht, dass es uns obliegt, diesen Begriff noch nach anderen Richtungen hin möglichst zu verdeutlichen. Dazu schlagen wir zunächst einen Weg ein, welcher der neueren, namentlich von Helm und Ostwald ausgearbeiteten energetischen Betrachtungsweise folgt. Wir müssen uns hier damit begnügen, diese Methode an Beispielen zu erläutern; bezüglich ihrer näheren Begründung muss auf die betreffenden Spezialdarstellungen (vor allen auf Ostwalds „Studien zur Energetik") verwiesen werden.

Der eine Faktor, den wir in den Ausdrücken für die verschiedenen Energieformen abtrennen können, hat die Eigenschaft, dass dann und nur dann Energie aus einem räumlich irgendwie begrenzten Systeme in ein Nachbarsystem übergeht, wenn dieser Faktor in beiden Systemen Unterschiede aufweist; man nennt ihn den „Intensitätsfaktor".

So ist der Intensitätsfaktor der Wärmeenergie die Temperatur; denn Wärme geht nur aus einem Körper in einen anderen über, wenn die Temperaturen beider verschieden sind. Ein anderes Beispiel bietet die sog. Volumenergie: Befinden sich in dem Rohre RR, Fig. 102, rechts und links innerhalb der Volumina V_1 und V_2 zwei Gase G_1 und G_2, welche durch den leicht beweglichen Stempel S voneinander getrennt sind, so wird dieser nur dann in Ruhe sein, wenn die Spannkraft beider Gase, der Druck auf die Flächeneinheit, auf beiden Seiten des Stempels der gleiche ist. Wächst die Spannung des Gases auf einer Seite, so verschiebt sich der Stempel. Ähnlich halten sich in einem kommunizierenden Rohre, allgemein in einer Druckwasseranlage, die an irgend einen Querschnitt grenzenden Flüssigkeitssäulen nur dann das Gleichgewicht, wenn die von beiden Seiten her wirkenden Drucke keine Unterschiede aufweisen. In den beiden letztgenannten Fällen ist also der Druck Intensitätsfaktor.

Fig. 102.

Energie geht stets nur von dem Systeme mit höherem Intensitätswerte zu dem von geringerer Intensität über.

Wärme geht nur von wärmeren zu kälteren Körpern über, nie umgekehrt (Carnotsches Prinzip); der Stempel S in Fig. 102 wird von dem Gase mit höherer Spannung zu dem mit geringerer hingetrieben und drückt dadurch dasselbe zusammen, leistet also eine Kompressionsarbeit an ihm; in einer Druckwasseranlage strömt Flüssigkeit nur im Sinne des Druck-(Intensitäts-)Gefälles.

Nur wenn die Intensitätsfaktoren derselben Energieform in benachbarten Raumgebieten Verschiedenheiten aufweisen, tritt zwischen diesen ein Umsatz der betreffenden Energieform ein: „es geschieht etwas" in dem Gebiete dieser speziellen Energieform (Prinzip des Geschehens).

Die Kapazitätsfaktoren regulieren dann die Quantitäten der sich ineinander umsetzenden Energiemengen. Für sie gilt ein eigentümliches Erhaltungsgesetz, welches aussagt, dass sich bei dem Energieumsatz die Gesamtmenge der durch sie dargestellten Grösse in beiden Systemen zusammengenommen nicht ändert.

In dem durch Fig. 102 erläuterten Beispiele sind die Gasvolumina V_1 und V_2 Kapazitätsgrössen; wie sich auch der Stempel S verschiebt, immer bleibt das Gesamtvolumen $V_1 + V_2$ dasselbe, da sich die Einzelvolumina auf der einen Seite von S um ebenso viel vermindern, wie sie sich auf der anderen vermehren. Bei den kommunizierenden Röhren bleibt die gesamte Flüssigkeitsmenge die gleiche, wenn auch an einer Stelle Flüssigkeit durch einen Querschnitt in einem oder anderen Sinne hindurchgetrieben wird. Bei der Wärme spielen die Wärmekapazitäten die Rolle dieser Faktoren.

234. Der Intensitätsfaktor der Stromenergie. — Es lässt sich zeigen, dass wir in den beiden Faktoren i und z, durch die die Stromenergie bestimmt ist, gerade den Kapazitäts- und den Intensitätsfaktor der elektrischen Energie vor uns haben.

Die E.M.K. z ist als Intensitätsfaktor der Stromenergie anzusehen.

Wir beweisen dieses, indem wir zeigen, dass z die im vorigen Paragraphen angegebenen Eigenschaften der Intensitätsgrösse wirklich besitzt; dass die Stromstärke i als Kapazitätsfaktor anzusehen ist, ergiebt sich dann ohne weiteres.

Wird an irgend einer Stelle eines geschlossenen Leiterkreises durch Schneiden mit Kraftlinien eines beschränkt ausgedehnten Feldes ein Strom induziert, so verbreitet sich dieser längs der ganzen Bahn, seine Kraftlinien umziehen alle Teile der Leiterkette; die Stromenergie wandert damit aus dem Gebiete, in dem sie ursprünglich etwa aus mechanischer Arbeit erzeugt wurde, in Nachbargebiete hinein.

Wird die Strombahn an zwei verschiedenen Stellen von Kraftlinien gleichzeitig so durchschnitten, dass dadurch die Erzeugung entgegen-

gesetzt gerichteter Ströme angestrebt wird, so sind zwei Fälle möglich: die Ursachen heben sich gegenseitig auf, es entsteht kein Strom oder aber der eine oder der andere Induktionsvorgang überwiegt, ein Strom kommt zu stande. Wir haben zu zeigen, dass sich die Induktionswirkung in dem ganzen Kreise zur Geltung bringt, welche mit dem höheren z auftritt; dies muss an der Hand der Erfahrung geschehen.

In Fig. 103 mögen S_1 und S_2 zwei vollkommen gleiche Drahtspiralen darstellen, deren Enden einerseits direkt, andererseits unter Zwischenschaltung eines Galvanometers G miteinander verbunden sind. Werden in beiden Spiralen gleichsinnig verlaufende Ströme induziert, so unterstützen sich diese, werden entgegengesetzt gerichtete induziert, wie in der Figur angenommen, so laufen sie in dem Galvanometer gegeneinander an; letzteres schlägt nur aus, wenn Stromenergie von der einen Seite auf die andere übergeht. Solche gegeneinander gerichtete Induktionsströme rufen wir etwa dadurch hervor, dass wir die gleich starken, aber entgegengesetzten Pole N und S eines (nach vorn aus der Zeichnungsebene hervortretenden) Hufeisenmagneten aus beiden Spiralen herausziehen. Dann erhalten wir nach § 213 Induktionsströme von der bezeichneten Richtung.

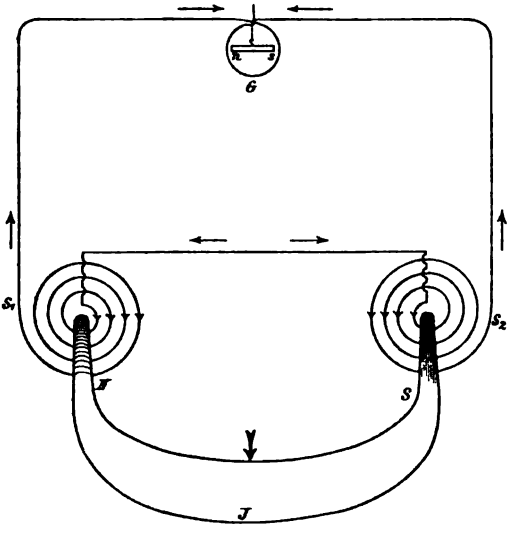


Fig. 103.

Versuch 94. a) Bewegen wir beide Pole aus entsprechenden Lagen in andere, in Bezug auf ihre Spiralen wieder entsprechende Lagen in derselben Zeit, indem wir den Magneten parallel mit sich selbst zurückziehen, so schlägt das Galvanometer G nicht aus. Die Zahl z der in der Zeiteinheit geschnittenen Kraftlinien ist beiderseitig die gleiche, in dem System „geschieht (elektromagnetisch) nichts." [Bei der Wärme geht keine Energie aus dem Gebiete eines Körpers in das eines unmittelbar benachbarten (berührenden) anderen Körpers über, wenn die Temperaturen in beiden die gleichen sind.]

b) Wir bewegen einen Pol, z. B. N, schneller, indem wir bei der Vorwärtsbewegung etwa eine gleichzeitige Drehung der Indifferenzzone J nach rechts hinüber vornehmen. Dann giebt das Galvanometer einen Ausschlag, welcher anzeigt, dass Strom aus dem linken Induktionsgebiet in das rechts gelegene Nachbargebiet durch das Galvanometer hinübergeht. Links ist aber die E.M.K. z grösser als rechts. [Wärmeenergie geht immer vom höher temperierten Körper zum niedriger temperierten über, nie umgekehrt (II. Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie)].

Da der Strom ein geschlossener ist, so geht er in der unteren Verbindung wieder von S_2 nach S_1 zurück. Weil die Stromenergie die Richtung des Stromes selbst einschlägt, so wandert sie von S_1 durch das Galvanometer G nach S_2 und von da

nach S_1 der Strombahn entlang. Diese Richtung der Wanderung ist eindeutig durch die höhere in S_1 induzierte E.M.K. bestimmt. Machen wir $\varkappa$ für S_2 grösser, so bestimmt die hier wirkende Ursache den ganzen Prozess, ein Strom von umgekehrter Richtung kreist in dem ganzen System.

c) Wir vermehren die Windungszahl einer Spirale um einige Windungen, indem wir von der verfügbaren Drahtlänge noch ein Stück mit um den Spulenträger legen. Bewegen wir nun den Magneten gleichmässig in beiden Spiralen, so ist die in der Zeiteinheit geschnittene Kraftlinienzahl $\varkappa$ in einer Spirale grösser, ihre E.M.K. bestimmt die Richtung des entstehenden Stromes und damit der Energiewanderung.

Eine Anordnung wie in Fig. 103 kann also dazu dienen, die Fähigkeit zweier Spiralen, Sitz induzierter E.M.K. von bestimmter Grösse zu sein, miteinander zu vergleichen. In der That beruht die sog. Induktionswage, die wir später besprechen werden, auf dem hier angedeuteten Prinzip.

Man darf sich auch hier nicht durch die Bezeichnungen irre machen lassen, die, wie schon wiederholt bemerkt, gerade in diesem Kapitel den neueren Anschauungen durchaus nicht mehr entsprechen. Darum sei nochmals hervorgehoben: Die E.M.K. misst die Intensität der neuen Energieform; FARADAY bezeichnet diese Grösse noch durchweg als die Intensität des Stromes; das Geschehen erfolgt immer im Sinne des Intensitätsgefälles. Die Grösse i, die man jetzt die Stromintensität nennt, spielt die Rolle der Kapazitäts- oder Quantitätsgrösse.

Die ältere Theorie dachte sich ja in der That die Stromstärke i durch die Quantität e eines bewegten Fluidums der „Elektricität" gemessen: $i = de/dt$ nach § 166, so dass $e = \int i \cdot dt$ ist; das i entspricht in diesem Bilde also ganz der in der Zeiteinheit durch den Querschnitt eines Rohrsystems hindurchgetriebenen Flüssigkeitsmenge. Da in Bezug auf diese Quantitätsgrössen der Energetik das Konstanzgesetz gilt (§ 233), so führt uns unsere energetische Betrachtung zu einem Satze, den die ältere Theorie so auszudrücken pflegte: „Die Gesamtquantität an elektrischem Fluidum ist in jedem endlichen räumlichen Gebiete konstant."

Bei der elektromagnetischen Eigenenergie, deren Differential nach § 194: $i \cdot dN$ ist, kann dagegen i als Intensitätsfaktor, N als Kapazitätsfaktor angesehen werden, wie man leicht erkennt, wenn man die in § 233 angegebenen Kriterien auf die im 11. Kapitel beschriebenen Fälle elektromagnetischer Wechselwirkung anwendet. Darin, dass dieselbe Grösse i bei der einen Energieform als Intensitäts-, bei einer anderen als Kapazitätsfaktor fungiert, liegt kein Widerspruch (vergl. OSTWALD).

235. Faradays elektrotonischer Zustand. — Die Induktionserscheinungen führten FARADAY zu dem Schlusse, dass längs eines in einem Magnetfelde befindlichen Leiters ein Spannungszustand eigentümlicher Art bestehen müsse, der in Form eines Induktionsstromes zum Ausdruck kommt, sowie der Leiter gegen die Kraftlinien bewegt wird. Er bezeichnete ihn als „elektrotonischen Zustand" (von τόνος = Anspannung). Die Vorstellung dieses Zustandes, der „den kleinsten Teilchen und nicht der Masse des der Induktion ausgesetzten Drahtes oder Körpers als solcher" zukommen sollte, wurde von FARADAY dann

zunächst wieder aufgegeben, in seinen letzten Untersuchungsreihen dagegen wieder aufgenommen und mit den Kraftlinien des Magnetfeldes in innigere Verbindung gebracht. MAXWELL acceptierte diesen Begriff und in seiner Theorie spielt er (unter dem Namen des „elektrotonischen Momentes") eine grosse Rolle; HERTZ hat ihn wieder eliminiert. Es entsteht die Frage, was er bedeutet, und welche Berechtigung er innerhalb der neueren Anschauungen hat.

Eine in einem Magnetfeld befindliche Leiterschleife ist in eigentümlicher Weise als Quelle eines Stromes prädisponiert, was nicht der Fall ist, wenn die Schleife ausserhalb des Kraftfeldes liegt. Denn im ersten Falle kann bei jeder Änderung in dem augenblicklichen Zustande an irgend einer Stelle ein Durchschneiden von Kraftlinien stattfinden und jedes Längenelement dadurch Sitz einer E.M.K. werden.

Die Induktionserscheinungen machen vielfach den Eindruck, als ob wie bei einem mechanischen Zusammenschnüren der Kraftlinien eines Feldes, der Induktionsstrom als eine Art Reaktionserscheinung aufträte. Doch muss man sich vor einer zu mechanistischen Auffassung des Vorganges hüten. Es ist nicht zu vergessen, dass das Leitermaterial in den meisten Fällen, z. B. bei Anwendung von Kupferdrähten, so nahe dieselbe Permeabilität wie die umgebende Luft hat, dass die Grenzschicht beider im magnetischen Sinne kaum als Widerlager aufgefasst werden kann. Die Kraftlinien durchschneiden ebenso leicht das Kupfer wie die Luft; wenn wir dennoch bei dem Durchschneiden eines Feldes mit einem Drahte, an diesem konzentrische Kraftlinienringe sich ausbilden sehen, so dürfen wir nicht schliessen, dass wir durch den mechanischen Vorgang des Schneidens selbst diese Ringe von den Feldkraftlinien losgetrennt hätten; ein solches „Abschälen" der Kraftlinien des Feldes und ihr „Aufreihen" in Ringform auf den Stromträger erweist sich in dieser Beziehung als ein unzureichendes Bild der Erscheinung. Das Einzige, was wir bei dem Prozesse mit Sicherheit verfolgen können, ist der Umsatz der ins Spiel tretenden Energieformen. Derselbe vollzieht sich analog wie derjenige an den allerdings zunächst rein mechanischen Charakter tragenden cyklischen Systemen, wie dies später eingehender gezeigt werden soll.

Unter „elektrotonischem Zustande" können wir nur das Vorhandensein von Magnetkraftlinien in der Umgebung einer Leiterbahn überhaupt verstehen. Die Zahl N der bei gegebener Stromstärke z. B. $i = 1$ umschlossenen Kraftlinien, bezw., bei Anwesenheit von Medien einer verschiedenen Permeabilität im Felde, allgemeiner die Zahl der Induktionslinien § 108 N (vielfach geradezu das Moment der Leiterschleife genannt) giebt ein Maass für die in derselben für Induktionswirkungen disponible elektromagnetische Energie. MAXWELL führte durch eine rein mathematische Operation (STOKESscher Satz, vergl. § 152) diese Grösse des gesamten magnetischen Induktionsflusses durch die von einer Leiterbahn umschlossene Fläche hindurch auf eine gerichtete (Vektor-)Grösse zurück, welche sich auf die einzelnen Elemente der Strombahn bezog, (von der Komponenten gebildet werden konnten:

Komponenten des elektrotonischen Zustandes oder elektrotonische Funktionen; Komponenten des elektrokinetischen Momentes). Knüpfen wir unsere Betrachtungen direkt an die Vorgänge im Felde an, so können wir mit HERTZ diesen Umweg vermeiden.

Schon FARADAY war überzeugt, dass es eine Grösse (N) giebt, welche durch Form, Grösse, Beschaffenheit der Umgebung, aber nicht durch das Material der Leiterbahn bestimmt ist und die nach unserer Ausdrucksweise als Kapazitätsgrösse dieser Bahn für elektromagnetische Energie angesehen werden kann; ihre zeitliche Änderung ist bei uns der Intensitätsfaktor der Induktionsenergie, siehe weiter unten § 237. FARADAY bezeichnete sie vorläufig als „elektrotonischen Zustand", ohne damit eine bestimmte Vorstellung zu verbinden. Das Symbol $J(s)$, in das sich dieser Begriff in der MAXWELLschen Theorie verdichtet, ist für die kinematischen Interpretationen von grösster Bedeutung, denn es stellt bei diesen die Trägheitsmomente der Zwischenmechanismen dar (vergl. namentlich BOLTZMANNS treffliche Darstellung).

236. Summation der E.M.K. — Die Intensitätsgrössen einer jeden Energieform bilden eine Skala derart, dass die Summe der Intensitätsunterschiede zwischen einem ersten bis zu einem zweiten Werte plus dem von diesem zu einem dritten gerade so gross ist, wie die Intensitätsdifferenz von dem ersten und dritten Werte u. s. f., z. B. bei der Temperaturskala. Wenn daher in einem Elemente einer Strombahn durch schneidende Kraft- oder Induktionslinien eine E.M.K. z_1, in einem benachbarten Elemente die E.M.K. z_2 im gleichen Sinne induziert wird, so ist in dem ganzen aus beiden Elementen zusammengesetzten Leiterstücke die E.M.K. $z_1 + z_2$ induziert.

Sind die Richtungen der induzierten E.M.K. entgegengesetzt, so bleibt unsere Aussage dennoch richtig, wenn wir nur die eine E.M.K. mit dem umgekehrten Vorzeichen — einführen.

So kann man über endliche Leiterstücke summieren und erhält in der Summe der E.M.K. den gesamten Intensitätsfaktor der in dem ganzen Leiterstück induzierten Stromenergie. Man sagt, die einzelnen induzierenden Elemente seien „hintereinander geschaltet". Wir wollen diese gesamte E.M.K. vieler Leiterelemente mit E bezeichnen.

Durch diese Hintereinanderschaltung werden z. B. in den Fällen des § 216 die E.M.K., die in allen einzelnen Teilen der Leitung geweckt worden sind, addiert, wodurch eine hohe „Klemmenspannung" an den Enden der Spule, wo wir die Klemmschrauben zur Weiterleitung ansetzen, erzeugt wird.

237. Das Induktionsgesetz. — Ist N die Gesamtzahl der von einer Leiterschleife umschlossenen Kraftlinien, welche teils einem fremden Magnetfelde angehören, teils durch die in der Schleife etwa schon vorhandene Stromstärke bedingt sind, so kann diese Zahl sich nicht ändern, ohne dass Leiterteile von heraustretenden oder neu eintretenden Kraftlinien geschnitten werden. Dadurch werden E.M.K. induziert. Wir können die in den einzelnen Elementen der Leitung vorhandenen E.M.K.

addieren; ihre Summe sei für den ganzen Leiterkreis zur Zeit t gleich E. Sie ist nach § 227 gleich der Gesamtzahl der pro Zeiteinheit zum Schnitt gekommenen Kraftlinien; diese ist aber genau dieselbe, um welche sich N pro Zeiteinheit gerechnet, vermehrt oder vermindert hat. Tritt zur Zeit t, wo wir die E.M.K. messen, in dem Zeitelement dt im ganzen Kreise die Kraftlinienzahl dN ein oder aus, so ist die auf die Zeiteinheit umgerechnete Zahl oder die zeitliche Änderungsgeschwindigkeit von N gleich dN/dt; also ist

$$E = -\frac{dN}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 39)$$

dN kann positiv oder negativ sein; im ersteren Falle (Zunahme der umschlossenen Kraftlinienzahl) ist E negativ (inverser Strom), im zweiten (Abnahme der Kraftlinienzahl) positiv (direkter Strom).

Wir treffen dabei also die (übrigens willkürliche) Festsetzung, dass eine einen Zeigerstrom (§ 212) veranlassende E.M.K. positiv, die E.M.K. eines Gegenzeigerstromes negativ in Rechnung zu setzen ist.

Formel 39) drückt das wichtige Gesetz aus:

Die in einer geschlossenen Kurve zur Zeit t induzierte gesamte E.M.K. E ist entgegengesetzt gleich der Änderungsgeschwindigkeit dN/dt der Anzahl N von Kraftlinien, welche die Curve zu dieser Zeit umfasst.

Damit haben wir das allgemeinste Induktionsgesetz, aus dem sich alle speziellen Formen ergeben, abgeleitet. Der Weg, auf dem wir dazu gelangten, unterscheidet sich von dem sonst eingeschlagenen. Gewöhnlich geht man von den elektrodynamischen Fernewirkungen aus, die man durch elektromagnetische Potentiale ausdrückt. Das Energiegesetz, auf Variationen dieser Potentiale angewendet, ergiebt dann das Induktionsgesetz. Man hält meist diese Art der Ableitung für absolut sicher. Bertrand war es wohl zuerst, welcher es wagte, an der bindenden Kraft dieser durch die Tradition geheiligten Deduktionen zu zweifeln. Poincaré unterwirft Bertrands Argumente einer strengen Kritik, sieht sich aber doch zu dem Zugeständnis genötigt, dass „Bertrand der grösste Teil des Schlachtfeldes verbleibe" (Electricité et optique II. p. 25. 1891).

Wir haben versucht, jene Gesetze direkt aus den Feldwirkungen abzuleiten, indem wir konsequent Begriffsbildungen vermieden, welche, wie die Potentiale, den Fernewirkungstheorien entstammen.

Noch in anderer Beziehung weicht unser Gang von dem traditionellen ab. Meist geht man von dem Begriffe einer gegebenen E.M.K., etwa der eines sog. galvanischen, oder wie es wohl richtiger heissen sollte, Voltaschen Elementes aus, welche durch die Induktion, falls der Strom eine mechanische Arbeit leistet, eine Verminderung erleidet. Die Vorstellung der E.M.K. eines konstanten in den Stromkreis eingeschalteten Elementes ist zwar eine durch die historische Entwickelung der Wissenschaft allgemein geläufig gewordene. Ein Zurückgreifen auf dieselbe in unserem Erscheinungsgebiete muss aber weder als notwendig noch als förderlich erscheinen. Faraday hätte die Induktionsströme entdecken können, ohne von Galvanis oder Voltas Entdeckung irgendwie Kenntnis zu haben. Er machte z. B. folgende Bemerkung: ein Teil einer in sich zurücklaufenden, beliebig langen metallischen Leitung versetzt, wenn er zwischen den Polen eines kräftigen Magneten

bewegt wird, jeden noch so entfernten Teil in einen Zustand, vermöge dessen er ablenkende Wirkungen auf in die Nähe gebrachte Magnetnadeln auszuüben imstande ist (Versuch 71). Hierin ist das Wesentliche aller Erfahrung über diese Erscheinung enthalten. Folglich muss eine Beschreibung, welche nur die hierbei vorkommenden Bestimmungsstücke enthält, möglich sein und sie wird zugleich die einfachste Darstellung der Thatsachen bilden. Diese aber auf die einfachste Weise richtig zu beschreiben, ist die einzige Aufgabe, welche nach KIRCHHOFF eine Theorie zu erfüllen hat.

Der Induktionsvorgang ist ferner viel übersichtlicher als die stromliefernden Prozesse in einer VOLTAschen Kette, über die erst die neuesten Fortschritte der Elektrochemie völlige Aufklärung gewähren konnten. Eine Theorie, welche diese Prozesse von vornherein mit in die Theorie der Induktionserscheinungen hineinzieht, kompliziert unnötig den Gang der Ableitung.

Wir haben den Begriff der E.M.K. nicht als aus anderen Gebieten der Elektricitätslehre bekannt vorausgesetzt, sondern ihn aus den Induktionserscheinungen selbst abgeleitet und befinden uns damit auf dem Wege, den man immer dann zu betreten sich genötigt sah, wenn man diese Grösse auf ihr absolutes Maass zurückführen wollte. Der Gang dieser Messung giebt einen indirekten Beweis dafür, dass die E.M.K. durch die Induktionsvorgänge eindeutig bestimmt ist, unabhängig von der E.M.K. irgend welcher anderer Stromquellen.

238. Der Vektor der elektrischen Kraft. — Bei den Betrachtungen des § 225 und der sich daran anschliessenden Ausführungen haben wir immer ein geradliniges Gleitstück von der Länge l betrachtet, welches in einem homogenen Felde bewegt wurde. Es war die in ihm geweckte E.M.K z naturgemäss immer proportional der Länge l des Leiterstückes. Wir wollen jetzt unsere Entwickelungen nach einer anderen Seite hin noch verallgemeinern und beliebig gestaltete Leiterbahnen in unhomogenen Feldern betrachten. Dazu denken wir uns die einzelnen Längenelemente des Stromträgers so klein, dass wir für die einzelnen Punkte desselben Elementes die Feldstärke $\mathfrak{H}$ als gleich gross ansehen können. Wie dann auch das Kraftfeld beschaffen sein mag, immer werden an jeder Stelle eines Elementes bei einer Bewegung des Trägers oder einer Veränderung des Feldes gleichviel Linien zum Schnitt gelangen. Die an jedem Punkte desselben Elementes dadurch geweckten E.M.K. addieren sich. Je länger das Element genommen werden kann, um so höher wird dann seine gesamte E.M.K. unter sonst gleichen Umständen ausfallen. Die in einem Elemente geweckte E.M.K. z ist also proportional der kleinen Länge dl des Elementes selbst

$$z = \underset{dl}{\mathfrak{E}} \cdot dl \quad \ldots \ldots \ldots \quad 40)$$

Die Grösse $\mathfrak{E}$ stellt offenbar die auf die Längeneinheit bezogene E.M.K. längs der Leiterbahn an der betrachteten Stelle oder die sog. E.M.K. pro Längeneinheit dar. Die E.M.K. $\mathfrak{E}$ hat als Zahl der die Längeneinheit in der Sekunde durchschneidenden Kraftlinien an sich

keine Richtung. Wir sehen sie aber immer an ein gewisses Längenelement dl gebunden, und dieses hat eine Richtung. In diesem Sinne spricht man dann auch von einer Richtung der E.M.K. $\mathfrak{E}$ selbst und meint damit die Richtung des Leiterelements, an dem diese E.M.K. auftritt. Wir bemerken somit an $\mathfrak{E}$ die drei Begriffselemente: Grösse, einen (durch die Rechte-Handregel bestimmten) Sinn und eine Richtung, welche nach § 31 für einen Vektor charakteristisch sind.

Man nennt diese Grösse $\mathfrak{E}$ daher auch den „Vektor der E.M.K. pro Längeneinheit" oder kurz den „Vektor der elektrischen Kraft".

Die Formel 40) zeigt, dass von der E.M.K. $\mathfrak{E}$ das Begriffselement der Längenausdehnung losgelöst ist, da diese durch den anderen Faktor dl allein in $\varkappa$ hineingebracht wird. Mit Rücksicht auf die Definition von $\varkappa$, § 226, Formel 37) sind die in $\mathfrak{E}$ enthaltenen Begriffselemente nur noch die einer Kraftlinienzahl und der Geschwindigkeit der seitlichen Verschiebung gegen die Kraftlinien an der betrachteten Stelle. Die Dimension dieser Vektorgrösse $\mathfrak{E}$ ergiebt sich unmittelbar aus derjenigen der E.M.K. Da diese nach § 228 gleich $\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-2}$ ist, $\mathfrak{E}$ aber nach Formel 40) eine E.M.K. dividiert durch eine Länge ist, so ist im E.M.System (§ 166)

$$\dim \mathfrak{E} = \mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-2},$$

also in der That $= \mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-1} \times \mathrm{cm\,sek}^{-1}$, d. h. gleich dem Produkte einer Feldstärke (§ 70) und einer Geschwindigkeit (§ 59).

239. Begriff des magnetischen Stromes. — Die Anordnung der Versuche 86 § 221 giebt zu einer Bemerkung allgemeiner Natur Veranlassung, die wir schon hier einschalten, wiewohl wir die weitere mehr mathematische Entwickelung dieses Gegenstandes einem späteren (19.) Kapitel vorbehalten. Wir legten um einen Kraftlinienstrang, d. h. eine bestimmte Anzahl Kraftröhren innerhalb eines Kraftfeldes einen leitenden, geschlossenen Ring herum. Änderte sich die Zahl der umschlossenen Kraftlinien, der Einheitssolenoïde (§ 84) oder allgemeiner der umschlossenen Induktionsröhren (§ 108), also die magnetische Polarisation (§ 104) durch irgend einen Umstand, so wurde in dem Ringe längs eines jeden Elementes eine E.M.K. geweckt. Nennen wir die Summe aller dieser einzelnen Kräfte längs der ganzen Leiterschleife E, so ist diese E.M.K. nach § 237 gleich der negativ genommenen Änderung der gesamten Kraftlinienzahl N in der Zeiteinheit, d. h. der Änderungsgeschwindigkeit der magnetischen Induktion oder Polarisation. Diese Änderungsgeschwindigkeit nennt man den „magnetischen Strom". Hat die Schleife die Fläche ω, und ist $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ die magnetische Induktion, d. h. die Gesamtzahl aller Kraftlinien pro Flächeneinheit, so ist bei gleicher Verteilung derselben über die Fläche ω die Zahl $N = \omega \mathfrak{B} = \omega \mu \mathfrak{H}$ und

$$E = -\frac{d(\omega \mu \mathfrak{H})}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 41)$$

Diese Formel fasst alle Erfahrungen über das Zustandekommen magnetelektrischer Ströme zusammen. Sie sagt aus, dass E.M.K. und damit (bei geschlossener Leitung) Ströme induziert werden: a) wenn die Flächengrösse ω einer Leiterschleife in einem Magnetfelde sich ändert, so dass Kraftlinien ein- oder austreten (§ 212); b) wenn die Permeabilität μ des Mediums wechselt § 220; c) wenn die Feldstärke $\mathfrak{H}$ sich irgendwie ändert § 215, und endlich wenn irgend zwei oder alle drei Faktoren in solcher Weise zeitliche Änderungen erfahren, dass der Wert des Produktes variiert.

Ändert sich bei dem Aus- oder Einströmen der Kraftlinien die Flächengrösse ω und die Permeabilität μ nicht, sind beide also von der Zeit t unabhängig, so ist der magnetische Strom gleich $\omega \mu d\mathfrak{H}/dt$ und

$$E = -\omega \mu \frac{d\mathfrak{H}}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 42)$$

Hierbei ist E die Summe aller E.M.K., welche in den einzelnen Längenelementen der umschliessenden Strombahn induziert werden.

240. Symmetrieeigenschaften des Vektors der elektrischen Kraft. — Wir wollen zum Schluss dieses Kapitels noch eine Betrachtung anreihen, deren weiteren Ausbau wir freilich erst späteren Kapiteln vorbehalten müssen, welche aber als eine Erweiterung des hier Behandelten ausserordentlich wichtig erscheint.

Wenn wir ein Drahtstück quer zur Richtung der Kraftlinien durch ein Magnetfeld bewegen, so treten in ihm, da wir Kraftlinien schneiden, nach § 234 Intensitätsunterschiede der elektrischen Energie auf.

Die ältere Anschauung sagte: „Längs des Drahtes wirkt eine elektrische Kraft, welche elektrisches Fluidum nach einem Ende treibt und dort anstaut. Verbinden wir die Drahtenden, so erhalten wir einen kontinuierlichen Strom." Dieser ist auch nach unserer Anschauung etwas Accidentelles, Sekundäres; das Bestehen der Intensitätsunterschiede unserer besonderen Energieform an beiden Enden des Drahtes ist das Primäre; jedenfalls genügt es, um im angegebenen Falle das Stromphänomen herbeizuführen § 234.

Da das Auftreten dieser Intensitätsunterschiede (dieser elektrischen Spannungen, der Spannungs- oder Potential-Differenzen in der Ausdrucksweise der älteren Anschauungen § 227) unabhängig von der Materie des bewegten Drahtstückes ist und nur von seiner Grösse, Lage im Felde und der Bewegung seiner einzelnen Teile relativ zu diesem also von seinen geometrischen Eigenschaften abhängt, so kann man für den materiellen Draht eine geometrische Kurve setzen, welche seine Stelle im Raume einnimmt. Gehen über ein als geradlinig zu betrachtendes Element einer Kurve magnetische Kraftlinien hin, so können wir für dieses die in der Zeiteinheit senkrecht schneidenden Linien ebenso gut abzählen, als ob das Element einer Drahtleitung angehörte. Wir kommen so zu der schon in § 238 eingeführten Vektorgrösse $\mathfrak{E}$

und erkennen jetzt, dass dieser eine ganz selbständige Bedeutung im Kraftfelde zukommt.

Diese Vorstellung der magnetischen und „elektrischen" Kräfte als im Raume selbständig bestehender Feldzustände macht in der Regel dem Anfänger, der zum ersten Male an die MAXWELLschen und HERTZschen Gedankenreihen herantritt, einige Schwierigkeiten. Wir hoffen durch die ausführliche anschauliche Herleitung des Begriffes dieselben möglichst vermindert zu haben.

Wenn wir so den Begriff der E.M.K. oder des elektrischen Kraftvektors $\mathfrak{E}$ loslösen von der Vorstellung eines bestimmten Leiterkreises, an dem wirkend er beim metallischen Schluss einen Strom liefern würde, und uns nur an seine eigentlichste Bedeutung als einer Richtungsgrösse im Raume halten, so bleiben uns zu seiner Charakterisierung nur seine Symmetrieeigenschaften übrig. Diese müssen völlig eindeutig aus den Eigenschaften der magnetischen Kraftfelder selbst hervorgehen.

Unsere bisherigen Betrachtungen zeigen, dass zu den Elementen, welche das magnetische Kraftfeld zu seiner begrifflichen Erschöpfung erfordert, hier noch das Begriffselement einer Quertranslation und der Zeit hinzutritt. In der That war ja nach § 238 $\mathfrak{E}$ durch eine Feldstärke $\mathfrak{H}$ und eine Geschwindigkeit vollkommen bestimmt. Mehr können wir nicht über das Verhältnis beider Erscheinungen der magnetischen und der elektrischen in dem Umfange, in dem wir sie hier betrachten, aussagen, das Hinzufügen irgend eines weiteren Bestimmungsstückes würde einer Überbestimmung gleichkommen (§ 227).

Das gleichzeitige Vorstellen der Bestimmungsstücke der Ursachen (Kraftfeld und Bewegung eines Kurvenelementes in demselben) genügt zur Erkenntnis der Wirkung, der sog. elektrischen Spannung, welche durch diese beiden Stücke vollkommen bestimmt ist. Das Hineinziehen eines hypothetischen Fluidums ist überflüssig.

Dass der Vektor der magnetischen und der der elektrischen Kraft sich durch ihre Beziehung zur Zeit (durch eine Zeitdifferentiation) voneinander unterscheiden, vergl. Formel 39 und 41, tritt bei allen Theorien hervor, namentlich bei der MAXWELLschen. Um einen Parallelismus der Bezeichnungen herzustellen, war der wohl zuerst von HEAVISIDE eingeführte Begriff des „magnetischen Stromes" § 239 von grossem Werte. Dass zeitliche Änderungen magnetischer Kraftvektoren in der That identisch mit elektrischen Kraftwirkungen sein müssten, war für HERTZ ein leitender Gedanke („elektrische Kräfte erlöschender Ringmagnete" u. s. w.). Da es uns mehr auf die folgerichtige Ausgestaltung der neueren Anschauungen als auf den Nachweis ihrer Wurzeln ankommt, müssen wir uns mit diesen Andeutungen, die freilich nur den mit den genannten Ideenreihen schon etwas Vertrauten verständlich sein dürften, begnügen.

241. Erläuterung der Beziehungen zwischen magnetischer und elektrischer Kraft durch ein kinematisches Modell. — War unsere Darstellung der Beziehung zwischen den beiden genannten Vektorgrössen im vorigen Paragraphen auch vollkommen umfassend, so war sie jeden-

falls noch nicht sehr anschaulich. Wir wollen untersuchen, durch welche mechanische Verknüpfungen („Elementenpaare", wie der Maschinenbauer sagen würde) wir jene Fälle von Doppelsymmetrie in einem Feldraume nachahmen können, wie sie uns die Beziehungen der genannten beiden Vektorgrössen erfahrungsgemäss darbieten. Es ist bemerkenswert, dass uns die Weiterbildung der im 7. Kapitel besprochenen kinematischen Illustrationen der Vorgänge in den Magnetfeldern durch die Induktionserscheinungen hindurch naturgemäss zu einem Modelle führt, durch welches FITZGERALD bereits früher alle Erscheinungen der elektrischen und magnetischen Felder, der Stromerscheinungen, der elektrischen Schwingungen u. s. w. darzustellen vermochte, das namentlich auch die POYNTINGschen Sätze über die Energiewanderung in diesen Feldern zum Ausdruck bringt, ein Modell also, das in sehr vollkommener Weise die genannten Beziehungen veranschaulicht (siehe weiter unten im 18. und 19. Kapitel).

Fig. 104 stelle an den Punkten 1—6 Kraftröhrenquerschnitte dar; der Nordpol des homogenen Feldes liege vor, der Südpol hinter der Zeichenebene, so dass der in § 121 getroffenen Festsetzung gemäss die Cykelbewegung für den Beschauer uhrzeigermässig erfolgt. Wir denken uns etwa eine Anzahl Rollen durch Fäden so gekoppelt, dass sie sich alle im gleichen Sinne drehen, wie es die auf die sechs Kreise gezeichneten Pfeile andeuten. Bewegen wir quer zu diesen sich um parallele Achsen drehenden Elementen von links nach rechts einen Stab, so würde in diesem nach der Rechten-Handregel eine E.M.K. von der eingezeichneten Richtung, also nach oben hin, induziert werden. In der Zeit, in der dieser Stab aus der Position I parallel mit sich selbst in die Position II übergeführt wird, dreht sich die zweite Elementenreihe um einen gewissen Betrag, der etwa durch den Bogen $\mathfrak{p}_1$ gemessen wird. Der von I nach II bewegte Stab trifft also die aufeinander folgenden Reihen achsialer Elemente nicht in identischen Stellungen an (welche durch die vertikalen gestrichelten Linien angedeutet sein sollen); vielmehr ist die Drehung der zweiten Reihe schon um einen Betrag $\mathfrak{p}_1$ weiter fortgeschritten, wenn der Leiter in dieselbe Beziehung zu dieser Kraftröhrenlage gelangt, die er zu Anfang in Bezug auf die erste Lage inne hatte. Das Gleiche findet bei dem weiteren Fortschreiten bis zur dritten Lage statt; diese wird in einer noch späteren Bewegungsphase angetroffen, bei der die einzelnen Elemente um den Betrag $\mathfrak{p}_1$ aus identischen Lagen entfernt sind.

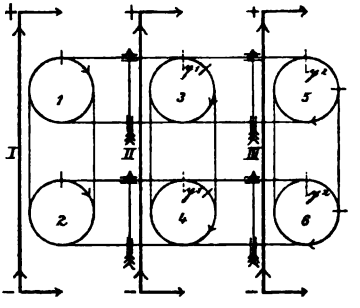


Fig. 104.

Das Fortschreiten des Stabes im Sinne I, II, III durch das homogene Kraftfeld hindurch ist also gleichbedeutend mit einem gleichzeitigen in Beziehungsetzen immer weiter fortgeschrittener Drehungszustände mit zurückgebliebenen. Dieses Fortschreiten im Felde charakterisierte aber das Auftreten einer von unten nach oben gerichteten elektrischen Kraft. Wir sehen jetzt, dass diese Erscheinung, wenn wir sie als neben der magnetischen Kraft dauernd im Felde bestehend be-

trachten wollen, mit der räumlichen Verschiedenheit der in Nachbarelementen vor sich gegangenen Drehung identisch ist. Wir können diese Verschiedenheit auch so zu Stande gebracht denken, dass wir die einzelnen Elementenpaare der einzelnen Reihen (Kraftröhren) durch elastische Fäden ohne Gleitung koppeln und die vorderste, dritte Rollenreihe voran drehen und die letzte, erste, bremsen. Das mechanische Bild einer an jeder Stelle des Feldes bestehenden elektrischen Kraft ist dann der in den Nachbarfäden zwischen je zwei Elementen bestehende Spannungsunterschied. Bezeichnen wir die gespannte Seite unserer in sich zurücklaufenden koppelnden Riemen oder Fäden durch beigesetzte Parallelstriche, die lockere ungespannte Seite durch ein Querstrichpaar, so geben Pfeile, welche quer zu den Riemen stehen und vom lockeren zum gespannten Ende (also parallel zu den Querstrichen) verlaufen, die Richtung der elektrischen Kraft (in unserem Falle von unten nach oben) an.

Durch die so bezeichneten elastischen Spannungen im Wirbelfelde werden also die elektrischen Kraftvektoren den Symmetrieverhältnissen entsprechend dargestellt, welche in magnetischen Kraftfeldern auftreten können. Die elektrische Kraft steht senkrecht zur magnetischen. Zeitliche Änderungen in der Drehung, der magnetischen Kraft, bedingen das Auftreten von Spannungen, von elektrischer Kraft u. s. w.

Die wirkliche Ausführung dieses Modelles und die vielfachen Anwendungen, die es gestattet, werden wir erst später besprechen. Hier genügte es zu zeigen, dass die Weiterbildung der kinematischen Bilder unzweideutig auf dieses Bild der elektrischen Kraft führt und hervorzuheben, dass bei zu Grundelegung der Vorstellungen des 7. Kapitels über die Natur der magnetischen Kraftfelder die elektrische Kraft im Felde identisch mit Verschiedenheiten in der Drehgeschwindigkeit räumlich benachbarter Elemente ist.

15. Kapitel.

Generatoren und Transformatoren der Stromenergie.

Wir zeigten im vorigen Kapitel, dass durch die Induktionsvorgänge elektrische Energie direkt aus mechanischer gewonnen werden kann. Dies ist nun thatsächlich der Weg, den die Technik einschlägt, um diese wichtige Energieform in grossem Maassstabe zu erzeugen. Denn die Bewegung eines Leiters im magnetischen Felde ist das einfachste, bequemste und vorläufig billigste Mittel zur Produktion starker elektrischer Ströme. In der „Starkstromtechnik" wird es ausschliesslich verwendet; deshalb ist es sehr wichtig, diese Stromquelle auch in ihrer technischen Ausgestaltung kennen zu lernen.

Die im Vorhergehenden beschriebenen Anordnungen haben mehr eine didaktische, weniger eine praktische Bedeutung. Sie erläutern uns aber die Methoden auch der Starkstromtechnik wenigstens in ihren Prinzipien; wir betrachten sie nach den folgenden beiden Gesichtspunkten:

1. Das Schneiden von möglichst vielen Kraftlinien in möglichst kurzer Zeit muss das Ziel aller derjenigen Vorrichtungen sein, welche dazu bestimmt sind, diese wertvolle Energieform aus der mechanischen Energie herzustellen: der Stromerzeuger oder „Generatoren".

2. Die elektrische Energie ist durch die beiden Faktoren der Stromstärke i und der E.M.K. z bestimmt. Je nach dem speziellen Bedürfnis ist es erwünscht, bei derselben Energiemenge den einen Faktor auf Kosten des anderen zu steigern. Da die E.M.K. z durch das Produkt aus gesamter Windungsfläche (§§ 216 und 236) und der Zahl der in der Sekunde zum Schnitt gebrachten Kraftlinien bestimmt ist, so wird durch geeignete Abänderung einer der beiden Grössen ein Transformieren der elektrischen Energie auf höhere oder auf niedrigere E.M.K. oder Spannung möglich; dies geschieht in den „Transformatoren".

Bei der folgenden Beschreibung der beiden Arten von Vorrichtungen kann es uns nur auf schematische Skizzen ankommen, da hierüber eine solche Fülle vorzüglicher Darstellungen auch in allgemein verständlicher Form existiert, dass

der Leser nach dieser Seite hin sich über alle Einzelheiten leicht wird orientieren können. In der technischen Litteratur spielt, in den meisten Fällen wenigstens, der Kraftlinienverlauf bereits die wichtigste Rolle.

A) Generatoren.

242. Die magnetelektrische Induktionsmaschine. — Nach dem Bekanntwerden der Induktionserscheinungen musste das Augenmerk vornehmlich darauf gerichtet sein, durch kontinuierliche Drehungen andauernde Ströme zu erzeugen, denn Drehbewegungen stellen sowohl die natürlichen Arbeitskräfte, Wasser und Wind, wie auch die Dampfkraft in hinreichender Stärke zur Verfügung. Die FARADAYsche Scheibe § 223 erfüllt zwar diese Bedingung, aber ihre Ergiebigkeit an elektrischer Energie ist doch klein und kann nicht über ein gewisses Maass gesteigert werden.

Es hat verhältnismässig lange gedauert, bis man wirksame Maschinen dieser Art erfand. Wir teilen hier zunächst eine einfache übersichtliche Anordnung mit, die im Prinzip auch heute noch vielfach in Anwendung ist und wollen an diesem Modelle dann schrittweise diejenigen Veränderungen direkt anbringen, welche schliesslich zu den neueren Maschinentypen geführt haben.

Diese genetische Darstellung dürfte besonders für den Unterricht wichtig sein. Die Modelle der wichtigsten Ankerformen, mit denen wir unsere Maschine der Reihe nach ausrüsten werden, sind so eingerichtet, dass sie vor den Augen der Schüler oder von diesen selbst bewickelt werden können, und dass alle Einzelheiten der Wickelung klar zu Tage liegen, was bei fertigen Ankern meist nicht der Fall ist. Auch die Umwandlung der Maschine in eine Wechselstrom- und Drehstrommaschine, sowie in eine Haupt- oder Nebenschluss-Dynamo (siehe weiter unten) lässt sich leicht in der Vorlesung selbst vornehmen. Dadurch wird der ganze Entwickelungsprozess der Starkstromgeneratoren, sowie deren Prinzipien und Einzelheiten selbst sehr gut veranschaulicht.

Modell einer einfachen magnetelektrischen Maschine.

Auf die vertikal nach oben ragenden Polenden des Hufeisenmagazins $H\,H$, Fig. 105, werden Polschuhe aus Gusseisen N und S gesetzt, welche ähnlich wie die innen eben abgeschnittenen Schuhe N und S, Fig. 96, mit zwei Lappen über die Schenkelenden greifen. Ihre Innenflächen sind hohlcylinderförmig gestaltet. Auf das obere Brett B_3 des das Magnetsystem haltenden Gestelles mit den Trägern $T\,T$ ist das Grundbrett $G\,G$ des kleinen Apparates S gesetzt; dasselbe greift mit einem unten befestigten Holzklotz K in den Ausschnitt des Brettes $B_3\,B_2$ zwischen den Magnetschenkeln $H\,H$ hinein; seitliche Ausschnitte gestatten es über die Magnetschenkel und die Polschuhe zu schieben. Auf diesem Brette $G\,G$ erheben sich zwei vertikale Ständer S_1 und S_2, vergl. auch die Oberansicht Fig. 106, welche die Holzachse A tragen. Diese ragt mit ihrem verjüngten Ende in eine Bohrung des rückwärts gelegenen Ständers S_2 und ist mit einem halsartig verengten Teile in einen Ausschnitt des vorderen Ständers S_1 gelagert. Hier wird sie durch ein darüber gesetztes Keilstück k, welches durch den Stift s in seiner Lage befestigt ist, am Herausspringen gehindert. Nach dem Herausnehmen von s und k

kann auch die Achse A leicht aus ihren Lagern gehoben werden. Vorn ist an ihr die Kurbel C befestigt. Innerhalb des Lagers S_1 sind in die Achse die beiden messingenen Halbcylinder c_1 und c_2 in geeigneten Ausschnitten eingesetzt. Die Cylinder sind beiderseitig durch eine schmale Fuge voneinander getrennt; beide tragen je eine aufgelötete Öse aus kurzen Messingrohrstücken o_1 und o_2. In diese können die Enden eines rechteckigen Bügels $B\,B$ aus dickem Kupferdrahte festgesteckt werden, dessen schmale hintere Querseite in dem bis zur Achsenmitte hinabreichenden Ausschnitte a ruht; in diesem wird der Draht durch den von rückwärts her übergeschobenen Stift t festgehalten.

Auf den Halbcylindern c_1 und c_2 schleifen die Federn F_1 und F_2, welche mit den Leitungsklemmen L_1 und L_2 mittels zweier Stifte in Löchern des Grundbrettes $G\,G$ festgesteckt werden. Ausser den beiden für L_1 und L_2 benutzten enthält $G\,G$ noch zwei andere Löcher in seinem vorderen Teile, in denen bei später zu besprechenden Anordnungen andere Schleiffedern und Klemmen befestigt werden.

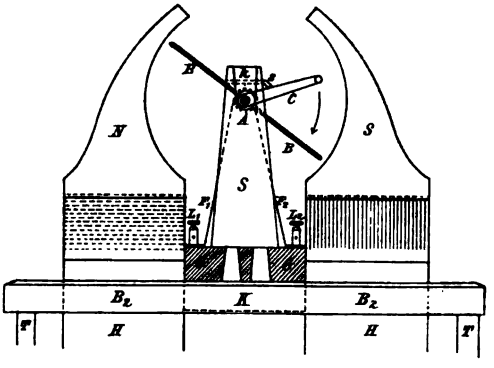


Fig. 105.

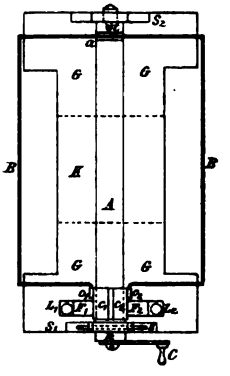


Fig. 106.

Der rechteckige Kupferdrahtbügel $B\,B$, Figg. 105 und 106, befindet sich in dem als homogen anzusehenden Magnetfelde $N\,S$, dessen Kraftlinien in der Figur von links nach rechts verlaufen. Wird er um seine Achse A durch Drehen an der Kurbel C in dem Sinne des Pfeiles Fig. 105 bewegt, so führt seine rechte Langseite B eine absteigende, die linke eine aufsteigende Bewegung in dem Kraftfelde aus. Der Rechten-Handregel entsprechend wird dadurch in dem rechten Bügelteile eine nach vorn, in dem linken eine nach rückwärts gerichtete, also der ersteren nachfolgende E.M.K. induziert. In dem ganzen Drahtrechteck wird somit für einen von oben blickenden Beobachter ein direkter Strom hervorgerufen, welcher gegen den Halbcylinder c_2 gerichtet ist und durch die Schleiffeder F_2 der Klemme L_2 zugeführt wird; diese spielt also die Rolle der K- oder +Klemme unserer Stromquelle; L_1 ist demzufolge Z- oder —Klemme.

Diese Stromrichtung entspricht der MAXWELLschen Regel, denn ein von N nach S die Schleife BB anblickendes Auge sieht den Flächeninhalt derselben bei der angegebenen Drehung und damit die Zahl der umfassten Kraftlinien sich vermehren und infolgedessen einen inversen Strom entstehen.

Hat der Bügel die Vertikalstellung passiert, so geht die absteigende Bewegung der erstgenannten Langseite in eine aufsteigende und die der anderen in eine absteigende über: die Stromrichtung kehrt sich in beiden Seiten um. Gleichzeitig tritt der Cylinder c_1 mit der Feder F_2, der Cylinder c_2 mit der Feder F_1 in Kontakt. Daher tritt auch jetzt noch der Strom bei L_2 aus der Maschine, diese Klemme ist dauernd +- oder K-Klemme. Bei abermaligem Durchgang durch die Vertikallage kehrt sich die Stromrichtung im Bügel um, bleibt aber im äusseren an L_2 L_1 angeschlossenen Leitungskreise unverändert dieselbe. Man nennt die die Richtung des induzierten Stromes vor seinem Eintritt in die äussere Leitung wendende Vorrichtung c_1 c_2 mit den dazu gehörigen Federn F_1 F_2 den „Kommutator".

Während des Durchganges durch die Vertikalstellung liegen beide Federn auf den beiden Kommutatorhälften gleichzeitig auf; der Bügel ist dann metallisch „kurz", d. h. in sich geschlossen. Da in dieser Stellung gerade keine E.M.K. geweckt wird, führt dieser Kurzschluss zu keinen Unzuträglichkeiten; die Langseiten des Drahtrechteckes gehen in diesem Momente den Kraftlinien parallel, so dass keine derselben geschnitten wird.

Versuch 95. Wenn wir die, eine einzige Drahtwindung BB enthaltende „magnetelektrische Maschine", Figg. 105 und 106, mit einer bestimmten konstanten Geschwindigkeit drehen, so erhalten wir an den Klemmen eine gewisse Spannung (Klemmenspannung § 236) und beim Schliessen der Klemmen durch einen ein Galvanometer enthaltenden metallischen Kreis einen gleichgerichteten Strom.

Derselbe ist von gleichbleibender Richtung, aber nicht von konstanter Intensität, da die in der Zeiteinheit geschnittene Kraftlinienzahl mit der Bügelstellung periodisch wechselt.

Die Ergiebigkeit dieser Maschine ist noch sehr gering. Drehen wir rascher, so steigern wir zwar die Spannung und Stromstärke, aber diese Geschwindigkeitssteigerung ist nur bis zu einer gewissen Grenze möglich. Wir wollen daher an unserer Maschine Abänderungen vornehmen, welche darauf abzielen, die geschnittene Kraftlinienzahl bei derselben Umdrehungsgeschwindigkeit zu vermehren. Dies kann auf zweierlei Weise geschehen: 1. durch Vermehrung der Windungszahl, 2. durch Verminderung des magnetischen Widerstandes in dem magnetischen Kreise der Hufeisenmagnete und ihrer Polschuhe.

Versuch 96. Die Achse der magnetelektrischen Maschine, Figg. 105 und 106, wird aus den Lagern S_1 und S_2 herausgenommen; über sie wird das Messingrohr R, Fig. 107, geschoben, auf welches ein

Messingrahmen Q gelötet ist, welcher mit einer Reihe von isolierten Drahtwindungen WW seiner Länge nach bewickelt ist (Fig. 107 stellt also einen Querschnitt durch diesen Rahmen mit den Drahtquerschnitten der Wickelung dar). Jede einzelne Windung hat (nahezu) die Form des Drahtrechteckes BB in Fig. 106. Die Enden der Wickelung ragen nach vorn heraus und werden in die Ösen o_1 und o_2, Fig. 106, gesteckt. Legt man die Achse wieder ein und dreht den Drahtrahmen zwischen den Polschuhen N und S in dem Felde des Hufeisenmagazins HH, Fig. 105, so erhält man eine ausserordentlich viel höhere E.M.K. als mit einer einzigen Windung BB bei dem Versuche 95. Die in den einzelnen Windungen induzierten E.M.K. addieren sich nach § 214 und liefern eine hohe Klemmenspannung.

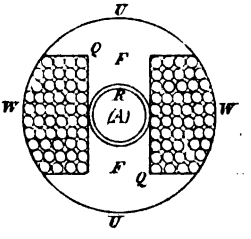


Fig. 107.

Noch ist aber nicht die zur Stromerzeugung günstigste Anordnung an unserer Maschine getroffen, denn zwischen die Magnetpole ist noch ein erheblicher magnetischer Widerstand eingeschaltet. Füllt man den Luftraum, in dem die Windungen gedreht werden, soweit mit Eisen aus als es die Drehbewegung gestattet, so werden Kraftlinien in bedeutend höherer Zahl ausgebildet.

Versuch 97. Über den Rahmen mit den Windungen wird nach Herausnehmen der Achse A aus den Lagern und dem Abziehen der Röhre R von der Achse eine Umhüllung UU, Fig. 107, aus starker Pappe gelegt, deren Boden eine kreisförmige Öffnung hat, durch die die Achse A gerade hindurchpasst. Mit dieser Hülse wird der Drahtrahmen auf die Achse geschoben, so dass der Boden derselben nach vorn, d. h. gegen den Kommutator gekehrt ist. Nachdem die Wickelungsenden in den Ösen o_1 und o_2 befestigt sind, wird der ganze Raum innerhalb UU, welchen die Drahtlagen und der Rahmen noch frei lassen, mit sehr grobem Feilicht FF, Fig. 107, angefüllt, dann ein gut anschliessender Deckel auf die Achse geschoben und diese wieder eingelegt. Dreht man jetzt mit denselben Geschwindigkeiten wie vorhin, so erhält man so kräftige Induktionsströme, dass man das Galvanometer sehr unempfindlich machen (und eventuell durch einen Nebenschluss schützen) muss, um dasselbe Instrument verwenden zu können.

243. Siemenscher Doppel-T-Anker. — Die Veränderung, welche wir im vorigen Paragraphen mit dem beweglichen Teile unserer Maschine vornahmen, haben uns zu einem der wichtigsten Teile eines wirksamen Stromgenerators geführt, zum sog. „Anker“ (auch „Armatur“ oder „Induktor“ genannt). Unter „Anker“ verstehen wir nach § 17

eine Eisenmasse, welche den sonst offenen Kraftlinienstrom eines Magnetsystems in sich aufnimmt und zu einem lediglich in guten magnetischen Leitern verlaufenden Induktionslinienkreise schliesst § 112. Die mit Eisenfeilicht gefüllte Trommel des Versuches 97 leistete diesen Dienst. Zwischen ihr und den Polschuhen des „Feldmagneten" bleibt nur noch der sehr schmale („schädliche") Raum übrig, welcher nötig ist, damit die Drehbewegung des Ankers überhaupt stattfinden kann. Alle Anordnungen, welche bei den Generatoren auf Eisenkernen die Drahtwindungen tragen, die zum Schnitt mit den Kraftlinien gebracht werden, nennt man daher „Anker". Möglichst vollkommenen Kraftlinienschluss herzustellen, ist die Hauptaufgabe aller Ankerformen. Diejenige, die wir hier erhalten haben, ist dem Prinzip nach der sog. Siemenssche Doppel-T-Anker, mit dem es dem Begründer der Elektrotechnik, Werner von Siemens, zuerst gelang, Wirkungen zu erhalten, welche weit über das bis dahin Erreichte hinausgingen.

Diese Ankerform wird auch jetzt noch häufig angewendet, z. B. bei Läutewerken, für Anrufapparate in Telephonanlagen oder zur Erzeugung der Induktionsströme bei Minenzündungen u. dergl.

Modell des Doppel-T-Ankers.

Gewöhnlich setzt man diesen Anker etwas anders zusammen, als wie wir es in § 242 gethan haben. Auf die Achse *A*, Fig. 107, werden Eisenblechscheiben, wie zwei mit ihren Schäften gegeneinander gekehrte T gestaltet, Fig. 107 *F F*, mit isolierenden Zwischenlagen (Papier) geschoben. In den zu beiden Seiten entstehenden Rinnen sind Drahtwindungen um den ganzen Kern herumgeführt.

Man muss isolierte Scheiben verwenden, damit nicht in dem leitenden Eisen Ströme induziert werden, die den in den Drähten zu induzierenden § 220 hindernde E.M. Gegenkräfte entgegensetzen würden. Durch das Aufteilen des Kerns fällt ausserdem die Arbeit fort, die sonst gegen den im Eisen induzierten Strom zu leisten wäre.

244. Der Pacinotti-Grammesche Ring. — Ein ausserordentlich wichtiger Fortschritt wurde in der Erzeugung starker Induktionsströme durch die von dem Professor Pacinotti 1864 zuerst angegebene, dann in Vergessenheit geratene und 1871 von dem Modellschreiner Gramme unabhängig davon neu gefundene Konstruktion eines Ringankers gemacht; bei demselben sind eine Reihe von Drahtspulen, welche auf einem Eisenringe sitzen und bei der Drehung desselben durch das Feld der „Feldmagnete" geführt werden, dauernd hintereinander geschaltet. Wir erläutern das Prinzip dieser Ankerform wiederum an einem Modelle, Fig. 108, welches in den Apparat Figg. 105 und 106 eingesetzt werden kann.

Modell des Ringankers. — Die Achse *A*, Figg. 105 und 106, § 242 wird aus den Lagern S_1 und S_2 herausgenommen, und an Stelle des Bügels *B B*, Fig. 106, ein Hartgummirohr *R*, Fig. 108, auf ihr mittels einer in die Vertiefung *n* gelegten und durch den Stift *t* (Fig. 106) darin festgehaltenen Feder befestigt. Dieses Rohr

trägt auf acht vorderen und ebensoviel hinteren messingenen Speichen den länglichen, zwischen die Polschuhe N und S mit etwas Spielraum passenden schmiedeeisernen Ring $E\,E$. Die Kanten desselben sind abgerundet und über ihn werden acht Spulen eines isolierten, am besten weiss übersponnenen Kupferdrahtes in einfacher Lage, wie es die Figur zeigt, gewickelt. Das Ende je einer und der Anfang der nächsten Spule werden unter je ein längliches Messingstück 1—8 geklemmt. Diese Messingstücke sind an ihrer Unterseite zum Aufnehmen der Drahtenden mit Riefen versehen und werden mittels einfacher Holzschrauben in acht Eintiefungen eines auf der Röhre R beim Abdrehen stehen gelassenen Hartgummiringes festgeschraubt. An Stelle der Federn F_1 und F_2 und der Klemmen L_1 und L_2, Figg. 105 und 106, werden in den Löchern des Grundbrettes $G\,G$ zwei Holzsäulen befestigt, welche oben die mit den Klemmschrauben K_1 und K_2 versehenen horizontalen messingenen Schleiffedern („Bürsten") B_1 und B_2 tragen.

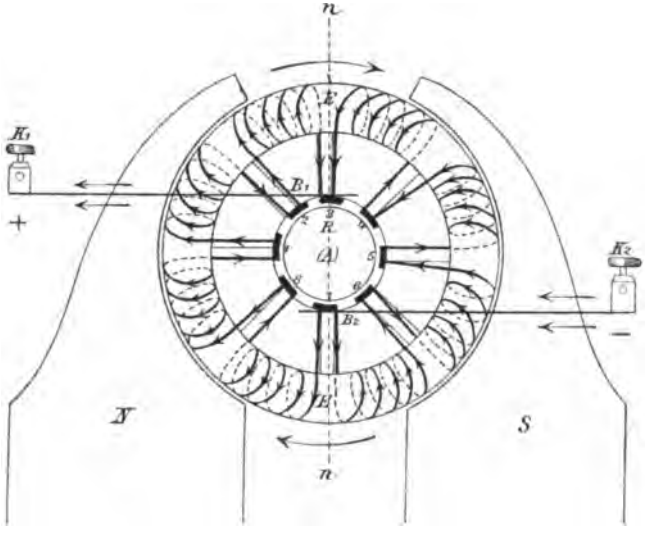


Fig. 108.

Wird der Eisenring $E\,E$, welcher die in der Fig. 108 schematisch gezeichneten Spulenwindungen trägt, zwischen den Magnetpolen N und S nach rechts herum gedreht, so wird in den von dem horizontalen Durchmesser nach oben gehenden Windungen links ein inverser Strom (von N aus gesehen) induziert, weil die einzelnen Windungen bei ihrer Bewegung immer mehr Kraftlinien aufnehmen; in den von oben herabsteigenden, rechts daneben liegenden Windungen vermindert sich die umschlossene Kraftlinienzahl fortwährend; in ihnen werden daher Zeigerströme induziert. In der unteren Ringhälfte werden rechts, wo die von jeder einzelnen Windung umschlossene Kraftlinienzahl wächst, Gegenzeigerströme induziert, links dagegen Zeigerströme. In den Windungen 3 und 7, welche gerade durch die zur Kraftlinienrichtung senkrechte

Linie nn hindurchgehen, wird keine E.M.K. induziert, weil sie sich hier den Kraftlinien parallel bewegen; man nennt diese Linie nn daher die „neutrale Linie“ oder die „Indifferenzlinie“.

Die links und rechts von der neutralen Linie in den einzelnen Windungen induzierten E.M.K. sind alle gleichsinnig hintereinander geschaltet. Alle Windungen stehen aber durch die in dem Holzring auf R eingelassenen Metallstücke paarweise miteinander in leitender Verbindung; dadurch unterstützen sich die in ihnen erregten Wirkungen. Nur in den gerade zu oberst und unterst, also neben der neutralen Linie stehenden Windungen laufen die induzierten Ströme gegeneinander an; legen wir aber an die mit ihnen verbundenen Metallstücke 3 und 7 die äussere Leitung vermittelst der Schleifbürsten B_1 und B_2 an, so wird ein Strom von B_1 und K_1 aus der Maschine heraus und die äussere Leitung (die „Nutzleitung“) entlang gehen; er kommt bei K_2 und B_2 wieder in den Anker zurück. Dieses Verhältnis ändert sich nicht beim Weiterdrehen des Ringes, denn an Stelle einer jeden Wickelung tritt sofort eine andere, gleich beschaffene, welche derselben Induktionswirkung in gleicher Weise ausgesetzt ist. Die beiden Metallstücke 3 und 7 auf R, welche eben mit den Bürsten B_1 B_2 in Berührung waren, werden dann sofort durch die nächsten zwei ersetzt u. s. f. Immer sammelt sich auf R die gesamte in der Maschine erregte Induktionswirkung. Daher heisst der isolierende Ring mit den leitenden Segmenten auch der „Kollektor“.

In den Augenblicken, in denen je eine Feder auf je zwei benachbarten Kollektorsegmenten aufliegt, sind bei dieser Anordnung Anfang und Ende der dazwischenliegenden Spulen allerdings durch das kurze aufliegende Bürstenstück direkt miteinander metallisch verbunden, „kurz geschlossen“. Dies tritt aber nur dann ein, wenn sich die Spulen so nahe den Kraftlinien parallel bewegen, dass an ihren Enden keine merkliche Spannungsdifferenz ausgebildet wird. Sie liegen dann in der „Indifferenzlinie“, welche in Wirklichkeit nicht genau senkrecht zu den Kraftlinien verläuft, sondern im Sinne der Ankerrotation etwas gegen die senkrechte Linie voran gedreht erscheint. Im gleichen Sinne sind daher auch bei entsprechenden Maschinen die Auflagerungsstellen der Bürsten voranzudrehen (um das „Funken“ zu vermeiden).

Den Kraftlinienverlauf bei dem in das Feld gebrachten Ringe erläutert Fig. 31. Die aus N austretenden Linien gehen in den Eisenring hinein, verlaufen zum grössten Teile in diesem und treten erst S gegenüber wieder aus. Dadurch kommen nur die den Polschuhen zugekehrten Hälften der Windungen zum Schnitt mit Feldkraftlinien. Würden auch die inneren Teile der Spulen eine gleiche Zahl von Kraftlinien schneiden, so würden in jeder Windung einander entgegenwirkende E.M.K. induziert werden, die sich gegenseitig aufheben. Die Führung der Kraftlinien durch den Eisenring ist also eine sehr wesentliche Vorbedingung für die Konstruktion der Maschine.

245. Der Trommelanker. — Kurz nach Grammes Erfindung des Ringinduktors konstruierte von Hefner-Alteneck einen Anker, welcher

noch immer den meisten kleineren Ankerformen als Vorbild dient. Bei ihm sind auf einer aus aufeinander geschichteten Eisenblechen bestehenden „Trommel“ die Windungen längs des Trommelmantels parallel zur Achse gewickelt und so untereinander und mit den Segmenten eines Kollektors § 244 verbunden, dass beim Drehen der Trommel im Magnetfelde die eine Hälfte der Windungen alle Ströme der einen Richtung, die übrigen alle Ströme aufnehmen, welche in der anderen Richtung induziert werden. Dabei sind alle Windungen jedesmal von dem Segmentenpaare aus, welches gerade mit den Ableitungsbürsten in Verbindung steht, zu je zwei getrennten Zweigen hintereinander geschaltet.

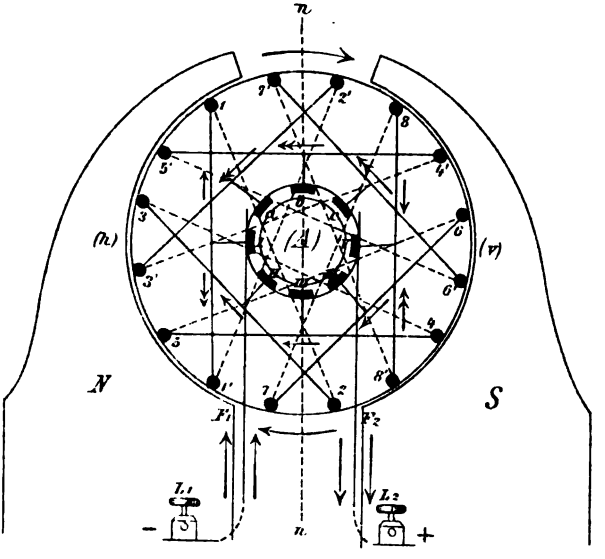


Fig. 109.

Modell des Trommelankers.

Wir erläutern die Art der Wickelung des Hefner-Alteneckschen Ankers am besten, wenn wir ein Modell desselben beschreiben, welches wiederum direkt in die kleine magnetelektrische Demonstrationsmaschine, Figg. 105 und 106, eingesetzt werden kann. An einer in die Lager S_1 S_2 passenden Holzachse hat man beim Abdrehen in der Nähe der Enden Verdickungen stehen lassen. In die vordere derselben sind parallel der Achse acht Metallsegmente (Kollektor), Fig. 109, eingelegt, in die hintere ist ein Gewinde geschnitten, auf welches eine einfache Holzmutter passt. Zwischen diese und die vordere Verdickung wird ein Satz aufeinander geschichteter, durch Papierzwischenlagen voneinander getrennter Eisenblechscheiben festgeklemmt. Dieselben haben einen Durchmesser, der sie gerade zwischen die Polschuhe N S des Hufeisenmagnetmagazins H H, Fig. 105, hineinzubringen gestattet. In die Ränder dieser Scheiben sind 16 aufeinander passende Eintiefungen eingeschnitten, in die gut isolierte dicke

Kupferdrähte eingelegt werden. In der Fig. 109 sind an den Punkten 1—8 und 1′—8′ die Querschnitte dieser an der Trommel von vorn nach hinten entlang geführten Leitungsdrähte sichtbar. Diese Drähte verbindet man am vorderen, dem Kollektorende, paarweise mit je einem Kollektorsegmente in der Weise, wie es die ausgezogenen Verbindungslinien zeigen, und klemmt ihre Enden hier fest; am hinteren Ende der Trommel sind sie so ineinander geführt, wie es die gestrichelten Linien andeuten. Diese Verbindungen sind so dicht wie möglich an der Achse vorbeigezogen.

Die so bewickelte Trommel setzt man in die Ständer S_1 S_2, Fig. 105, ein, schraubt die Kurbel C auf und legt die schon in §§ 242 und 243 benutzten Federn F_1 F_2, die zu den Klemmen L_1 L_1 führen, an.

Wird der Trommelanker, Fig. 109, rechts herum in dem Magnetfelde NS gedreht, so werden in allen der Achse parallelen zu ihren Querschnitten verkürzt erscheinenden Stücken der auf den Umfang der Trommel gelegten Wickelung links von der neutralen Linie $n\,n$ Ströme induziert, welche nach hinten (h) gehen, in allen rechts davon gelegenen Stücken solche, die nach vorn (v) verlaufen. Cirkuliert durch den Anker und eine an L_2 L_1 angeschlossene Nutzleitung ein Strom, so durchläuft derselbe die einzelnen Windungen nach folgendem Schema:

Durch L_1 tritt der Strom an der Kontaktfeder F_1 und dem am weitesten links gelegenen Segment *I* in den Kollektor ein. Hier findet er zwei Wege: nach oben zur Windung *1* hin und nach unten zur Windung *1′*. Wir wollen zuerst den oberen Weg, den wir durch einen einfach gefiederten Pfeil bezeichnen, verfolgen. Die Windung *1* ist rückwärts mit der gegenüberliegenden *2* verbunden; ging durch *1* der Strom nach hinten, so bringt ihn *2* wieder nach vorn. Er geht an das Segment *II*, da dieses aber allseitig isoliert ist und mit keiner ableitenden Feder augenblicklich in Verbindung steht, kann er hier nicht weiter und fliesst durch *3* nach hinten, durch *4* wieder nach vorn, an Segment *III* vorbei nach *5*, *6*, an *IV* vorbei nach *7* und endlich bei *8* nach vorn. Diese *8*. Windung steht in direkter metallischer Verbindung mit dem Segment *V*, von dem der Strom durch die Feder F_2 und L_2 nach aussen geführt wird. An dieser Stelle vereinigt sich der bisher betrachtete Zweigstrom nun auch mit dem durch einen doppelt gefiederten Pfeil bezeichneten anderen Zweig, welcher von Segment *I* aus in folgender Weise verläuft: *I 1′ 2′ (a) 3′ 4′ (b) 5′ 6′ (c) 7′ 8′* und von hier nach *V*. Dreht sich der Anker, so dass das nächste Segmentpaar *II* und *c* an die Federn gelangt, so ist die Verbindung genau wieder die gleiche; zwei von den abgeleiteten Segmenten abzweigende Teilströme nehmen der Reihe nach alle in den einzelnen Windungen nach vorn und nach rückwärts gerichteten induzierten Stromanteile in sich auf; da diese in den einzelnen Zweigen hintereinander geschaltet sind, so addieren sich ihre E.M.K.

Statt je einer legt man viele Windungen an jeder Stelle auf die Trommel, die man dann noch je nach Wunsch unter sich beliebig neben- oder hintereinander schalten kann. Äusserlich sieht man dann an dem Kollektorende nur die zu den einzelnen Segmenten herumgeführten Enden der Wickelungen.

246. Das Dynamoprinzip. — Der Magnetismus permanenter Stahlmagnete, wie sie zur Konstruktion der bisher betrachteten „magnetelektrischen Induktionsmaschinen" verwendet werden, ist immer nur ein schwacher, vor allem ein sich nicht dauernd in gleicher Stärke erhaltender; Temperatureinflüsse sowie Erschütterungen, wie sie im Maschinenbetriebe fast unvermeidlich sind, schwächen bald den Magnetismus selbst mächtiger magnetischer Magazine. Sehr viel stärkere Felder können wir mit Hilfe von Elektromagneten ausbilden § 185. Man erhält daher auch bei weitem kräftigere Induktionsströme, wenn man statt der Dauermagnete Elektromagnete mit eisernen Polschuhen, die den Anker möglichst weit umfassen, anwendet. Es könnte scheinen, als bedürfte man dann einer Hilfsmaschine zur Speisung der Feldelektromagnete. Werner Siemens machte dieselbe durch eine geniale Idee im Jahre 1866, welche die Entwickelung der modernen Starkstromtechnik überhaupt erst ermöglichte, entbehrlich. Er leitete den aus dem Anker kommenden Strom gleichzeitig um die Schenkel der Feldmagnete und durch die Nutzleitung. In § 186 wurde darauf hingewiesen, dass ein Elektromagnet, wenn er irgend einmal erregt worden ist, immer einen Rest seiner Magnetisierung zurückbehält: „Remanenz". Sind die Feldmagnete einmal (etwa in der Fabrik) durch einen Hilfsstrom in bestimmter Weise magnetisiert worden, so ist auch noch nach längerer Ruhe und nach den mit dem Transport und der Montage verbundenen Erschütterungen und Temperaturschwankungen etwas Magnetismus von bestimmter Richtung in den Eisenkernen der Elektromagnete und damit ein gewisser magnetischer Kraftfluss zurückgeblieben. Wird der Anker gedreht, so wird zunächst nur ein schwacher Strom induziert, weil sich dem Schnitt der Ankerwindungen nur eine geringe Zahl von Kraftlinien darbietet. Derselbe fügt aber neue gleichgerichtete Kraftlinien den noch remanenten hinzu, wenn er in geeigneter Weise um die Schenkel geführt wird. Mit der Steigerung der Kraftlinienzahl geht die der Stromstärke Hand in Hand, immer kräftigere Felder werden ausgebildet und so könnte die Steigerung der Stromstärke scheinbar ins Unbegrenzte fortgesetzt werden, wenn nicht schliesslich alle Eisenmoleküle zu magnetischen Ketten ausgerichtet wären (§ 94) und die Magnetisierung damit ihren Höchstwert erreicht hätte (Magnetisierung des Eisens bis zur Sättigung).

Dieses wirksame Prinzip der Verwendung eines in einer Induktionsmaschine erzeugten Stromes zur gleichzeitigen Magnetisierung der

eigenen Feldmagnete ist das sog. „Siemenssche Dynamoprinzip"; Maschinen, welche von demselben Gebrauch machen, nennt man „Dynamomaschinen" oder kurz „Dynamos"; im Gegensatz zu den magnetelektrischen Maschinen, bei denen Dauermagnete verwendet werden.

247. Gleichstrom-Dynamomaschinen. — Jede der in den vorigen Paragraphen beschriebenen Ankerformen führt innerhalb der Pole eines Elektromagneten, welcher durch den Ankerstrom selbst gespeist wird, rotierend unmittelbar zu einer Dynamomaschine.

Dem Modelle Fig. 105 entsprechend verwendet man eine in Fig. 110 dargestellte Form eines Elektromagneten, auf die man die schon in §§ 242—245 benutzten eisernen Polschuhe NS aufsetzen kann.

Wir heben von den zahllosen Konstruktionen nur wenige (namentlich in Laboratorien und Schulsammlungen) besonders verbreitete Typen hervor.

a) H-Dynamo der Siemenswerke. Fig. 110 stellt eine namentlich von den Siemenswerken gebaute Form, die sog. H-Type dar. Auf einer Grundplatte G erheben sich zwei Magnetschenkel und die (in der Figur fortgelassenen) Lagerböcke für die Achse des Ankers; die genannten Teile sind in einem Stücke gegossen. Um die Magnetschenkel sind die Schenkelwickelungen gelegt; nach oben zu gehen die Schenkel in die cylindrisch ausgedrehten Polschuhe NS über.

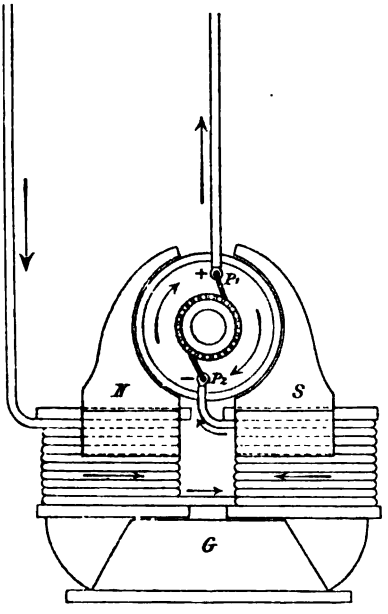


Fig. 110.

In Wirklichkeit sind diese direkt an die Schenkel angegossen und zwar mit breiterer Basis als die in Fig. 110 gezeichneten, welche dem Modell Fig. 105 entnommen sind. Man kann für diese Dynamomaschine alle früher beschriebenen Anker direkt wieder benutzen.

Die Siemensschen H-Maschinen besitzen Ring- oder Trommelanker; P_1 ist die $+$-, P_2 die $-$Polklemme. Der von P_1 kommende Strom geht in die Nutzleitung, durch diese hindurch, um die Magnetschenkel herum und bei P_2 wieder in den Anker zurück: Hauptschluss- oder Serienmaschine, weil Nutzleitung und Schenkel in einer Serie hintereinander geschaltet sind. Man kann auch die Schenkelleitung in den Nebenschluss zur Nutzleitung bringen: Nebenschlussmaschine, oder

man giebt den Elektromagneten eine doppelte Bewickelung, von denen die eine im Haupt-, die andere im Nebenschluss mit der Nutzleitung liegt: Maschinen mit gemischter Bewickelung, Kompound- oder Gleichspannungsmaschinen. Diese verschiedenen Schaltweisen kann man bei allen Dynamotypen vornehmen.

b) Flachring-Dynamo der Schuckertwerke. Fig. 111 zeigt die Schuckertsche Flachringmaschine. Auf der durch die Antriebsscheibe *D* mittels Riemen in Bewegung gesetzten Achse *A* ist der nach Art des Pacinotti-Grammeschen Prinzips, § 244, bewickelte Flachring befestigt, dessen Wickelungen nach den Segmenten des Kollektors *C* hin verbunden sind, an dem der Strom durch die Bürsten *B* abgenommen wird (in der Figur ist nur das vordere Paar sichtbar). An

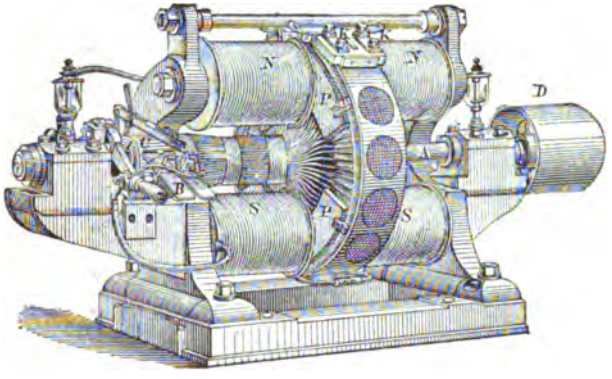


Fig. 111.

dem durch kräftige Traversen miteinander verbundenen Gestell sind zwei Paare von gegeneinander gerichteten Elektromagneten *NN* und *SS* befestigt, die gleichnamige Pole einander zukehren. Dadurch werden die Kraftlinien nach dem Ringe hingedrängt. Durch die weit übergreifenden flachen Polschuhe *PP* werden sie selbst noch den entfernteren Teilen des Ringes zugeführt. Die Induktion findet in den zur Achse senkrechten Längsstücken der Wickelung statt, da hier die in das aus Eisenlamellen zusammengesetzte Innere des Ringes in grosser Zahl eindringenden Kraftlinien hauptsächlich geschnitten werden. Dadurch, dass man dem Flachringe leicht einen viel grösseren Durchmesser als den anderen Ankerformen geben kann, wird bei diesen Maschinen schon bei mässiger Tourenzahl ein Durchschneiden der Kraftlinien mit sehr grosser Geschwindigkeit und damit eine hohe E.M.K. erzielt.

248. Mehrpolige Gleichstrom-Dynamos. — Viele der grösseren Generatorentypen sind mit mehr als einem Polpaare ausgerüstet und enthalten demgemäss auch mehrere magnetische Kreise § 112. Wir erläutern eine dieser Anordnungen an der vielverbreiteten vierpoligen Gleichstromdynamomaschine der Allgemeinen Elektricitäts-Gesellschaft, wie sie in zahlreichen Centralen sowohl für Lichtbetrieb wie zum Betrieb elektrischer Strassenbahnen in Thätigkeit sind.

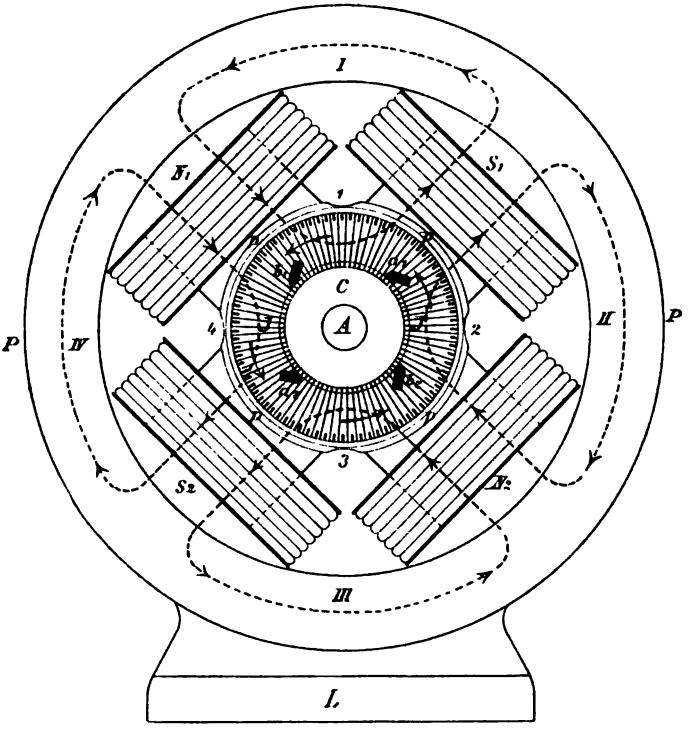


Fig. 112.

An dem mit Grundplatte und den (in der Figur fortgelassenen) Lagerböcken aus einem Stücke gegossenen vertikal stehenden grossen Eisenringe PP (dem „Polgehäuse“) verlaufen radial nach Innen vier massive Ankerkerne von kurzer gedrungener Gestalt, welche die Magnetisierungsspulen tragen. In diesen werden Gleichströme in solcher Richtung geführt, dass die Magnete abwechselnd verschiedene Polarität nach Innen kehren. Auf diese Weise werden vier gesonderte Kraftlinienströmungen erhalten.

Von dem Nordpol N_1 links oben z. B. gehen Kraftlinien sowohl zur Seite nach rechts, wo sie von der Sinkstelle des Südpoles S_1 aufgenommen werden, wie

nach unten in S_2 hinein. Dadurch entstehen die vier gesonderten magnetischen Kreise *I—IV*, von deren Kraftlinien je eine durch eine punktierte Linie angedeutet ist.

Vor den vier Magnetpolen liegen Schuhe, welche sich zu der gusseisernen, cylindrisch ausgedrehten „Polbuchse" *p* vereinigen. Damit sich an den Übergangsstellen *1—4* nicht zuviele Kraftlinien durch die Buchse hindurchziehen und dadurch im Inneren für die Induktionszwecke fehlen, ist an diesen Stellen der Querschnitt des Eisencylinders vermindert; ferner wird der magnetische Widerstand dort noch dadurch erhöht, dass von vorn nach rückwärts verlaufende Reihen von Löchern durch die Buchse gebohrt sind, welche gleichzeitig eine lebhafte Luftcirkulation gestatten.

Innerhalb der Polbuchse rotiert der Anker (Induktor) *JJ*, der auf der Achse *A* sitzt und vorn den Kollektor *C* trägt. Der Anker besteht aus schmiedeeisernen, ringförmig ausgeschnittenen, aufeinander geschichteten, voneinander isolierten Blechscheiben, welche auf einer gusseisernen Trommel befestigt sind. Diese letztere ist hohl; die sie tragenden Speichen sind wie die Flügel eines Ventilators angeordnet, so dass ein kräftiger Luftzug beständig die Ankerbleche kühlt. Der Anker selbst ist nach Art eines Ringankers § 244 gewickelt; die beiderseitig über den Ring heraustretenden Drähte sind ausserdem spiralig angeordnet, um die innere Ventilation zu befördern.

Betrachten wir eine Drahtlage, welche vor N_1 oder N_2 der Achse parallel von vorn nach rückwärts geht, so wird in dieser bei der in der Figur angenommenen Drehrichtung nach rechts ein von rückwärts nach vorn gerichteter Strom induziert; in den Windungen, welche vor S_1 oder S_2 vorübergehen, wird ein von vorn nach rückwärts verlaufender Strom von gleicher Stärke erzeugt. Jede Windung ist nun mit der um 90° davon entfernt liegenden direkt verbunden. Dadurch sind dann wie beim Pacinotti-Gramme-Ring wieder alle Windungen hintereinander geschaltet und die einzelnen E.M.K. addieren sich. Den Strom selbst nehmen zwei Paare von „Kohlebürsten" ab, die paarweise miteinander verbunden sind, a_1 mit a_2, b_1 mit b_2; erstere würden bei der gezeichneten Drehrichtung und der in der Figur angenommenen Polarität die — Spannung, letztere die + Spannung liefern.

249. Wechselstrommaschinen. — Wird ein einfaches Drahtrechteck wie der Bügel *BB* in Fig. 106 innerhalb eines Magnetfeldes Fig. 105 gedreht, so wechselt in ihm die Stromrichtung jedesmal, wenn die Ebene des Bügels die neutrale Linie (§ 242) passiert; man erhält also primär einen nach jeder Halbdrehung seine Richtung wechselnden Strom, einen „Wechselstrom". Nur durch Anwendung eines Kommu-

tators (§ 242) wird dieser Wechselstrom in einen Gleichstrom verwandelt. Für viele Zwecke eignet sich aber die ursprüngliche Form des Stromes besser und da die „Wechselstromtechnik“ eine immer grössere Bedeutung gewinnt, wollen wir kurz auch auf einige Wechselstromgeneratoren eingehen.

Modell einer einfachen Wechselstrommaschine mit Dauermagneten. Auch diese Stromform kann dem Apparate Figg. 105 und 106 entnommen werden. Die Achse A mit dem Kommutator c_1 c_2 wird durch eine andere fast gleich beschaffene ersetzt, in deren vorderes Ende aber eine Längsnut, Fig. 113, bei o_1 eingetieft ist, über welche zwei Schleifringe r_1 und r_2 geschoben werden. Der vordere Ring r_1 trägt an seiner Innenseite die in die Nut hineinragende Öse o_1; auf dem anderen Ringe r_2 ist aussen die Öse o_2 aufgelötet. Auf beiden Ringen schleifen Federn F_1 und F_2, welche den metallischen Kontakt nach den Leitungsklemmen L_1 und L_2 hin vermitteln; die Federn sind in dem Grundbrette $G\,G$, Fig. 105, befestigt. In die Ösen o_1 o_2 werden die Enden eines rechteckigen Kupferdrahtbügels $B\,B$ gesteckt, welcher wie derjenige in Fig. 106 mit seinem hinteren Querstücke in einer Vertiefung a durch einen Stift t festgehalten wird; das eine Ende geht direkt in die Öse o_2 hinein, das andere in der Nut unter dem Ringe r_2 hinweg (ohne diesen zu berühren) in die Öse o_1. Beim Drehen des Bügels bleibt jedes Ende dauernd mit derselben Feder und damit derselben Polklemme in leitender Verbindung; wenn daher die Stromrichtung in dem Bügel bei dem Durchgange durch die neutrale Linie wechselt (vergl. §§ 242 und 244), so wechselt auch die Stromrichtung in dem ganzen an die Maschine angeschlossenen Leiterkreise, wir erhalten in diesem einen Wechselstrom.

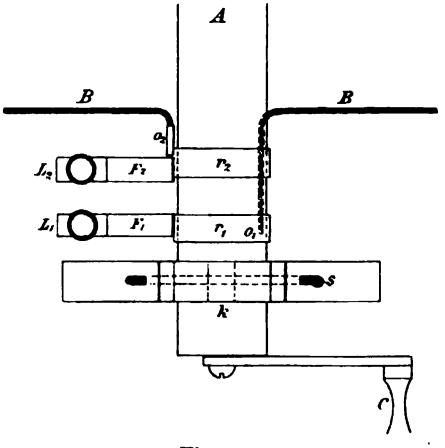


Fig. 113.

Auch hier wird die E.M.K. ausserordentlich gesteigert, wenn man statt mit einer mit einer ganzen Schar von Windungen die Kraftlinien des Feldes schneidet, wenn man also statt des Bügels $B\,B$ die Röhre R, Fig. 107, mit dem Drahtrahmen auf die Achse schiebt, wobei man die Drahtenden in die Ösen der Schleifringe steckt. Sammelt man endlich noch mehr Kraftlinien, indem man den freien Raum innerhalb der Cylinderpolschuhe $N\,S$, Fig. 105, mit feinzerteiltem Eisen, wie in Versuch 97 ausfüllt (vergl. § 242), so erhält man ein Maximum an Wirkung. Wir gelangen so zu einer „magnetelektrischen Wechselstrommaschine mit „Doppel-T-Armatur“ (§ 243). Sie ist es besonders, welche zu den in § 243 bezeichneten Verwendungen dient.

Die grossen Generatoren der Wechselstromtechnik enthalten Elektromagnete, welche durch einen besonderen Hilfsgleichstrom gespeist werden, und bestehen meist aus mehreren gesonderten magnetischen Kreisen. Auf dem Umfange eines direkt auf die Antriebswelle gesetzten

grossen Speichen-(Schwung-)Rades ist eine grössere (gerade) Anzahl von Spulen angeordnet, deren aus aufeinander geschichteten Eisenblechen bestehende Kerne radiär gestellt sind. Sie werden so hintereinander geschaltet, dass ein durch zwei Schleifringe dem ganzen Spulenkranze zugeführter Gleichstrom sie alle zu kräftigen Elektromagneten, aber mit der Reihe nach abwechselnder, nach aussen gerichteter Polarität macht. Man erhält so ebenso viele getrennte magnetische Kreise, als Spulen auf dem Rade vereinigt sind. Dieser rotierende Spulenkranz wird von einem feststehenden eisernen Ringe umgeben, welcher an seiner Innenseite eine gleiche Anzahl Spulen (ebenfalls mit zerteilten Eisenkernen) trägt. Rotieren die Elektromagnete vor diesen vorbei, so werden in ihnen Ströme von abwechselnder Richtung induziert, vergl. den Versuch 83 § 220; die Stromträger dieser Induktorspulen sind aber so hintereinander geschaltet, dass sich ihre E.M.K. addieren; sie sind also abwechselnd in dem einen und dem entgegengesetzten Sinne bewickelt. Der so induzierte Gesamtstrom wechselt jedesmal sein Zeichen, wenn die Spulen beider Kränze unmittelbar voreinander vorübergehen, und damit auf die Vermehrung der Kraftlinienzahl an jeder Stelle wieder Verminderung derselben folgt. Auf diese Weise wird ein Wechselstrom von hoher Spannung erhalten, der um so öfter seine Richtung umkehrt, je grösser die Spulenzahl ist und je schneller die Umdrehungen des Magnetkranzes erfolgen.

250. Gleichung des harmonischen Wechselstromes. — Wenn man das mit Schleifringen § 249, Fig. 113, versehene Drahtrechteck BB, Figg. 105 und 106, in dem homogenen Felde NS mit gleichförmiger Geschwindigkeit aus der Vertikallage (neutrale Linie nn) herausdreht, so werden von den Langseiten zunächst nur wenige Kraftlinien in einer bestimmten kleinen Zeit geschnitten. Die Zahl der in derselben Zeit getroffenen Kraftlinien nimmt aber in dem Maasse zu, als die Windungsebene BB sich der Horizontallage nähert; gleichzeitig nimmt die Zahl der insgesamt umschlossenen Kraftlinien N von einem Maximalwert bis zu 0 ab. Beim Passieren der den Kraftlinien parallelen horizontalen Lage ist die pro Zeiteinheit geschnittene Kraftlinienzahl und damit die E.M.K. am grössten und nimmt von da an wieder ab; beim abermaligen Durchgange durch die neutrale Linie ist die E.M.K. wieder gleich 0, da in diesem Augenblicke sich die Bügelseiten den Kraftlinien parallel bewegen; die E.M.K. wechselt hierbei ihr Zeichen, wächst wieder zu einem Höchstwerte an, um schliesslich wieder in der Ausgangsstellung bis zu 0 abzunehmen. Von hier an wiederholen sich alle einzelnen Phasen der Erscheinung in der gleichen Weise. Die Zeitdauer einer vollen Umdrehung nennt man die „Periode“ des

Wechselstromes; eine volle Periode umfasst zwei Zeichenwechsel (nach jeder Halbperiode); die Zeitdauer T der Periode und damit des Ablaufes aller Einzelmomente der Wechselstromentwickelung nennt man die „Periodendauer“. Werden r Umdrehungen in einer Sekunde vom Anker ausgeführt, so hat man $r = n$ Perioden oder $2n$ Zeichenwechsel in der Sekunde; n ist die „Periodenzahl“ oder „Wechselgeschwindigkeit“ oder „Frequenz“. Es ist $n = 1/T$ und $T = 1/n$.

Bei mehrpoligen Wechselstrommaschinen ist n gleich dem Produkte aus Tourenzahl pro Sekunde r und der halben Polzahl, d. h. der Zahl der Polpaare. Sehr häufig in der Sekunde hin- und herpulsierende Ströme nennt man Hochfrequenzströme (Tesla).

Bezeichnet man den Winkel, um den die Windungsebene BB aus der vertikalen Stellung in einem bestimmten Augenblicke t herausgedreht ist, mit ϑ, so ist bei gleichförmiger Drehgeschwindigkeit

$$\vartheta = 2\pi \frac{t}{T} = 2\pi n t.$$

Wir wollen die Abhängigkeit der E.M.K. von dem Drehungswinkel ϑ und damit der Zeit durch eine Formel darstellen, nachdem wir uns über die hier bestehenden Beziehungen im allgemeinen schon orientiert hatten.

Wenn die Ebene der einen Windung, die wir zunächst betrachten, mit der Vertikalen den Winkel ϑ bildet, so bietet sich den horizontal verlaufenden Kraftlinien NS, Fig. 105, nur eine Projektion der Fläche F dieser Windung dar, welche offenbar gleich $F\cos\vartheta$ ist. Ist $\mathfrak{H}$ die Feldstärke, so werden in dieser Stellung also $F\cos\vartheta\,\mathfrak{H}$ Kraftlinien umfasst. Sind mehrere, z. B. m, aufeinander liegende Windungen vorhanden, so umschliesst die in ihnen aufgewickelte Länge des Stromträgers bei dieser Stellung die Kraftlinienzahl

$$N = mF\mathfrak{H}\cdot\cos\vartheta = mF\mathfrak{H}\cdot\cos 2\pi n t.$$

Die induzierte E.M.K. ist aber nach Formel 39) in diesem Augenblicke

$$E = -\frac{dN}{dt} = 2\pi nFm\mathfrak{H}\sin 2\pi n t.$$

Setzen wir

$$E_0 = 2\pi nFm\mathfrak{H} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 43\,a)$$

so ist

$$E = E_0 \sin 2\pi n t = E_0 \sin\vartheta \quad \ldots\ldots \quad 43\,b)$$

Hier ist E_0 der Maximalwert der E.M.K., die sog. „Amplitude“ derselben. Diese selbst variiert wie der Sinus des Drehungswinkels; daher werden solche Wechselströme auch „Sinusströme“ genannt.

Die genau dem Gesetze der Sinusschwingung entsprechenden Schallbewegungen werden von dem Ohre als ganz besonders reiner Ton, der zu einem harmonischen Zusammenklang mit anderen solchen Tönen geeignet ist, empfunden. Erscheinungen, die wie die genannten in ihrem zeitlichen Verlaufe diesem einfachen Gesetze des Sinusverlaufes unterworfen sind, nennt man harmonisch; in diesem Sinne spricht man auch von einem „harmonischen Wechselstrome".

In Volt würde nach § 229

$$E = 2\pi n F m \mathfrak{H} \sin 2\pi n t \cdot 10^{-8}$$

sein, wenn alle anderen Grössen im C.G.S.-System § 56 ausgedrückt sind.

Um sich von dem Verlaufe der E.M.K. eines harmonischen Wechselstromes ein Bild zu machen, entwirft man eine graphische Darstellung der Sinusfunktion $y = \sin x$. Da diese im Folgenden wiederholt gebraucht wird, geben wir hier die einzelnen Ordinatenwerte y des Sinus in Centimetern für eine Viertelperiode, wobei die Argumente x (Abscissen) in Bogenmaass ausgedrückt sind, und die halbe Periode durch eine Länge von 26 cm dargestellt ist:

$x =$	1 cm	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$y =$	1,0 cm	2,0	2,9	3,8	4,7	5,5	6,2	6,8	7,3	7,7	8,0	8,2	8,3

Dem Bogen von 1 cm entspricht ein Winkel von π 57,3/26 Graden.

Für jede beliebige Vergrösserung oder Verkleinerung der graphischen Darstellung, sowie für die später auszuführende Zeichnung von proportionalen Erhöhungen oder Abflachungen der Wechselstromkurven geben die angeführten Zahlen einen ersten Anhalt.

251. Entnahme von Wechselstrom aus einer Gleichstrommaschine; Gleichstrom-Wechselstrom-Generatoren. — Auch den anderen Ankerformen kann man Wechselströme durch Anbringen von geschlossenen Ringen, auf denen Metallbürsten mit gutem Kontakt schleifen, entnehmen, wie wir dies in § 249 vom Doppel-T-Anker bereits gezeigt haben.

Da dies namentlich für Übungs- und Unterrichtslaboratorien wichtig ist, in denen vielfach nur Maschinen mit Pacinotti-Grammeschem Ringe, Flachringe oder Trommelanker gewöhnlicher Konstruktion zur Verfügung stehen, wollen wir erläutern, wie man auch aus diesen Ankern durch Anbringung einer Nebenschlussleitung Wechselstrom entnehmen kann, während ein Teil des Ankerstromes gleichzeitig noch dazu verwendet wird, um den zur Magnetisierung der Feldelektromagnete nötigen Gleichstrom zu liefern. Auf jedes einzelne Kollektorsegment Fig. 108 können, je nach seiner Stellung im Felde, sehr verschiedene E.M.K. wirken. Liegt es in der durch die Achse gehenden Horizontalen, etwa mitten vor N, also bei 1, so wirken von den links der neutralen Linie $n\,n$ gelegenen Windungen ebenso viele gegen dasselbe hin, wie von ihm weg, die induzierten E.M.K. heben sich also in Bezug auf dieses Segment 1 in dieser Stellung gerade auf. Nimmt es dagegen die Stellung 2 ein, so summieren sich die in vier Spiralen induzierten E.M.K., welche gegen dasselbe hin gerichtet sind; von ihm weg (nach oben) wirkt nur die in einer Spule geweckte E.M.K., welche ausserdem gering ist, da sich diese Spule bei der Drehung schon sehr nahe den Kraftlinien parallel verschiebt. In der obersten Stellung bei 3 endlich, wo der Gleichstrom durch B_1 abgenommen wird, ist die E.M.K. am grössten. Verfolgen wir das einzelne Segment bei der Drehung weiter, so bemerken wir, dass die nach demselben hin gerichteten E.M.K. immer kleiner werden,

dass sie bei 5 gleich 0 werden und dann der Kraftlinienschnitt im umgekehrten Sinne überwiegt, die E.M.K. also das Zeichen wechselt. Den grössten Negativwert nimmt sie bei 7 an, wo der — Pol B_2 für den Gleichstrom liegt, bei weiterer Drehung strebt der Wert wieder der 0 zu, um nach Vollendung einer Periode abermals das Zeichen zu wechseln und genau in gleicher Weise weiter zu variieren. Die E.M.K. nimmt wie beim Wechselstrom mit dem Sinus des Drehungswinkels zu und ab. Legt man an zwei sich diametral gegenüberstehende Kollektorsegmente des Pacinotti-Grammeschen Ringes, Fig. 108, also etwa an 1 und 5, die beiden Enden einer Nebenschlussleitung neben der als Hauptschlussleitung betrachteten metallischen Verbindung zwischen K_1 und K_2 an, so pulsiert durch diese Leitung ein harmonischer Wechselstrom, wenn die Enden dauernd mit denselben Elementen verbunden bleiben. Um letzteres zu bewirken, setzt man auf die Achse, die bei d den Pacinotti-Grammeschen Ringanker trägt, zwei Schleifringe auf und verbindet zwei sich gegenüber liegende Segmente durch kurze Drähte mit je einem der Ringe, auf denen die Metallfedern schleifen.

Um an dem Modelle Fig. 105 oder Fig. 110 diese Umänderung vorzunehmen, verwendet man die Achse Fig. 113, nimmt den Bügel $B\,B$ ab, setzt den Anker Fig. 108 oder Fig. 109 auf und klemmt unter zwei Diametralsegmente die plattgeschlagenen Enden kurzer Kupferdrähte fest, deren andere Enden man in die Ösen $o_1\,o_2$ der Schleifringe $r_1\,r_2$ steckt. An den Klemmen $L_1\,L_2$ erhält man beim raschen Drehen ziemlich kräftigen Wechselstrom von merklichen physiologischen Wirkungen. Diese Anordnung giebt ziemlich reinen Sinusstrom, was für viele (z. B. Mess-)Zwecke wichtig ist.

Eine vollkommen gleiche Abänderung kann man auch an Maschinen mit Trommelanker oder Flachring vornehmen; sie werden durch die Schleifringe für Wechselstromversuche verwendbar. Man spricht dann von Gleichstrom-Wechselstrom-Generatoren.

252. Mehrphasiger Wechselstrom: Drehstrom. — Gleichströme können sich bei gegebenem Stromträger nur nach ihrer Richtung und ihrer Stärke voneinander unterscheiden. Bei Wechselströmen kommt in Betracht: ihre Periode, Amplitude und noch eine dritte Grösse: ihre Phase. Ein Wechselstrom kann in einem gegebenen Augenblicke gerade im Maximum seiner Ausbildung begriffen sein ($\vartheta = 90^0$, Formel 43 b, § 250), während die Stärke eines anderen sich gerade über den Nullwert zu erheben beginnt ($\vartheta = 0^0$); man sagt dann, beide Ströme besitzen eine Phasendifferenz von 90^0 oder einer Viertelperiode. Haben beide dieselbe Periode, so bleibt diese Phasendifferenz stets dieselbe.

Hat man mit einem System von zwei oder mehr Wechselströmen derselben Periode, aber verschiedener Phasen zu thun, so spricht man von mehrphasigem Wechselstrom oder kurz von Mehrphasenstrom. Aus später ersichtlichen Gründen (§ 255) nennt man solche Ströme auch „Drehströme".

253. Zweiphasenströme. — Setzen wir auf die Achse des Pacinotti-Grammeschen Ringes, Fig. 108, vier Schleifringe, verbinden wir

zwei mit den Segmenten 3 und 7, die beiden anderen aber mit 1 und 5, so können wir der Maschine beim Drehen des Ringes zwei vollkommen getrennte Wechselströme entnehmen (der von den Bürsten B_1 B_2 abgenommene Gleichstrom dient auch hier zur Speisung der Feldmagnete). Durch Anbringung dieser Schleifringe wird also jede Gleichstrommaschine (magnetelektrische oder Dynamo) zum „Drehstromgenerator". Beide Ströme haben dieselbe Periode und ihre Intensität schwankt zwischen denselben Grenzwerten hin und her, also sind auch die Amplituden gleich. Aber in der Phase unterscheiden sie sich offenbar um eine Viertelperiode, denn die Verbindung von 1 und 5 ist in dem Augenblicke, den die Fig. 108 darstellt, nach § 251 gerade stromlos, während in der Leitung zwischen 3 und 7 der Strom eben seine Maximalstärke erreicht hat. Beim Weiterdrehen entwickelt sich im Stromkreise 1, 5 allmählich eine gesteigerte E.M.K., im Kreise 3, 7 nimmt sie ab u. s. w. Zwei derartig verlaufende Ströme nennt man „Zweiphasenströme".

Der einfache Wechselstrom, dessen Abnehmen von der Maschine wir in § 251 erläuterten, war daher als „einphasiger Wechselstrom" zu betrachten.

Man kann Zweiphasenströme noch in anderer Weise erzeugen. Auf einen Eisenring seien vier Spulen, Fig. 115, von gleicher Windungszahl in gleichen gegenseitigen Abständen gewickelt und die gegenüberliegenden paarweise, wie es die Figur zeigt, miteinander verbunden. Im Inneren des Ringes drehe sich um eine zur Ringebene senkrechte Achse ein kräftiger, durch Gleichstrom gespeister stabförmiger Elektromagnet mit breiten Polschuhen. Der Strom wird ihm auch während der Rotation durch zwei Schleifringe, an welche die Enden seiner Wickelung angeschlossen sind, dauernd zugeführt. Die von seinen Enden ausgehenden Kraftlinien gehen in den Eisenring hinein und gleichen sich zum grössten Teile in diesem aus. Dreht sich der Ring, so werden die inneren Windungen der Spulen von Kraftlinien geschnitten, es werden Ströme in ihnen induziert, aber augenscheinlich Wechselströme. Die Stromphase in dem einen Spulenpaare unterscheidet sich immer von der gleichzeitig in dem um 90° davon verschieden liegenden anderen Paare um eine Viertelperiode.

254. Dreiphasenströme. — Verbindet man drei um je 120° voneinander entfernt liegende Segmente des Kollektors einer Gleichstrom-Dynamomaschine mit drei auf der Achse befestigten Schleifringen, so kann man von diesen durch Schleifbürsten drei gleichperiodische Wechselströme von gleicher Amplitude abnehmen, welche sich um je eine Drittelperiode oder um 120° in der Phase voneinander unterscheiden: ein „Dreiphasenstromsystem".

Man kann diese drei Wechselströme in einen Punkt zusammenleiten, da sich die Summe ihrer E.M.K. immer zu 0 aufhebt.

Stellt man die E.M.K. des einen Stromes durch den Ausdruck $E = E_0 \sin 2\pi n t = E_0 \sin \vartheta$ dar, so sind die der beiden anderen durch $E_0 \sin (\vartheta - 120^0)$ und $E_0 \sin (\vartheta - 240^0)$ in ihrer Abhängigkeit von der Zeit darzustellen. Nun ist aber $\sin (\vartheta - 120^0) = \sin \vartheta \cos 120^0 - \cos \vartheta \sin 120^0$ und $\sin (\vartheta - 240^0) = \sin \vartheta \cos 240^0 - \cos \vartheta \sin 240^0$. Da aber $\sin 120^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos 120^0 = -\frac{1}{2}$, $\sin 240^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos 240^0 = -\frac{1}{2}$ ist, so ist

$$\sin (\vartheta - 120^0) = -\frac{1}{2} \sin \vartheta - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cos \vartheta$$

$$\sin (\vartheta - 240^0) = -\frac{1}{2} \sin \vartheta + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cos \vartheta.$$

Dies zu $\sin \vartheta$ addiert, giebt für alle Werte von ϑ und damit von t den Wert 0.

Ähnlich wie Zweiphasenströme kann man auch Dreiphasenströme direkt erzeugen. Auf einem Eisenringe sind sechs Spulen, je zwei einander diametral gegenüber liegende zu einem Paare hintereinander geschaltet (vergl. § 253 und Fig. 114), aufgewickelt. Im Inneren dreht sich der induzierende Elektromagnet. In den Spulen wird dann der Dreiphasenstrom erzeugt. Nach diesem Prinzip sind die grossen Generatoren der Drehstromtechnik konstruiert.

255. Das magnetische Drehfeld. — Wir kommen jetzt zu einer in der Technik immer grössere Bedeutung erlangenden Anordnung, welche zuerst von Ferraris 1888 getroffen worden ist. Er fand, dass man mittels der mehrphasigen Wechselströme ein rotierendes magnetisches Kraftfeld erzeugen könne, also ein Feld, bei dem die Kraftlinien in einer bestimmten Zeit alle Richtungen der Windrose einmal einnehmen, ohne dass ihre Dichte wesentliche Schwankungen erleidet. Um diese wichtige Erscheinung möglichst klar hervortreten zu lassen, wollen wir zuvor einen orientierenden Versuch über den Kraftlinienverlauf in einem von einem Spulenpaare in gewisser Weise magnetisierten Eisenring anstellen.

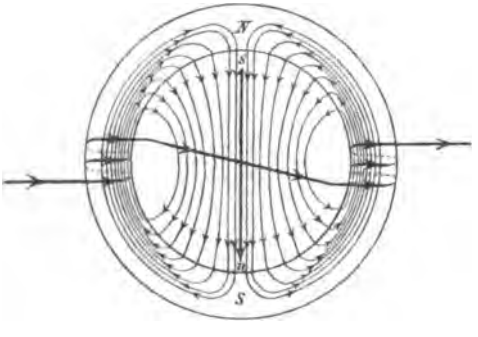


Fig. 114.

Versuch 98. Auf einen Ring aus sehr weichem Eisen, Fig. 114, von ca. 15 cm Durchmesser ist aus dickem übersponnenen Kupferdraht eine kurze

Spirale gewickelt. Das eine Ende des Drahtes wird über den Ring hinübergezogen und auf der gegenüberliegenden Seite von neuem zu einer gleich langen Spirale im gleichen Sinne aufgewickelt. Schickt man dann dem Drahte einen Gleichstrom, etwa von links nach rechts, entlang, so bildet jede Spirale in ihrem Inneren ein kräftiges Kraftlinienbündel aus; beide Bündel sind gleichgerichtet, bei dem in der Figur angenommenen Umkreisungssinne beide nach oben, so dass sich die Kraftlinien oben und unten begegnen; sie stauen sich gegenseitig zurück und drängen sich aus der Bahn von geringem Widerstande, dem Eisen, heraus in den Luftraum im Inneren des Ringes; dadurch entsteht in der einen, hier oberen, Ringhälfte eine nordpolare Quellzone, in der unteren eine südpolare Region von Sinkstellen. Die Kraftlinien ziehen sich in der zur Verbindungslinie der beiden magnetisierenden Spiralen senkrechten Richtung ziemlich geradlinig und in nahezu gleicher Dichte

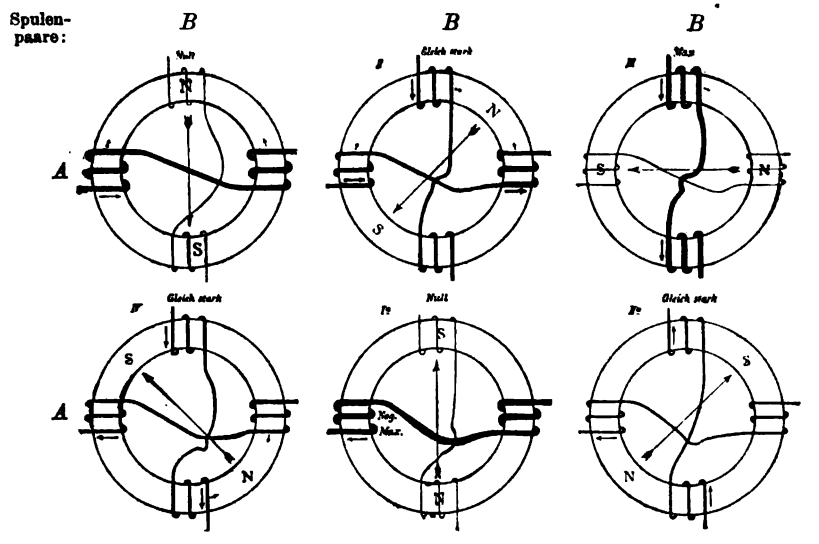


Fig. 115.

durch das Ringinnere; hier ist das Feld also beinahe homogen. Gegen die Seiten und namentlich die Spulen hin biegen die Linien um und gleichen dann in ihrem Verlaufe den Kraftlinien der Fig. 71. Eine in der Ringmitte stehende Magnetnadel stellt sich in die Richtung *N S*.

Auf einem Eisenringe, Fig. 115,[1]) befinden sich vier Spulen, von denen die gegenüberliegenden derart zu einem Paare verbunden sind, dass sie einen durch sie fliessenden Strom gleichsinnig um den Eisenring herumführen, so dass die beiden Spulen desselben Paares Kraftlinien in derselben Richtung in das Eisen des Ringes hineinschicken. Je eines dieser Spulenpaare schliessen wir in den Wechselstromkreis

[1]) Diese Figur ist dem instruktiven Vortrage von F. Braun „Über elektrische Kraftübertragung", Tübingen, Laupp 1892, entnommen.

eines Zweiphasenstromsystems ein, etwa desjenigen, welches wir, wie es in § 253 angegeben ist, dem PACINOTTI-GRAMMEschen Ringe, Fig. 108, entnehmen.

Wenn der Strom *A* (etwa der von den Segmenten 3 und 7 kommende) im Maximum seiner Stärke ist, geht die Intensität des anderen Wechselstromes *B* (von den beiden Segmenten 1 und 5 kommend) gerade durch den Nullwert hindurch. Daher bildet nur das Spulenpaar *A* Kraftlinien aus; bei der gezeichneten Stromrichtung begegnen sich die Kraftlinien derart, dass oben ein *N*-, unten ein *S*-Pol entsteht; eine Magnetnadel im Inneren zeigt daher (in der Figur) nach unten. Da wir Wechselströme haben, bleibt aber dieser Zustand nicht bestehen. Die Intensität der Komponente *A* des Zweiphasensystems sinkt von ihrem Höchstwerte wieder herab, die Intensität in *B* wächst; nach einer Achtelperiode sind beide gleich stark geworden. Jetzt bilden auch die oberen und unteren Windungen in Fig. 115 Kraftlinien aus, welche oberhalb der Horizontalen auf der linken Seite die von *A* noch kommenden, jetzt nur in geringerer Zahl ausgebildeten Linien aufnehmen und fortsetzen, rechts dagegen mit vereintem Kraftliniendruck die von unten kommenden Linien zurückdrängen und daher den Nordpol *N* nach rechts hinabdrücken. Das Umgekehrte findet unten mit dem augenblicklichen Südpole des Ringes statt, so dass die durch die Ringmitte verlaufenden Kraftlinien gegen vorhin um 45° in ihrer Richtung gedreht erscheinen. Nach Verlauf von abermals einer Achtelperiode hat Strom *B* sein Maximum erreicht, *A* ist zu Null geworden, nun verlaufen die allein von *B* herrührenden Kraftlinien im Ringinneren horizontal von rechts nach links; die Nadel folgt dieser Richtung. Die drei weiteren Figuren lassen leicht erkennen, wie bei einem gleichzeitigen Fortpulsieren der beiden Wechselströme mit ihrer konstanten Phasendifferenz von einer Viertelperiode die Kraftlinien ihre Drehung im gleichen Sinne mit derselben Rotationsperiode gleichmässig fortsetzen.

Die Nadel dreht sich mit diesem „FERRARISschen Drehfelde“ dauernd herum. Hat man nicht Zwei-, sondern Dreiphasenströme, welche durch drei Kabel von den drei Schleifringen einer der in § 254 beschriebenen Anordnungen geliefert wird, so wendet man einen Ring mit sechs Spulen an, von denen die gegenüber liegenden wie in Fig. 115 zu je einem Paare hintereinander geschaltet sind. Die freien Enden der Spule kann man in einen Punkt vereinigen („Sternschaltung“), den man eventuell noch mit der Erde leitend verbindet, da sich nach § 254 die E.M.K. dieses Vereinigungspunktes dauernd auf Null erhält. Einer besonderen Rückleitung bedarf man also hierbei nicht, man

reicht mit drei Kabeln aus, worin ein grosser Vorteil dieser Anordnungen liegt (von Dolivo-Dobrowolsky).

256. Elektrische Arbeitsübertragung. — Jede Dynamomaschinen-Anordnung setzt sich in Bewegung und wird zum Elektromotor, wenn man in sie durch die Schleifbürsten einen Strom hineinschickt. In der That würde man in den Pacinotti-Grammeschen Ring, Fig. 108, bei K_2 einen Strom ein- und bei K_1 austreten lassen, welcher also den zunächst ruhenden Ring in der Richtung der Pfeile umlaufen würde, so ergiebt die Anwendung der Linken-Handregel auf die äusseren Teile der Windungen (von den inneren werden durch die magnetische Leitung des Eisenringes Kraftlinien fern gehalten, § 244) einen elektroponderomotorischen Bewegungsantrieb an jeder Stelle, welcher den Ring im umgekehrten Sinne der eingezeichneten Pfeile (also gegen die Bürsten) zu drehen sucht.

Die so entstehenden Elektromotoren sind viel vollkommener als die in §§ 190 und 191 beschriebenen Typen, wenn sich auch nicht jede Dynamomaschine unmittelbar zum Motor in gleicher Weise eignet. Durch die gleichzeitige Verwendung von Dynamos und Motoren wird die Übertragung von Energie möglich. Die elektrische Energie lässt sich wie keine andere leicht und ohne zu grossen Verlust fernleiten, „übertragen" und andererseits bequem in jede andere Energieform z. B. auch in die mechanischer Arbeit wieder verwandeln.

Man stellt an einem Orte, wo eine Arbeitskraft, z. B. eine Wasserkraft zur Verfügung steht, eine Dynamomaschine auf, welche die dargebotene mechanische Arbeit in elektrische Energie verwandelt: „Generator". Diese Energie wird längs metallischer Leitungen auf weite Entfernungen hin, etwa nach einem Industriecentrum, übertragen. Hier wird eine zweite Maschine aufgestellt: „Receptor", welche als Motor wirkt, d. h. die elektrische Energie aufnimmt und in mechanische Arbeit zurückverwandelt.

Der erste Versuch einer derartigen Übertragung im grossen Stile war die berühmte, glänzend gelungene „Lauffener-Frankfurter Übertragung" vom Jahre 1892, bei der von einer bei Lauffen am oberen Neckar gelegenen Wasserkraft aus nach Frankfurt a. M. ca. 200 000 Watt oder 300 Pferdestärken in dieser Weise über eine Entfernung von 175 km betriebssicher übertragen wurden. Von den Niagarafällen wurden 1894 bereits ca. 50 000 Pferdestärken auf elektrischem Wege ferngeleitet.

257. Drehstrommotoren mit Kurzschlussanker. — Gerade für die Zwecke der elektrischen Arbeitsübertragung haben sich die Drehstromsysteme als überaus wirksam erwiesen. Die grosse Bedeutung der magnetischen Drehfelder § 254 beruht nämlich darauf, dass es mit ihrer Hilfe möglich wird, Motoren mit Ankern zu konstruieren, welchen

nicht durch die Vermittelung von Gleitbürsten, die sich immer sehr stark abnutzen und an denen immer viel elektrische Energie verloren geht, Strom von aussen her zugeführt werden muss, sondern die in sich kurz geschlossen werden können.

Versuch 99. In einen der in § 255 beschriebenen, mit Drehstrom gespeisten horizontal liegenden Eisenringe, Fig. 115, wird an einen ungedrillten Faden ein allseitig geschlossener Kupfercylinder so gehängt, dass er sich frei in diesem drehen kann. Sowie die Drehströme pulsieren, wird der Cylinder in Rotation im Sinne der Felddrehung versetzt. Bremst man die Drehbewegung (wobei der Cylinder warm wird), so setzt die Rotation, sowie man den Cylinder freiässt, doch im gleichen Sinne wieder ein.

Befindet sich ein leitender Körper im Inneren eines Drehfeldes, so werden durch die ihn schneidenden Kraftlinien Induktionsströme erweckt, welche nach der Lenzschen Regel § 209 sich mit ihren elektromagnetischen Rückwirkungen auf das Feld gegen die erzeugende Ursache stemmen. Das Feld rotiert unaufhaltsam weiter, so lange die Drehströme cirkulieren. Ist der Körper also frei beweglich, so wird er durch diese rückwirkenden Kräfte im Sinne der Feldrotation vorangetrieben; er findet dabei in dem Felde gewissermaassen ein Widerlager und dadurch, dass dieses sich dreht, wird der Körper mit in diese Rotationsbewegung hineingezogen.

Setzt man auf die Achse eines in sich kurz geschlossenen Ring- oder Trommelankers eine Antriebscheibe für ein Zugkraftorgan, so hat man den denkbar einfachsten, wirksamsten und haltbarsten Elektromotor. Die Drehstrommotoren eröffnen in der That der Starkstromtechnik auf dem Gebiete der Arbeitsübertragung die weitesten Perspektiven.

B) Transformatoren.

Bei jeder Änderung der Intensität eines Stromes müssen Kraftlinien in bestimmter Anzahl aus dem Felde desselben aus-, bezw. in dasselbe einwandern. Befindet sich in dem Felde eines Stromträgers mit variabler Intensität ein anderer Träger, so wird demnach in diesem bei jeder solchen Änderung ein Induktionsstrom durch die ihn schneidenden Kraftlinien geweckt. Die E.M.K. dieser induzierten Ströme lässt sich durch die Zahl der zum Schnitt gelangenden Kraftlinien in weiten Grenzen variieren. Windet man beide Stromträger zu konachsialen Spiralen auf, so ist das Verhältnis der induzierten E.M.K., das sog. Übersetzungsverhältnis oder der „Umsetzungskoeffizient“ gleich dem Verhältnis der Windungszahlen der Spiralen, falls alle Kraftlinien, welche innerhalb der einen, der „primären“ Spirale ausgebildet werden, von der zweiten, der „sekundären“ Spirale mitumfasst werden.

Denn denkt man sich dasselbe Kraftlinienbündel in beiden Spiralen entstehen oder verschwinden, so wird jedes Längenelement beider Träger von gleich viel, nämlich von allen Kraftlinien in dem einen oder dem anderen Sinne geschnitten. Die Summen aller in den einzelnen Elementen geweckten und hintereinander geschalteten E.M.K. verhalten sich nach dem Summationsprinzip also wie die in den Spiralen aufgewickelten Längen der Träger, also wie die Windungszahlen der betreffenden Spiralen.

Wir können daher einen Strom von geringer Spannung in einen solchen von hoher verwandeln, wenn wir ihn durch eine primäre Spirale von kleiner Windungszahl schicken, welche eine andere sekundäre von grosser Windungszahl umgiebt oder in ihr enthalten ist. Beim abwechselnden Schliessen und Öffnen des Primärstromes erhalten wir an den Enden der Sekundärspirale einen Strom von so viel mal höherer Spannung, als die Windungszahl dieser Spirale grösser ist als die der primären. Da bei diesem „Transformationsprozess" an sich Energie weder verloren noch gewonnen werden kann, hat der hochgespannte Strom eine entsprechend geringere Intensität.

In der Starkstromtechnik liegt auch das umgekehrte Bedürfnis vor. Zur Fernleitung elektrischer Energie eignen sich vornehmlich hochgespannte Ströme von geringer Intensität. Dieselben würden aber an der Konsumstelle eben wegen ihrer hohen Spannung gefährlich sein, man transformiert sie daher herunter auf eine nur mässige „Gebrauchsspannung", indem man sie durch die Spirale mit vielen Windungen eines Transformators sendet, aus dessen anderer kürzeren Spirale man den niedrig gespannten Gebrauchsstrom entnimmt.

Die Intensität von Gleichströmen variiert man, um sie transformieren zu können, meist durch abwechselndes Schliessen und Öffnen. Das letztere kann ohne zu grosse Nachteile nur mit verhältnismässig schwachen Strömen von geringer Spannung geschehen. In dieser Beziehung ist der Wechselstrom dem Gleichstrom überlegen. Es ist eine der wichtigsten Eigenschaften der Wechselströme, dass sie sich leicht transformieren lassen; hierauf beruht ihre grosse Verwendbarkeit namentlich bei elektrischen Arbeitsübertragungen.

Wir beschreiben zunächst einige Transformatortypen für gewöhnlichen und mehrphasigen Wechselstrom, dann die minder ökonomischen Vorrichtungen der sog. Induktorien, welche aus schwach gespannten Gleichströmen hoch gespannte, aber nicht harmonische Wechselströme erzeugen.

258. Einphasige Wechselstrom-Transformatoren. — Die wesentlichsten Bedingungen, welche ein Transformator erfüllen muss, bestehen darin, dass 1. möglichst alle Kraftlinien, welche um den primären Stromkreis herum ausgebildet werden, auch von den Windungen des

sekundären Kreises umschlossen werden und 2. dass überhaupt möglichst viele Kraftlinien bei gegebener Primär-Stromstärke ausgebildet werden, also der magnetische Widerstand in der Umgebung der Stromträger möglichst gering ist. In sehr vollkommener Weise entspricht der in Fig. 116 im Querschnitt abgebildete „Ringtransformator" (Zipernowsky-Déri) diesen Anforderungen. Der isolierte dicke Primärleiter PP ist zu wenigen Windungen einer ebenen flachen Spule vereinigt, ihnen parallel laufen die direkt anliegenden, sehr viel zahlreicheren Windungen der gut isolierten Sekundärspule SS; beide sind quer zu

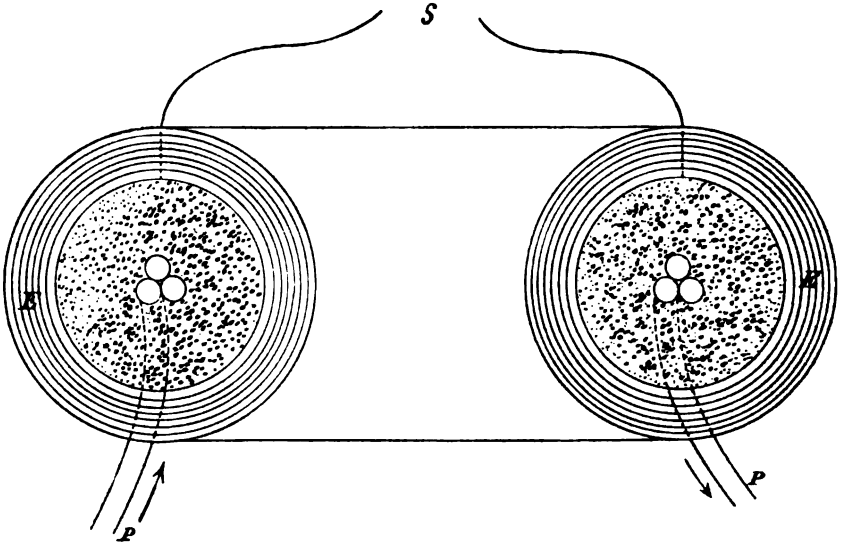


Fig. 116.

ihrem Verlaufe mit Eisendrähten EE dick umwickelt, so dass im ganzen ein Ring von kreisförmigem Querschnitt entsteht.

Die Fasern der Eisenhülle folgen sehr nahe dem Verlaufe der Stromkraftlinien, wie ein Vergleich mit der Fig. 71 zeigt; diese finden also überall ein Medium von vorzüglicher Permeabilität. Der Verlust durch Streuung von Kraftlinien in den umgebenden Luftraum hinaus ist sehr gering. Dadurch, dass die umhüllende Eisenmasse auch der Längsrichtung der Stromträger nach aufgeteilt ist, können in diesem keine störenden Nebeninduktionsströme auftreten, der Bildung von Wirbelströmen § 220 ist daher auf das Wirksamste vorgebeugt. Bei einer anderen Type derselben Ingenieure befindet sich der ringförmige Eisenkern innen; auf ihn sind die primären und sekundären Windungen gewickelt.

Wir erwähnen noch die Doppel-E-Type (Schuckert), Fig. 117; Primärwindungen PP und sekundäre SS sind auf demselben Eisenkerne nebeneinander aufgespult. Damit die aus den Spiralen hervortretenden

Kraftlinien (Fig. 71) möglichst nur durch weiches Eisen geführt werden, schliessen sich an die Kernenden beiderseitig Querstücke an, welche über und unter den Spiralen durch Schlussstücke vereinigt sind. Auch hier sind nicht massive Eisenstücke verwendet, sondern zur Vermeidung von Wirbelströmen Eisenbleche, welche aufeinander geschichtet sind. Sie haben die Form eines **E** und sind von beiden Seiten her gegeneinander geschoben, wie in der Figur durch die vertikale punktierte Trennungslinie angedeutet ist. Ist hier der Kraftlinienschluss auch kein so vollkommener wie bei der Ringtype, da ja Kraftlinien auch nach vorn und rückwärts aus dem Inneren der Spiralen hervortreten, so kann man doch bei Reparaturen (etwa nach Durchschlagen der Isolationen) leichter zu den einzelnen Windungen im Inneren gelangen als bei dem Ringtransformator.

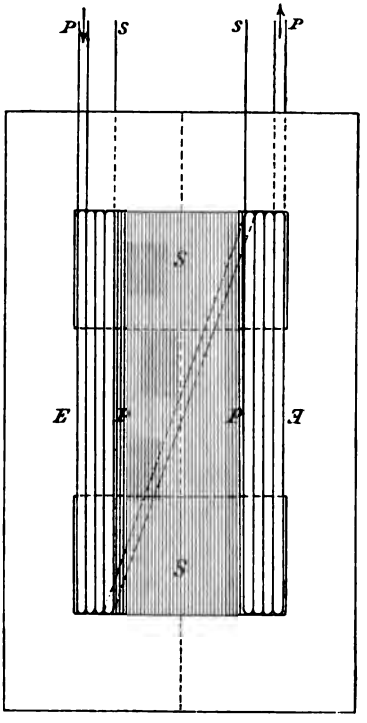


Fig. 117.

259. Drehstrom-Transformatoren. — Um Drehströme zu transformieren, kann man in jede einzelne Leitung einen besonderen Transformator der im vorigen Paragraphen beschriebenen Art einschalten. Wie man aber beim Dreiphasenstrom durch Zusammenschliessen der drei Leitungen in einem Punkte die Rückleitung und damit Kupfer erspart, so kann man die drei Transformatoren in einem einzigen vereinigen und die Konstruktion erheblich vereinfachen, indem man sie in denselben Eisenmantel einschliesst. Einen Transformator für dreiphasige Wechselstromsysteme erhält man, wenn man Bleche, welche wie in Fig. 118 ausgeschnitten sind, aufeinander schichtet und die drei Schenkel *I*, *II*, *III* mit je einer primären und einer sekundären Wickelung versieht. In dem Spulenkranze *KK* pulsieren dann die Kraftlinien ähnlich wie im dreiphasigen Drehfelde.

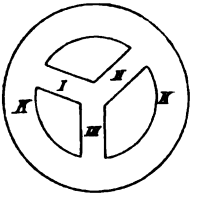


Fig. 118.

Von grosser Bedeutung sind ferner auch die sog. „Phasentransformatoren", d. h. Anordnungen, welche z. B. mit Dreiphasenstrom

gespeist werden, und denen ein- oder zweiphasiger Wechselstrom entnommen werden kann oder umgekehrt. Wird z. B. dem mit zwölf Spulen bewickelten Eisenringe (aus Eisendrahtbündeln) Fig. 119 durch die drei Speiseleitungen A, B, C Dreiphasenstrom zugeführt, so bildet sich in ihm ein magnetisches Drehfeld § 255 aus. Legt man eine Zweigleitung bei A und A' oder D und D' an, so wird durch diese gewöhnlicher einphasiger Wechselstrom pulsieren; verwendet man sie beide gleichzeitig, so erhält man ein zweiphasiges Stromsystem (Silvanus Thompson).

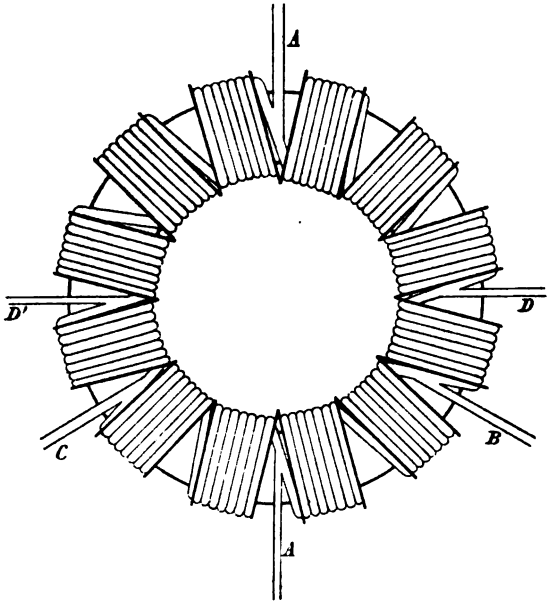


Fig. 119.

260. Induktionsapparate. — Auf ein geradliniges Bündel ausgeglühter weicher, voneinander durch einen Lacküberzug getrennter Eisendrähte ist eine (primäre) Spirale von wenigen Windungen eines dicken Drahtes gewickelt. Über diese ist — oft auf einem Schlitten verschiebbar („Schlittenapparat") — eine zweite (sekundäre) Spirale von vielen Windungen eines gut isolierten, sehr langen Drahtes gewickelt. Durch die primäre Spirale wird ein schwach gespannter Gleichstrom geschickt, welcher durch einen der in § 186 erwähnten automatischen Stromunterbrecher abwechselnd geschlossen und geöffnet wird. Bei jedem Stromschluss wird ein entgegengesetzt gerichteter, bei jeder

Öffnung ein gleichgerichteter Strom in der sekundären Spirale induziert § 219, dessen Spannung um so höher ist, je mehr Kraftlinien der primären Spirale die sekundäre schneiden.

Die so erhaltenen Wechselströme haben infolge ihrer hohen Spannung eine grosse physiologische Wirkung und eine erhebliche Durchschlagskraft, z. B. in Luftschichten oder verdünnten Gasen (Geisslersche Röhren). Die E.M.K. des Schliessungsstromes ist nicht so hoch wie die des Öffnungsstromes, weil die Stromöffnung schneller abläuft, dieselbe Kraftlinienzahl also in kürzerer Zeit zum Schnitt mit den sekundären Windungen gelangt. Die Induktorien nutzen, weil sie nicht geschlossene magnetische Kreise enthalten und ihre Eisenkerne kraftlinienstreuende Enden haben, die magnetisierende Wirkung des Primärstromes nur sehr unvollkommen aus (Kraftlinienstreuung). Wir bedürfen hier aber gerade der „entmagnetisierenden Wirkung der freien Enden“ (§ 96), um bei der Stromöffnung ein möglichst schnelles Verschwinden des gesamten magnetischen Induktionsflusses und damit eine Transformation auf hohe Spannung zu erzielen.

16. Kapitel.

Die Koeffizienten der Selbstinduktion und der wechselseitigen Induktion. Analogien mit den Cykelbewegungen.

In allen Fällen, in denen die Intensität eines Stromes nicht konstant bleibt, also vornehmlich während des Schliessens und Öffnens, wird für den Stromverlauf eine Grösse bestimmend, welche für die ganze Leiterbahn und ihre Teile charakteristisch ist, der „Selbstinduktionskoeffizient". Ist einer Leiterbahn eine zweite benachbart, so tritt eine andere Grösse mit ins Spiel, welche die wechselseitige induzierende Wirkung beider Kreise aufeinander bestimmt: der „Koeffizient der wechselseitigen Induktion". Beide Koeffizienten gewinnen eine ganz hervorragende Bedeutung in allen Fällen, in denen die Stromstärke periodisch wechselt, also z. B. bei den Sekundär- oder Extraströmen von Induktorien (Farad-Ströme in der Elektromedizin) und bei den ein- und mehrphasigen Wechselströmen in der Technik. Wir nehmen daher diese Konstanten den anderen, z. B. der Widerstandsgrösse voraus, zu der wir erst im 17. Kapitel kommen.

Die beste Beschreibung und klarste Bestimmung der in Rede stehenden Koeffizienten gewinnt man wiederum an der Hand des Kraftlinienbegriffes. Zugleich soll uns die Erläuterung dieser Grössen zu dem vorläufigen Hinweise dienen, wie fruchtbar das Heranziehen cyklischer Bewegungsvorgänge als Parallele zu den hier zu betrachtenden elektrischen Erscheinungen ist.

A) Die Selbstinduktion.

261. Begriff der Selbstinduktion. — Wir denken uns eine ebene Leiterschleife, etwa die der Fig. 50, an eine Stromquelle angeschlossen, welche in derselben einen Strom von der in Fig. 50 bezeichneten, der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzten Richtung erzeugt. Von dem

Momente des Stromschlusses an bildet sich um die Leitungsbahn herum ein magnetisches Feld aus, mehr und mehr Kraftlinien werden in der Schleife gesammelt, welche in unserem Falle gegen den Beschauer gerichtet sind.

Dieses Ansammeln von Kraftlinien dauert so lange an, bis der Strom von der Intensität $i = 0$ bis zu seiner schliesslichen Intensität $i = J$ angewachsen ist; denn zu jedem besonderen Werte der Stromstärke i gehört eine ganz bestimmte Anzahl n von hindurchgehenden Magnetkraftlinien, welche mit i proportional wächst, von $n = 0$ an bis etwa $n = N$ (vergl. § 165).

Nach § 213 ist aber jede Vermehrung der Kraftlinienzahl innerhalb einer geschlossenen Leiterbahn mit dem Auftreten eines inversen Induktionsstromes verbunden. In der Leiterschleife wird also bei dem Anwachsen von i ein Strom induziert, der von rückwärts gesehen (im Kraftliniensinne) der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt, von vorn im Uhrzeigersinne verlaufend erscheint. Diese Richtung ist aber augenscheinlich derjenigen des sich ausbildenden und von $i = 0$ bis $i = J$ anwachsenden Stromes entgegengesetzt. Beim Entstehen, Anwachsen, d. h. Verstärken eines Stromes wird in der Leiterbahn durch diesen Vorgang selbst eine E.M.K. induziert, welche der Richtung des entstehenden Stromes entgegen gerichtet ist.

Man nennt diese Erscheinung „Selbstinduktion“ und den hinzutretenden entgegen fliessenden Strom: den in der Leiterbahn selbst induzierten „Extrastrom“.

Zur Orientierung bezeichnet man an dem Modelle Fig. 52 durch einen kräftigen roten Pfeil die Richtung des ursprünglichen Stromes, wie er der Kraftlinienrichtung und der Bewegung der durch das Innere gehenden Wirbelfäden entspricht. Fügt man dann einen kleinen Pfeil an der Strombahn hinzu, welcher die einer Vermehrung der umschlossenen bewegten Elemente entsprechende Induktionsrichtung angiebt, so erkennt man, dass dieser Pfeil immer dem ersten entgegenweist und durch ihn daher gewissermaassen ein Rückstoss sämtlicher Bewegungen längs der Leiterbahn veranschaulicht wird. Die ältere Theorie sprach in der That in diesem Sinne von einer Art „elektromotorischer Gegenkraft“, welche sich einer E.M.K. entgegenstellt, wenn diese einen Strom oder eine Änderung in der bestehenden Stromstärke hervorzurufen sucht.

Bei Unterbrechung des Stromes verschwinden auch alle Kraftlinien; ihre Gesamtzahl sinkt von ihrem Anfangswerte N bis zu 0 herab. Wird der Strom nur geschwächt, so tritt ebenfalls eine Verminderung der Zahl etwa von N bis zu n ein. In jedem Falle wird durch diese Verminderung ein direkter Strom induziert, der dem eben verschwindenden gleich gerichtet ist.

Dieses „direkt" bezieht sich wie immer auf eine Betrachtungsrichtung im Sinne der Kraftlinien, also in Fig. 50 von rückwärts nach vorn. Folglich muss hier der induzierte Strom dem Betrachter der Figur invers erscheinen.

Beim Vergehen, Abnehmen, d. h. Schwächen eines Stromes wird in der Leiterbahn durch diesen Vorgang selbst eine E.M.K. induziert, welche der Richtung des vergehenden Stromes gleich gerichtet ist.

War der Extrastrom der Stromschliessung dem entstehenden Strome entgegengesetzt gerichtet, so verläuft der Öffnungs-Extrastrom mit dem eben verschwindenden oder abnehmenden Strome gleichsinnig.

Macht man sich dies an dem Modelle Fig. 52 durch die beiden Pfeile klar, so sieht man, wie dieser Extrastrom gewissermaassen aus einem Nachdauern der elementaren Bewegungen hervorgeht, geradeso, als ob den Mechanismen, welche sie ausführen, eine gewisse „Trägheit" innewohnte.

Die Erscheinung der Selbstinduktion geht also mit Notwendigkeit aus dem Umstande hervor, dass die Strombahn bei jeder Veränderung der Stromstärke und damit der durch sie gemessenen Kraftlinienzahl, welche sie umschliesst, von ihren eigenen ein- bezw. austretenden Kraftlinien geschnitten wird. Alle Teile der Strombahn sind hierbei beteiligt, da sie alle Träger von Kraftlinien sind; wir brauchen die Betrachtungen daher nicht auf eine einzelne Leiterschleife zu beschränken, sondern können sie auf die ganze Bahn ausdehnen (vergl. § 155). Die Selbstinduktion ist also eine an jede Leiterbahn geknüpfte Eigenschaft. Ihre Wirkung muss um so grösser sein, je mehr Kraftlinien von der Leiterbahn oder einzelnen ihrer Teile umschlossen werden.

Winden wir ein Stück des Trägers zu einem Solenoïd zusammen, so umfassen die dasselbe begleitenden Kraftlinienringe zugleich eine ganze Reihe von Windungen, Fig. 73. Das Zucken der Rogerschen Spirale § 199 gab uns das elektrodynamische Anzeichen für diese innige Verkettung der Kraftlinien mit den Windungen des Trägers. Die erhöhte Selbstinduktion solcher Spiralen ist dann der induktorische Ausdruck für die veränderte Feldbeschaffenheit. Noch mehr wird die Wirkung der Selbstinduktion gesteigert, wenn innerhalb der Leiterbahn Kraftlinien durch weiches Eisen gesammelt werden. Daher haben Elektromagnete eine ausserordentlich hohe Selbstinduktion.

Nähere Angaben hierüber folgen erst später, wenn wir den zeitlichen Verlauf dieser Extraströme genauer ins Auge fassen.

Für viele Zwecke ist es wichtig, „induktionsfreie Wickelungen" zu besitzen. Man legt dann gleich lange Teile der Strombahn so dicht nebeneinander, dass möglichst wenige Kraftlinien zwischen ihnen hindurch gehen können und wickelt diesen Doppelleiter zu einer Spirale auf; durch den gleich starken hin- und hergehenden Strom werden fast alle Kraftlinien aus dem Inneren der Spirale herausgedrängt.

262. Der Koeffizient der Selbstinduktion, die Induktanz. — Nach § 165 ist die Zahl n von Kraftlinien, welche durch irgend einen Teil einer Strombahn hindurchgeht, oder die gesamte Kraftlinienzahl, welche diese überhaupt begleitet, der Stromstärke i proportional.

Denn die Stromstärke bestimmt in jedem Feldpunkte die daselbst herrschende Feldstärke $\mathfrak{H}$, d. h. die Zahl der an dieser Stelle durch die Flächeneinheit gehenden Linien. So ist $\mathfrak{H}$ für das Innere einer ebenen Kreisschleife vom Radius R nach § 165 gleich $\frac{2\pi}{R} \cdot i$, für das Innere einer Spirale von der Länge l und der Windungszahl m ist nach § 184 $\mathfrak{H} = \frac{4\pi m}{l} \cdot i$, wenn die Stromstärke i in absoluten E.M.Einheiten gemessen wird (1 Einheit = 10 Ampère). Ist also Q Quadratcentimeter der Querschnitt der Spirale, so gehen durch ihr homogenes Innere an jeder Stelle $\frac{4\pi m Q}{l} \cdot i$ Kraftlinien; jede einzelne der m-Windungen umschliesst diese Anzahl. Die gesamte von dem zur Spirale aufgewickelten Teile der Strombahn umschlossene Kraftlinienzahl ist also $n = \frac{4\pi m^2 Q}{l} \cdot i$. Ist das ganze Innere mit einem Medium von der Permeabilität μ erfüllt, so erhöht sich dieser Betrag auf das μ-fache, so dass wir erhalten

$$n = \frac{4\pi\mu m^2 Q}{l} \cdot i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 44)$$

Der mit i multiplizierte Quotient stellt für den vorliegenden Fall den Proportionalitätsfaktor dar, der, wie man sieht, nur von der geometrischen Beschaffenheit des Leiters und der Natur des Feldmediums abhängt. Da immer Proportionalität zwischen n und i besteht, so können wir ganz allgemein die Zahl der umschlossenen Kraftlinien setzen:

$$n = L \cdot i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 45)$$

indem wir mit L den Proportionalitätsfaktor bezeichnen.

Man nennt diese Zahl n das (magnetische) „Moment" der Strombahn oder des betrachteten Teiles (einer Leiterschleife). Der Koeffizient L hängt ganz allgemein nur von der geometrischen Form, der Grösse der Bahn und der Natur des umgebenden Mediums ab.

In dem eben genannten Beispiele hat dieser Koeffizient den Wert

$$L = \frac{4\pi\mu m^2 Q}{l}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 46)$$

er ist also durch die Grösse der Windungsfläche Q, die Zahl m der Einzelwindungen, die Dichte, mit der sie nebeneinander angeordnet sind (m/l) und die Permeabilität des das Innere füllenden Mediums bestimmt.

Verändert sich durch irgend einen Umstand die Zahl n der umschlossenen Kraftlinien, so macht sich nach § 237 die Selbstinduktion in der Leiterbahn derart geltend, dass die E.M.K. gleich der pro Zeiteinheit im Ganzen geschnittenen Kraftlinienzahl ist. Da die die Zahl n vermehrenden oder vermindernden Kraftlinien in unserem Falle zugleich die schneidenden sind, so ist nach Formel 39)

$$e = -\frac{dn}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 47)$$

die E.M.K. der Selbstinduktion.

Die rechte Seite der Gleichung ist äquivalent mit den beiden Gliedern

$$e = -\left(L \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot \frac{dL}{dt}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 48)$$

Die E.M.K. der Selbstinduktion setzt sich also aus zwei Teilen zusammen. Die umschlossene Kraftlinienzahl n kann sich ändern a) dadurch, dass bei unveränderter Gestalt, Grösse und Umgebung der Strombahn (L konstant) die Stromstärke geändert wird; darüber giebt das erste Glied Rechenschaft; b) dadurch, dass bei konstant erhaltener Stromstärke (i konstant) die Grössen geändert werden, von denen L abhängt; den dadurch hervorgerufenen Betrag an E.M.K. misst das zweite Glied.

Durch Änderungen der zweiten Art haben wir im 13. Kapitel die verschiedensten E.M.K. geweckt, indem wir durch Gleitstücke die Grösse von Leiterschleifen variierten, durch Drehen von Spulen ihre Querschnittsfläche in Bezug auf die Kraftlinienrichtung aus Kreis- in Ellipsenflächen verwandelten oder Eisenkerne in der Nähe stromdurchflossener Leiterbahnen bewegten.

Hier haben wir uns den durch das erste Glied beschriebenen Veränderungen zugewandt; bei diesen ist L konstant und i variabel. Die die dabei erhaltenen Erscheinungen näher bestimmende Konstante L nennt man „den Koeffizienten der Selbstinduktion".

Den auf Selbstinduktion zu setzenden Anteil der E.M.K. e wollen wir durch e_s bezeichnen. Neben der Gleichung 45) erhalten wir also für L die folgende Definitionsgleichung

$$e_s = -L \frac{di}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 49)$$

Die E.M.K. e_s ist auch hier durch die in der Zeiteinheit zum Schnitt gelangende Kraftlinienzahl bestimmt, eine Zahl, welche wir früher § 226 für ein einzelnes Gleitstück durch z bezeichneten. Da die E.M.K. der Selbstinduktion immer der von aussen wirkenden und die Strombildung veranlassenden oder steigernden E.M.K. entgegengesetzt gerichtet ist, so ist bei numerischer Gleichheit von z und e_s doch nicht $e_s = z$, sondern $e_s = -z$ zu setzen.

Ebenso wie früher ist die auf die Zeit dt, während der die Stromstärke den Wert i hat, bezogene Arbeit gleich dem Produkte $e_s i dt$ zu setzen. Es ist immer $dA = z i dt = -e_s i dt$.

Die Bezeichnung, welche die ältere Theorie für diesen Begriff entwickelt hatte (Selbstpotential oder Potential der Leiterbahn auf sich selbst) hat sich (in der Technik wenigstens) nicht so eingebürgert, wie die Bezeichnung „Induktanz", die wir in Übereinstimmung mit dem jetzt üblichen Sprachgebrauche für L der Kürze willen einführen wollen, und welche vollständig mit der hier gegebenen Ableitung des Begriffes konform ist.

Nach der Gleichung 49) misst die Induktanz die E.M.K., d. h. die Zahl von schneidenden Kraftlinien bei der Änderung der Stromstärke um eine Einheit in

der Zeiteinheit. Man kann auch sagen: Die Induktanz ist der Faktor, mit dem man die Änderungsgeschwindigkeit der Stromstärke i im Leiter in jedem Augenblick zu multiplizieren hat, um die E.M.K. der Selbstinduktion zu erhalten.

263. Dimension der Induktanz. — Da die Induktanz nach 49) durch das Verhältnis einer E.M.K. zu der zeitlichen Änderung einer Stromstärke bestimmt ist, so ergiebt sich die Dimension dieser für jeden Leiter charakteristischen Grösse sehr einfach aus dem Bisherigen. Nach § 166 ist $\dim i = \mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-1}$, also $\dim \frac{di}{dt} = \mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-2}$, und da nach § 228 jede E.M.K. die Dimension $\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-2}$ hat, so ist

$$\dim L = \frac{\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-2}}{\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-2}} = \mathrm{cm};$$

die Induktanz hat also in unserem (E.M.-)System (§ 166) die Dimension einer reinen Länge.

So war für die Spirale nach § 262, Formel 46) in der That

$$\dim L = \frac{4\pi\mu m^2 Q}{l} \cdot \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{cm}} = \mathrm{cm}.$$

264. Praktische Einheit der Induktanz: der Erdquadrant. — Schon mässig lange Spiralen haben, namentlich wenn sie einen Eisenkern besitzen, Induktanzen von einer ungeheuren Centimeterzahl. Man sah sich daher namentlich bei den grossen Elektromagnetspulen der Technik veranlasst, eine grosse Anzahl dieser sehr kleinen absoluten Einheiten zu einer grösseren praktischen Einheit zusammenzufassen. Der Erdmeridianquadrant umfasst 1 000 000 000 oder 10^9 cm nach internationaler Festsetzung; man hat daher zweckmässig 10^9 E.M.-Induktanz-Einheiten zu einer neuen Einheit vereinigt, die man einen „Erdquadranten" nennt:

$$10^9 \text{ cm Induktanz} = 10^4 \text{ km} = 1 \text{ Erdquadrant}.$$

Die Bezeichnungen „Secohm" oder „Henry" für Quadrant haben sich weniger eingebürgert.

265. Energievorrat im Stromfelde. — Die Erscheinungen der Selbstinduktion führen uns zu einer ausserordentlich wichtigen Betrachtung über die in einem Stromfelde aufgespeicherte Energie, die zugleich früher über den Energieinhalt einer Strombahn Gesagtes (§ 170) bestätigt.

Wir wollen uns durch eine gegebene E.M.K., etwa die einer Dynamomaschine, einen Strom von der schliesslichen Stärke J in einer beliebig gestalteten Leitungsbahn hergestellt denken.

Die Überwindung der („elektromotorischen Gegenkraft" der) Selbstinduktion erfordert eine gewisse Arbeit, welche von der Stromquelle gedeckt werden muss. Während der sehr kurzen Zeit dt kann man

die augenblicklich herrschende Stromstärke i sowie die Grösse der elektromotorischen Gegenkraft als konstant betrachten. Die Arbeit dA, welche in der Zeit dt bei der Stromstärke i von der E.M.K. z geleistet wird, ist nach § 231, Formel 38)

$$dA = iz\ dt$$

oder, da hier $z = -e_s$ ist, nach 49)

$$dA = -L\frac{di}{dt}i\,dt = -L\,i\,di \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 50)$$

Das — Zeichen bringt dabei zum Ausdruck, dass die Arbeit A nicht von einem Strom, sondern gegen einen solchen, den „Extrastrom" § 261 zu leisten ist.

dA ist die Arbeit, welche verrichtet werden muss, um die der Stromstärke i entsprechende Zahl der durch die Leiterbahn gehenden Kraftlinien zu vermehren bis zu der Zahl, wie sie der Stromstärke $i + di$ entspricht, d. h. die zur Ausbildung des Magnetkraftlinienfeldes von dem Zustand, der durch einen Stromstärkewert i, bis zu einem solchen, der durch $i + di$ charakterisiert ist (bei gegebener Leiterbahn, also gegebenem L) erforderliche Energie. Steigt also die Stromstärke von $i = 0$ bis zu dem schliesslichen Werte $i = J$ an, so ist die gesamte auf die Ausbildung des Feldes, wie es J entspricht, aufzuwendende Arbeit gleich

$$A = -\int_{i=0}^{i=J} L\,i\,di = -\frac{1}{2}LJ^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 51)$$

Das Magnetfeld eines Stromes repräsentiert also einen gewissen, aufgehäuften Arbeitsvorrat.

Legen wir die Vorstellung der Drehbewegungen längs der Kraftlinien zu Grunde, so würde diese Feldenergie in der kinetischen Energie der in Wirbelbewegung versetzten Teile des Mediums bestehen. Bei der Stromentwickelung müssen die Teile des umgebenden Mediums in immer intensivere Drehbewegungen versetzt werden und dazu ist die Arbeit dA aufzuwenden. Wir wissen, dass wir die in dem Felde als kinetische Energie aufgespeicherte Arbeit zurück erhalten. Denn beim Öffnen des Stromes erzeugt das allmähliche Verschwinden der Kraftlinien einen Induktionsstrom, welcher dem verschwindenden folgt und noch nach dem Wirken der E.M.K. der Quelle das Bestehen von Magnetkraftlinien unterhält. Die von diesem Strome geleistete Arbeit ist genau gleich A. Wir bemerken wieder wie in § 261: die Eigenschaft der Selbstinduktion verleiht dem galvanischen Strom etwas, was wir bei der Bewegung molarer Massen „Trägheit" nennen würden. Die Wirbelbewegungen dauern gewissermaassen noch eine Zeitlang an, nachdem die bewegende Ursache schon zu wirken aufgehört hat.

Hat der Strom noch nicht die Stärke J erreicht, ist er überhaupt variabel, so ist doch einem jeden Werte der Stromstärke i ein ganz bestimmter Wert der

um die Strombahn herum versammelten elektromagnetischen Energie, nämlich (abgesehen vom Vorzeichen) $a = \frac{1}{2} L i^2$, eindeutig zugeordnet. Dieser Energievorrat ist also numerisch gleich dem halben Quadrate der Stromstärke multipliziert mit der Induktanz der Strombahn.

Aus der elektrischen Arbeit gegen den Extrastrom bei der Stromschliessung ist das magnetische Feld um den Leiter entstanden; es bildet demnach das Äquivalent derselben. Diese Arbeit geht nicht verloren. Wir erhalten sie voll und ganz wieder in Form der elektrischen Energie des Öffnungs-Extrastromes. Jeder Änderung di der Stromstärke i entspricht bei unveränderter Induktanz (L konstant) eine gewisse Änderung dA der im Felde aufgespeicherten Energiemenge; es ist

$$dA = -Li \cdot di = -i \cdot d(Li).$$

Nach § 262, Formel 45) ist Li, das Moment der Strombahn, gleich der gesamten durch die Strombahn gehenden Kraftlinienzahl n; daher ist

$$dA = -i \cdot dn,$$

wie wir in § 170 bereits auf ganz anderem Wege abgeleitet hatten. Dort setzten wir mechanische Energie, hier elektrische oder Stromenergie zur elektromagnetischen in Beziehung.

266. Energetische Definition der Induktanz. — Das magnetische Feld eines Stromes repräsentiert einen ganz bestimmten, durch Induktanz L und Stromstärke J definierten Energievorrat, der in gewöhnlichem Energiemaasse (cm gr sek^{-2} × cm) gemessen werden kann. Wir können daher auch die Induktanzgrösse einer Leiterbahn umgekehrt durch den Energieinhalt des Feldes bei gegebener Stromstärke definieren und messen. Aus Formel 51) folgt (wenn wir vom Vorzeichen absehen)

$$L = \frac{2A}{J^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 52)$$

Induktanz einer Strombahn ist das Verhältnis der doppelten Feldenergie zu dem Quadrate der Stromstärke. Zu ihrer Messung genügen also (prinzipiell) die Angaben des Watt- und des Ampèremeters.

Dass auch die Dimension von L bei dieser Definition übereinstimmend mit § 263 erhalten wird, ergiebt sich sehr einfach: dim Arbeit (Kraft mal Weg) = cm gr sek^{-2} × cm (§ 59); dim J^2 = cm gr sek^{-2} (§ 166), also das Verhältnis beider in der That dim L = cm.

267. Illustration der Erscheinung der Selbstinduktion durch die Bewegungen eines Monocykels. — Wir haben wiederholt darauf hingewiesen, dass die Weiterentwickelung der kinetischen Theorien der magnetischen und elektromagnetischen Felderscheinungen zu der mechanischen Auffassung der „verborgen cyklischen" Natur dieser Phänomene hinführte. Durch das in § 171 besprochene Modell wurde insbesondere gezeigt, wie man sich sehr leicht ein Bild dieser Art der Verknüpfung der einzelnen Feldpunkte durch solche in sich zurück-

laufende Bewegungen ausführende, wenn auch direkt nicht wahrnehmbare Zwischenmechanismen machen kann. Alle Einzelbewegungen werden infolge der monocyklischen, unlösbar bestehenden (sog. „starren") Verbindungen (§§ 141 und 143) durch eine einzige Grösse, die cyklische Geschwindigkeit q beherrscht, wie die Stromstärke i für den magnetischen Zustand eines jeden Feldpunktes charakteristisch ist. Beide Grössen entsprechen daher einander. Ausser ihnen spielt nur noch im mechanischen Bilde eine von der näheren Beschaffenheit der einzelnen Teile, ihrer Dimension, geometrischen Anordnung und dem Materiale abhängige Grösse eine Rolle, das Trägheitsmoment T sämtlicher mitbewegter Massen § 138. Ihm entspricht beim Strome die Induktanz L § 262, welche von der Beschaffenheit seiner Bahn, d. h. ihrer Grösse, geometrischen Gestalt und dem Materiale des umgebenden Mediums abhängt.

Dass bei einem Monocykel etwas Ähnliches auftritt, wie die Selbstinduktion beim Strome, davon kann man sich schon an einfachen Beispielen leicht überzeugen. Versetzen wir ein schweres, mit möglichst geringer Reibung in seinen Lagern gehendes Schwungrad in Umdrehung, so stellt sich uns stets eine erhebliche Kraft entgegen, wenn wir die Geschwindigkeit des Rades verändern wollen. Die zu überwindende Gegenkraft ist um so stärker, je grösser das Trägheitsmoment des Rades, je höher die beabsichtigte Geschwindigkeitsänderung und je kleiner die Zeit, die darauf verwendet werden soll, ist.

Der E.M.K. der Selbstinduktion e_s entspricht bei dem Monocykel eine durch die inneren Verbindungen des Systems bestimmte Kraft $\mathfrak{P}'$, eine „innere Systemkraft", welche uns entgegentritt, wenn wir die cyklische Geschwindigkeit (Intensität) des (reibungslosen) Cykels steigern wollen (Stromschliessung) und die umgekehrt die Bewegung weiter führt, wenn diese durch eine äussere Kraft gehemmt wird (Stromöffnung). Die von aussen wirkenden, diese Systemkräfte gerade überwindenden, an den cyklischen Koordinaten angreifenden Kräfte hatten wir in § 139 mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet. Es ist also $\mathfrak{P} = -\mathfrak{P}'$, ähnlich wie wir oben in § 262 $z = -e_s$ zu setzen hatten. Fassen wir die Gesetze der Strombewegung und die des Monocykels zusammen ins Auge, so ergiebt sich ein vollkommener Parallelismus. Es entsprechen einander die Begriffe und Formeln:

Galvanischer Strom:	Mechanischer Monocykel:
Stromstärke (Intensität) i	Cyklische Geschwindigkeit (Intensität) $\mathfrak{q}$
Induktanz (Selbstinduktionskoeffizient) L	Trägheitsmoment T
Magnetisches Moment (von der Strombahn umschlossene Kraftlinienzahl) $n = Li$ . . . . 45)	Mechanisches Moment der Cykelbewegung $\mathfrak{f} = T\dot{\mathfrak{q}}$ . . . . 21)

Galvanischer Strom:	Mechanischer Monocykel:
Von aussen wirkende elektromotorische Kraft $\varkappa$	Von aussen auf den Antriebspunkt der cyklischen Bewegung wirkende Kraft $\mathfrak{P}$
Elektromotorische Gegenkraft der Selbstinduktion (§ 262) $e_s = -\varkappa$	Innere „Systemkraft", welche sich an der cyklischen Koordinate bethätigt, $\mathfrak{P}' = -\mathfrak{P}$
Es ist $e_s = -\varkappa = -\frac{dn}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt}$. 49)	Es ist $\mathfrak{P}' = -\mathfrak{P} = -\frac{d\mathfrak{f}}{dt} = -\frac{d(T\mathfrak{q})}{dt} = -T\frac{d\mathfrak{q}}{dt}$. 26)
Arbeit der elektromotorischen Kräfte bei der Stromstärke i in der Zeit dt $dA = \varkappa i\,dt = -e_s i\,dt$	Arbeit der cyklischen Kräfte bei der cyklischen Intensität $\mathfrak{q}$ in der Zeit dt $d\mathfrak{A} = \mathfrak{P}\mathfrak{q}\,dt = -\mathfrak{P}'\mathfrak{q}\,dt$. 25)
Von aussen zugeführte, in das Feld übergehende Energie $dA = Li\,di$ $dA = i \cdot dn$	Von aussen zugeführte, in den Cykel übergehende Energie $d\mathfrak{A} = T\mathfrak{q}\,d\mathfrak{q}$ $d\mathfrak{A} = \mathfrak{q} \cdot d\mathfrak{f}$ . . . . . 23)
Elektromagnetische Energie, welche bei der Stromstärke i im Stromfelde aufgespeichert ist $A = \frac{1}{2} Li^2$ . . . 51) $A = \frac{1}{2} in$	Kinetische Energie, welche bei der cyklischen Intensität $\mathfrak{q}$ in dem Monocykel aufgespeichert ist $\mathfrak{A} = \frac{1}{2} T\mathfrak{q}^2$ . . . 20) $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\mathfrak{q}\mathfrak{f}$

Die Analogie ist also eine vollständige: Die Strombewegung gehört mechanisch betrachtet zu der Kategorie der monocyklischen.

Bemerkenswert ist, dass bei dieser neueren Auffassung die elektromagnetische Feldenergie der kinetischen Energie parallel steht, während sie nach den älteren Theorien, welche dieselbe aus der fernewirkenden Anziehung der einzelnen Stromelemente untereinander herzuleiten suchte, Distanzenergie, sog. „potentielle" Energie war. Die in § 154 durchgeführten Betrachtungen über die Symmetrieverhältnisse sowie die Ableitungen dieses Abschnittes zeigen aber, dass die in jedem Kubikcentimeter eines Stromfeldes eingelagerte Energie nicht die Bestimmungsstücke einer Distanzenergie haben kann. Denn die Zwangszustände, welche wir hier finden und deren Energieinhalt die Feldenergie ausmacht, haben durchaus den achsialen Charakter eines Systems von Cykelbewegungen von bestimmtem Drehsinn, bestimmter Achsenrichtung und eindeutig durch die Nachbarelemente bestimmter Winkelgeschwindigkeit. Gerade die Klassifikation der Energieformen und das Aufsuchen und Vergleichen ihrer notwendigen und hinreichenden Bestimmungsstücke giebt eines der sichersten Kriterien zur Entscheidung der Zulässigkeit oder Unzulässigkeit einer Theorie.

B) Die wechselseitige Induktion.

268. Der Koeffizient der wechselseitigen Induktion. — Ein zweifach zusammenhängendes magnetisches Kraftfeld, d. h. ein Stromfeld (§ 156) sei gegeben, dessen Charakteristik (Stromstärke § 165) zunächst den Wert 1 habe. Dann wird jede beliebige, in sich zurücklaufende, durch den Feldraum gelegte Kurve eine bestimmte Anzahl von Kraftlinien umfassen; wir wollen diese Zahl M nennen. Dieselbe hängt ab 1. von dem Verlauf der Strombahn; 2. dem Verlauf der Kurve (also ihrer Gestalt, Grösse, Entfernung von der Strombahn und der Lage aller einzelnen Teile derselben zu dieser); 3. von der Natur des Zwischenmediums an den verschiedenen Stellen. Ist die Stromstärke nicht gleich 1, sondern gleich i_1, so ver-i_1-facht sich die Kraftlinienzahl an jeder Stelle des Feldes, die Zahl der umfassten Linien ist also

$$N = M i_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 53)$$

Man nennt $M i_1$ wiederum (vergl. § 262) das (elektromagnetische oder elektrokinetische) Moment der Kurve (oder der von ihr umschlossenen Fläche). Denkt man sich an die Stelle der Kurve einen dünnen Leitungsdraht gebracht, so wird dieser dieselbe Anzahl $N = M i_1$ Kraftlinien umfassen.

Andert sich durch irgend welchen Vorgang diese Zahl, so wird in dem Leiterkreise nach § 237 eine E.M.K. induziert. Die gesamte E.M.K. längs aller einzelnen Elemente des zweiten Leiterkreises ist

$$E_2 = -\frac{dN}{dt} = -\frac{d(M i_1)}{dt} = -\left(M \cdot \frac{di_1}{dt} + i_1 \cdot \frac{dM}{dt}\right) \quad . \quad 54\,a)$$

Diese Änderung kann dadurch erfolgen, dass bei unveränderter gegenseitiger Lagenbeziehung der beiden Stromkreise (M konstant) die Stromstärke i_1 im ersten variiert, oder dadurch, dass bei konstant erhaltener Stromstärke i_1 die Lage oder Grösse des einen oder anderen Kreises, oder ihre Entfernung oder das Zwischenmittel geändert wird; in allen den letztgenannten Fällen erfährt M eine Änderung.

In § 218 haben wir alle diese Sonderfälle der „Elektroinduktion", welche die Formel 54) umfasst, im einzelnen besprochen.

Statt den ersten Stromleiter können wir den zweiten zum Ausgangspunkt unserer Betrachtung machen und sagen: Fliesst durch ihn ein Strom von der Stärke 1, so wird von den erzeugten Stromkraftlinien eine bestimmte Anzahl M' durch die Bahn des ersten Stromkreises hindurchgehen. Diese hängt genau von denselben einzelnen Grössen ab, welche oben unter 1. bis 3. für M namhaft gemacht worden sind. Ist die Lage der beiden Stromträger genau dieselbe wie

vorhin, und ist das Zwischenmittel an allen Stellen das gleiche geblieben, so ist $M = M'$.

Wollten wir nicht $M = M'$ annehmen, so würden wir in Widersprüche mit dem Prinzip von der Erhaltung der Energie geraten. Man kann dies in folgender Weise zeigen: Sind die Induktanzen zweier beliebiger Stromkreise 1 und 2 bezw. L_1 und L_2, so würde bei den respektiven Stromstärken i_1 und i_2 in jedem Stromfelde die Feldenergie $\frac{1}{2} L_1 i_1^2$ bezw. $\frac{1}{2} L_2 i_2^2$ aufgespeichert sein, wenn jedes Feld für sich allein vorhanden wäre. Aus Kapitel 12 wissen wir dass die beiden ineinander greifenden Felder sich beeinflussen, der Energieinhalt $\mathfrak{L}$ des gemeinsamen zweiachsigen Feldes ist ein anderer als die Summe der beiden genannten Energiegrössen. Wir wollen diese Energie $\mathfrak{L}$ um $d\mathfrak{L}$ steigern, indem wir nur die beiden Stromstärken ändern, etwa in der Zeit dt um di_1 bezw. di_2. Dann verrichten zunächst die E.M.K. der Selbstinduktionen in den Kreisen die Arbeiten $L_1 i_1 \cdot di_1$ bezw. $L_2 i_2 \cdot di_2$. Hierzu kommen noch die Arbeiten, welche wechselseitig in den Stromträgern geleistet werden, da die Kreise induzierend aufeinander wirken. Insofern i_1 sich ändert, tritt in 2 nach 54 a) die E.M.K. $-d(Mi_1)/dt$ auf, deren Arbeitswert bei der dort herrschenden Stromstärke i_2 nach 38) gleich $i_2 d(Mi_1)/dt \cdot dt$ oder, da M als konstant vorausgesetzt ist, $i_2 M di_1$ ist. Umgekehrt wird von dem Kreise 2 auf den Kreis 1 die Arbeit $i_1 M' di_2$ durch Induktion übertragen. Die Steigerung $d\mathfrak{L}$ der elektromagnetischen Gesamtenergie $\mathfrak{L}$ muss sich in diesen einzelnen Beträgen restlos wiederfinden, da wir alles aufgezählt haben, was zur Steigerung der Feldenergie beitragen kann, und da für die Energie das Erhaltungsprinzip gilt, d h. es ist

$$(L_1 i_1 + i_2 M)\, di_1 + (L_2 i_2 + i_1 M')\, di_2 = d\mathfrak{L}.$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn der linksseitige Ausdruck wie derjenige rechts ein wirkliches Differential ist, wofür — nach bekannten Regeln der Differentialrechnung — die notwendige und hinreichende Bedingung ist, dass $\partial(L_1 i_1 + i_2 M)/\partial i_2 = \partial(L_2 i_2 + i_1 M')/\partial i_1$ oder $M = M'$ ist $q \cdot e \cdot d$. Der Ausdruck für die elektromagnetische Gesamtenergie selbst ist also

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + i_1 i_2 M,$$

da für $i_1 = i_2 = 0$ auch $\mathfrak{L} = 0$ ist. Wir werden später sehen, dass wir bei Zugrundelegung des Cykelbildes auf genau dieselbe Formel geführt werden.

Trägt der zweite Leiter einen Strom von der Stärke i_2, so ist die durch den ersten gehende Kraftlinienzahl, da $M' = M$ ist, Mi_2, und die in diesem induzierte E.M.K.

$$E_1 = -\frac{d(Mi_2)}{dt} = -\left(M\frac{di_2}{dt} + i_2\frac{dM}{dt}\right) \quad \ldots \quad 54\,b)$$

Die Beziehung der beiden Stromträger zu einander ist in Bezug auf die Induktionswirkung bei Stromschwankungen in ihnen eine wechselseitige; man nennt daher die Grösse M den „wechselseitigen Induktionskoeffizienten".

Für einfache Fälle kann man diesen Koeffizienten leicht angeben. Liegt wie beim Transformator oder dem Induktorium um eine primäre Spirale I von der Länge l, der Windungszahl m_1 und dem Querschnitt Q eine zweite Spirale II,

so gehen sämtliche von den in dem Inneren der primären Spirale I bei einer Permeabilität μ des umschlossenen Mediums und der absoluten Stromstärke 1 in jedem Querschnitt ausgebildeten $4\pi\mu m_1 Q/l$ Kraftlinien (§ 184, Formel 33) auch durch jede Einzelwindung der sekundären Spirale II (von der Streuung abgesehen) hindurch. Hat II also m_2-Windungen, so umfasst das in ihr aufgewickelte Stück des sekundären Stromträgers das m_2-fache dieser Zahl oder es ist

$$M = \frac{4\pi\mu m_1 m_2 Q}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 55)$$

269. Dimension des wechselseitigen Induktionskoeffizienten. — Bleiben die Lagenbeziehungen und das Feldmedium beider Kreise unverändert, so ist nach Formel 54)

$$E_2 = -M\frac{di_1}{dt}, \quad E_1 = -M\frac{di_2}{dt}.$$

Da also M mit der zeitlichen Änderungsgeschwindigkeit einer Stromstärke multipliziert, eine E.M.K. liefert, so muss auch (vergl. § 263)

$$\dim M = \text{cm}$$

sein.

In der That ist für das im vorigen Paragraphen berechnete Beispiel, da m_1 und m_2 Zahlen sind, dim M = dim Q/l cm²/cm. Induktanzen und Koeffizienten der wechselseitigen Induktion sind gleich dimensioniert. Die Beziehungen dieser Koeffizienten zu einander sind beim Transformator am einfachsten zu übersehen, weil hier alle Kraftlinien, welche von dem Primärkreise ausgebildet werden, bis auf die wenigen durch Streuung verloren gehenden, auch durch den sekundären Kreis verlaufen. Die Induktanzen beider Kreise verhalten sich wie die Quadrate der Windungszahlen $L_1 : L_2 = m_1^2 : m_2^2$, vergl. § 262. Das Umsetzungsverhältnis u ist gleich dem Verhältnis der Windungszahlen $u = m_1 : m_2$. Mit Rücksicht auf 55) ist für einen Transformator ohne Streuung, da alle übrigen Faktoren gleich sind:

$$M^2 = L_1 L_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 55\,a)$$

270. Vergleichung von Induktionskoeffizienten (Induktionswage). — In den meisten Fällen lassen sich die Induktionskoeffizienten nicht so einfach wie bei dem Beispiele der konachsialen langen Spiralen § 269 berechnen; man ist dann auf eine empirische Auswertung angewiesen. Wir begnügen uns damit, anzudeuten, wie man durch Vergleichung mit gewissen Einheitsspulen diese Koeffizienten für eine gegebene Spirale finden kann. Schon in § 234 hatten wir eine Anordnung beschrieben, mit deren Hilfe es möglich ist, diesen Vergleich auszuführen. Zwei einander völlig gleiche Spiralen sind mit einer Stromquelle und einem automatischen Stromunterbrecher § 186 zu einem Leiterkreise vereinigt. Auf diese primären Spiralen werden die zu vergleichenden als sekundäre gelegt, welche, wie die Spulen s_1 s_2, Fig. 103, gegeneinander geschaltet sind; an Stelle des Galvanometers G wird ein Telephon § 220 eingefügt. Wenn beim Schliessen und Öffnen des

Stromes Kraftlinien in den Primärspiralen ein- und auspulsieren, werden in den zu vergleichenden sekundären Spiralen Wechselströme induziert. Haben die Spiralen gleiche Induktionskoeffizienten in Bezug auf die einander gleichen Primärspulen, so werden bei demselben magnetischen Strome § 239 gleich hohe E.M.K. induziert, die Ströme in ihnen heben sich gegeneinander auf, das Telephon schweigt. Es tönt, sowie der Induktionskoeffizient einer Spirale grösser ist (wenn z. B. ihrem Inneren Eisen genähert wird), denn dann kompensieren sich die E.M.K. nicht mehr vollkommen.

Die primären Spulen mit ihrer wechselnden Kraftlinienzahl sind hier an die Stelle des hin- und herbewegten Hufeisenmagneten NJS des Versuches 94 § 234 getreten. Diese Methode der Vergleichung der Intensitätsfaktoren der elektrischen Energie der E.M.K. und damit der Induktionskoeffizienten ist eine sehr empfindliche. Zeigen zwei Spiralen denselben Primärspulen gegenüber bei gleichen Stromschwankungen in diesen dieselben wechselseitigen Induktionskoeffizienten M, so müssen wir schliessen, dass sie auch gleiche Induktanzen den Schwankungen ihrer eigenen Ströme gegenüber haben. Die Methode eignet sich daher auch zur Vergleichung von Selbstinduktionskoeffizienten.

Das Vergleichen von Induktanzen gestaltet sich dann ähnlich dem von Gewichten mittels der Einheiten eines Gewichtssatzes. Wie bei diesem die Gewichte bestimmte Multipla der zu Grunde gelegten Einheit bilden, so stellt man sich hier einen ganzen Satz von Normalspulen her, deren Induktanzen bestimmte Bruchteile und Vielfache des Erdquadranten, § 264, betragen. Die oben beschriebene Anordnung vertritt dann gewissermaassen die Wage, daher die Bezeichnung „Induktionswage" (Hughes). Findet sich zu einer zu messenden Spule in dem Induktionsspulenkasten keine völlig an Induktanz gleiche Rolle, so lassen genäherte Eisenkerne wenigstens erkennen, welche der beiden Spulen die grössere Induktanz besitzt; denn man muss das Eisen offenbar der Spule mit kleinerer Selbstinduktion nähern, um das Telephon zum Schweigen zu bringen.

271. Wechselseitige Induktion unter dem Bilde dicyklischer Bewegung. — Sind zwei galvanische Ströme gleichzeitig in einem Felde vorhanden, so hängt der magnetische Zustand an irgend einer Stelle des Raumes von den Charakteristiken i_1 und i_2 beider Stromfelder ab.

Im 12. Kapitel haben wir einige einfache Fälle solcher superponierter, zweiachsiger Felder besprochen und durch Diagramme veranschaulicht.

Die Feldintensität ist überall dem Produkte beider Stromstärken $i_1 \cdot i_2$ proportional § 203. Jeder einzelne Strom wird seiner Energieverteilung nach durch je einen Monocykel q_1 und q_2 repräsentiert. Das Ineinandergreifen beider Stromfelder muss daher durch einen dicyklischen Mechanismus (§ 143) dargestellt werden, bei dem die Bewegung eines jeden Teilchens sowohl durch q_1 wie q_2 bestimmt ist. Wir wollen diese Folgerung der kinetischen Theorien dazu benutzen, die allgemeinsten Gleichungen der Induktion bei zwei Stromkreisen abzuleiten, sowie die kinetische Gesamtenergie des gemeinsamen Kraftfeldes zweier galvanischer Stromkreise zu berechnen. Es zeigt sich,

dass wir dazu mit der einfachsten Annahme, die wir machen können, bereits ausreichen, nämlich der, dass die Geschwindigkeit v_i irgend eines Teiles m_i der bewegten (verborgenen) Zwischenmassen linear von q_1 und q_2 abhängt:

$$v_i = a_i q_1 + b_i q_2.$$

Auch H. Poincaré bezeichnet die mechanische Behandlung der Induktionsgesetze in diesem Sinne als den eigentlichen Kern der Maxwellschen Theorie („la vraie pensée de Maxwell", Électricité et optique I. p. 168. 1890).

272. Berechnung des Energieinhaltes und Aufstellung der Induktionsgleichungen für zweiachsige Kraftfelder. — Wir führen hier zunächst die Rechnung ganz allgemein durch und erläutern dann in den folgenden beiden Paragraphen durch ein einfaches Modell die Dicykelbewegung, wobei wir zeigen, dass wir in der That bei ihr der Art nach genau dieselben Erscheinungen der gegenseitigen Beeinflussung erhalten, welche wir bei der Induktion an zwei Strömen beobachten.

Die kinetische Gesamtenergie des Dicykels muss sein

$$\mathfrak{L} = \sum \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2} \sum m_i (a_i q_1 + b_i q_2)^2 = \tfrac{1}{2} \sum m_i a_i^2 q_1^2 + \tfrac{1}{2} \sum m_i b_i^2 q_2^2 + \sum m_i a_i b_i q_1 q_2 \quad . \quad . \quad . \quad 56)$$

wo die Summen über alle bewegten (verborgenen) Massen erstreckt zu denken sind.

Setzen wir

$$L_1 = \sum m_i a_i^2, \; L_2 = \sum m_i b_i^2, \; M = \sum m_i a_i b_i \quad . \quad . \quad 57\,a)$$

so ist

$$\mathfrak{L} = \tfrac{1}{2} L_1 q_1^2 + \tfrac{1}{2} L_2 q_2^2 + M q_1 q_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 57\,b)$$

Die Momente sind

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{f}_1 &= \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_1} = L_1 q_1 + M q_2 \\ \mathfrak{f}_2 &= \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_2} = L_2 q_2 + M q_1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 58)$$

Demnach ist

$$2\,\mathfrak{L} = \mathfrak{f}_1 q_1 + \mathfrak{f}_2 q_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 59)$$

was wir hier schon beiläufig bemerken.

Die innere, in jedem Cykel am Antriebspunkte bei einer beabsichtigten Steigerung der cyklischen Geschwindigkeit zu überwindende Kraft ist

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}'_1 &= -\frac{d\mathfrak{f}_1}{dt} = -\frac{d(L_1 q_1 + M q_2)}{dt} \\ \mathfrak{P}'_2 &= -\frac{d\mathfrak{f}_2}{dt} = -\frac{d(L_2 q_2 + M q_1)}{dt} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 60)$$

Dies sind nun schon die berühmten allgemeinsten Gleichungen der Induktion, wie sie MAXWELL im Treatise II, § 581—584, p. 226—228 der 3. Ausgabe giebt. [Dort steht nur $\dot{y}_1$ und $\dot{y}_2$ statt q_1 und q_2.] Die Grössen L_1, L_2, M behalten ihre frühere Bedeutung. L_1 und L_2 sind maassgebend für die Einzelcykel selbst (Selbstinduktionskoeffizienten; die Summe für L_1, Formel 57 a), enthält nur Grössen a, die andere nur Grössen b; M ist für die Art der Verknüpfung beider untereinander bestimmend (die entsprechende Summe hängt von den Produkten der a und b ab). $\mathfrak{L}$ entspricht der elektromagnetischen Gesamtenergie des kombinierten Feldes, die Momente $\mathfrak{f}$ der von jeder Strombahn umfassten Kraftlinienzahl (magnetisches Moment) und $\mathfrak{P}'$ der Gesamt-E.M.K. e_s bezw. E längs einer jeden Strombahn, und die cyklischen Geschwindigkeiten q_1, q_2 den Stromstärken i_1, i_2.

Aus den Gleichungen 60) können alle früheren ohne weiteres erhalten werden. Ist nur je ein Stromkreis vorhanden ($M = 0$), so reduzieren sich die Gleichungen auf

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}'_1 &= -\frac{d(L_1 q_1)}{dt} = e_{s1} = -\frac{d(L_1 i_1)}{dt}, \\ \mathfrak{P}'_2 &= -\frac{d(L_2 q_2)}{dt} = e_{s2} = -\frac{d(L_2 i_2)}{dt}, \end{aligned}\right\} \quad \text{49) bezw. 26)}$$

also Gleichung 47) $e_s = -\frac{d(Li)}{dt}$. Für die wechselseitige Induktion ergeben die Gleichungen 60) die folgenden Formeln:

$$\mathfrak{P}'_1 = -\frac{d(Mq_2)}{dt} = E_1 = -\frac{d(Mi_2)}{dt},$$

$$\mathfrak{P}'_2 = -\frac{d(Mq_1)}{dt} = E_2 = -\frac{d(Mi_1)}{dt}$$

also die Gleichungen 54 a) und b).

Die allgemeinen Stromgleichungen für zwei aufeinander wirkende Stromkreise mit Selbstinduktion sind dagegen:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= -L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} \\ E_2 &= -L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \text{60 a)}$$

273. Dicykelmodell. — Den im vorigen Paragraphen behandelten Fall kann man leicht durch das folgende einfache Modell in genügender Allgemeinheit realisieren. Das Modell ist aus einem von MAXWELL selbst konstruierten, welches im Cavendish Laboratory zu Cambridge aufbewahrt wird, hervorgegangen und stellt eine Vereinfachung eines äusserst sinnreichen Apparates dieser Art dar, welcher von BOLTZMANN herrührt; die beiden Cykeln, aus denen diese drei Modelle im Wesentlichen bestehen, und die die induzierende und die induzierte Strombewegung darstellen, sind durch ein Kegelradgetriebe oder sog. „Planeten- oder Satellitengetriebe“ miteinander gekoppelt.

Fig. 120 zeigt den Apparat in perspektivischer Ansicht; Fig. 121 ist ein vertikaler Durchschnitt desselben.

In den Lagern L_1 und L_2, Fig. 121, die von den Trägern T_1 und T_2 getragen werden, dreht sich die Achse A. Mit derselben sind fest verbunden: 1. das Schwungrad R, welches die Kurbel K (den Antriebspunkt) trägt; 2. die Scheibe S_1; 3. das Kegelrad N_1 und 4. der schwarze Zeiger Z_1. In den Rand der Scheibe S_1 ist eine Nut eingedreht, in welche die Drahtschleife D_1 von der Feder F_1 verschieden stark hineingezogen werden kann, je nach der durch die Stellung der Schraube s_1 bestimmten

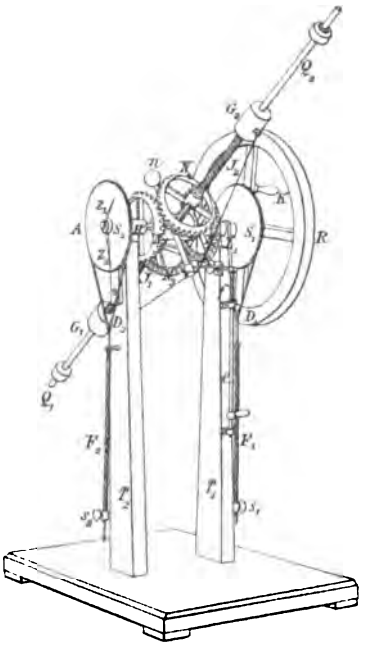


Fig. 120.

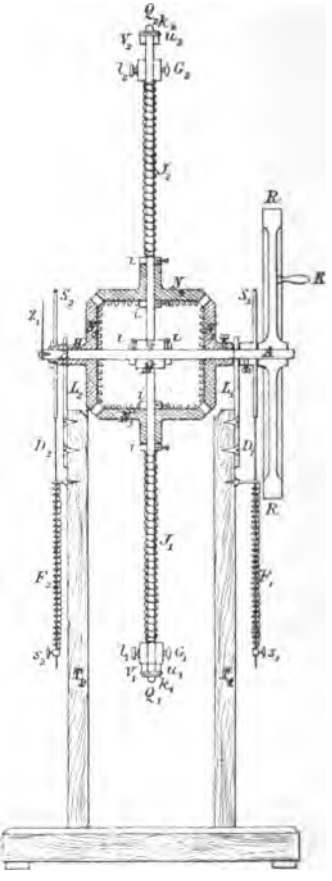


Fig. 121.

Federspannung; wir lassen D_1 zunächst nur ganz lose auf S_1 aufliegen (reibungsloser Cykel). Die Achse A und R, S_1, N_1 und Z_1 bilden zusammen den ersten Cykel.

Auf dem linken Teile der Achse A sitzt, um diese frei beweglich, die Hülse II; sie trägt: 1. das Kegelrad N_2; 2. die Scheibe S_2 mit dem auf ihr befestigten roten Zeiger Z_2. Die Scheibe S_2 ist wie S_1 mit einer Bremsvorrichtung (D_2, F_2, s_2) versehen, die wir jetzt aber nicht anziehen. Die Hülse II und N_2, S_2 und Z_2 bilden zusammen den zweiten Cykel.

Beide Cykel sind durch einen einfachen Zwischenmechanismus miteinander in Verbindung gesetzt: um die Mitte der Achse A dreht sich frei das cylindrische Stück M. An diesem sind in gegenüberliegenden Punkten die Stangen Q_1 und Q_2 befestigt, um die sich die Kegelräder N_3 bezw. N_4 drehen, welche in N_1 und N_2 eingreifen.

Durch Stellringe i, Fig. 121, welche auf die Achsen aufgeschraubt sind, wird bewirkt, dass die Teile M, H und die vier einander gleichen Kegelräder N sich um ihre bezw. Achsen drehen, aber nicht auf ihnen verschieben können.

Durch diese Koppelung der beiden Cykel wird den Stäben Q eine Winkelgeschwindigkeit in Bezug auf die Achse A erteilt, welche immer gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Winkel- (cyklischen) Geschwindigkeiten q_1 und q_2 der beiden einzelnen Cykel ist.

Dies erkennt man leicht, wenn man zunächst einen der beiden Cykel, etwa das Kegelrad N_1 oder N_2 festhält und den anderen dreht; die Drehung verteilt sich zur Hälfte auf eine Drehung der Räder N_3 und N_4 um ihre Achsen, zur anderen Hälfte auf eine Drehung des ganzen Zwischenmechanismus um die Hauptachse A. Wirken gleichzeitig beide Cykel, indem der Antriebspunkt § 136 von N_1 in der Sekunde etwa um den Bogen p_1, der von N_2 um p_2 vorwärts bewegt wird, so ist das Resultat dasselbe, als wenn sich erst N_1 bei fest gehaltenem N_2 um p_1, dann N_2 bei feststehendem N_1 um p_2 gedreht hätte; das Stabpaar Q_1 Q_2 dreht sich dabei demnach um $^1/_2$ $(p_1 + p_2)$ voran, seine Geschwindigkeit ist also auch bei gleichzeitiger und gleichförmiger Bewegung beider Cykel $^1/_2$ $(q_1 + q_2)$. Dreht sich N_2 im entgegengesetzten Sinne wie N_1, so ist q_1 mit dem umgekehrten Zeichen $-$ in Rechnung zu setzen. In der That: drehen sich beide Cykel gleich schnell, aber im entgegengesetzten Sinne, so laufen die Kegelräder N_3 und N_4 an beiden gleich schnell ab und der Zwischenmechanismus bleibt stehen. Ein Punkt desselben, der um r_i cm von der Achse entfernt ist, hat also im allgemeinen die Geschwindigkeit

$$v_i = \frac{r_i}{2} q_1 + \frac{r_i}{2} q_2,$$

was mit der in § 143 für Dicykelsysteme aufgestellten einfachsten Bedingung

$$v_i = a_i q_1 + b_i q_2$$

übereinstimmt; hier haben die die Art der Verknüpfung näher charakterisierenden Grössen a_i und b_i eine besonders einfache Bedeutung.

Auf den Stäben Q_1 und Q_2 verschieben sich die Gewichte G_1 und G_2; je nach der Stellung derselben ist das Trägheitsmoment T des Zwischenmechanismus verschieden gross. Die Anordnung ist so getroffen, dass man während der Drehung die Entfernung r der Gewichte von der Achse vergrössern oder verkleinern und damit das Trägheitsmoment T verändern kann.

a) Um r während der Drehung *vergrössern* zu können, werden auf die Stäbe Q_1 und Q_2 die Federn J_1 und J_2 geschoben (vergl. Fig. 122, in der der mittlere Teil des Apparates noch einmal besonders

abgebildet ist; die um Q_1 und Q_2 drehbaren Kegelräder N_3 und N_4 sind nur durch punktierte Linien angedeutet), dann die Gewichte G_1 und G_2, die mit Schrauben und Ösen versehen sind, zuletzt die Gummipolster V_1 und V_2, die sich gegen die Unterlegscheiben u_1 und u_2 mit dahinter durch die Stäbe Q_1 und Q_2 gesteckten Stiften k_1 und k_2 legen.

Um das Ende des in M befestigten zu Q_1 und Q_2 senkrecht stehenden Stabes a dreht sich der Hebel b mit den Stiften h_1 und h_2. Man schiebt die Gewichte möglichst nahe an die Achse A heran, indem man die Federn J_1 und J_2 zusammendrückt, schraubt sie fest,

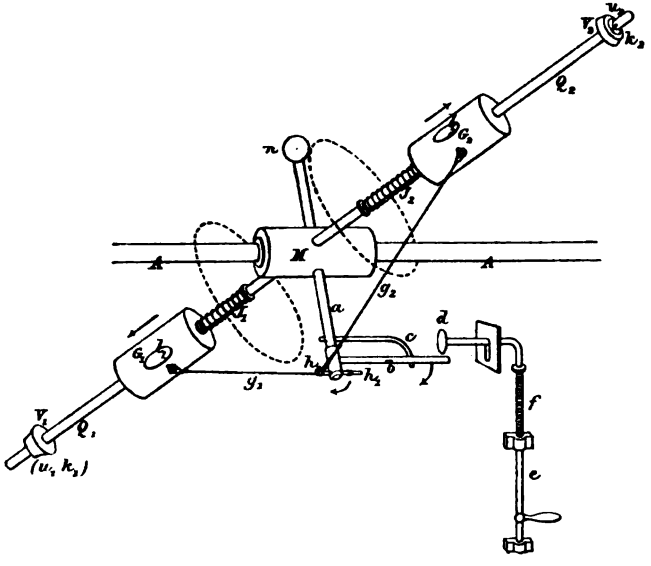


Fig. 122.

hängt die mit Haken und Schleifen versehenen Schnüre g_1 und g_2 mit ihren Haken in die Ösen der Gewichte und schiebt die Schleifen derselben über die Stifte h_1 und h_2. Legt man dann den Hebel b hinter den mit a fest verbundenen Arm c, so kann man die Klemmschrauben der Gewichte lösen, ohne dass sie sich von ihren Orten auf den Stäben Q_1 und Q_2 entfernen.

Die Gewichte werden frei und durch die Federn J_1 und J_2 nach aussen getrieben, sowie man gegen die nach oben treibende Feder f die am Träger T_1 (Fig. 120) bewegliche Stange e und damit die Scheibe d nach unten zieht; denn dadurch wird b etwas nach unten gedrückt und gleitet von dem Ende des haltenden Stabes c ab. Die Auslösung erfolgt, gleichgültig in welchem Sinne man dreht.

b) Soll r während der Drehung *verkleinert* werden, so nimmt man die Stifte k_1 und k_2 aus den Stangen Q_1 und Q_2 heraus, nimmt V, G und J ab, schiebt zunächst die Gummipolster V auf die Stäbe, dann die Gewichte G, von denen man die Schnüre entfernt, schliesslich die Federn J und hält diese auf den Stangen durch die Unterlegscheiben u fest, hinter denen man die Stifte k wieder einschiebt. Man drückt die Federn J zusammen und schraubt die Gewichte in möglichst grosser Entfernung von der Achse A auf den Stäben Q fest. Um sie hier auch zu erhalten, nachdem man die Schrauben gelöst hat, sind an den Gewichten die etwas ausgestochenen Lager l_1 und l_2 (Fig. 121) befestigt. Zwischen ihre beiden Platten werden kleine Holzstäbchen gesteckt, die sich mit ihren anderen Enden gegen die Stifte h_1 und h_2 der Auslösevorrichtung stemmen. Wird durch Ziehen an e (Fig. 122) die Scheibe d heruntergedrückt, so fliegen die Holzstäbchen heraus, wenn der Arm b bei der Drehung an die Scheibe d kommt, und die Gewichte werden durch die Federn nach innen getrieben.

Die in Figg. 120 und 122 sichtbare kleine Kugel n dient zur Ausbalancierung.

Stellt man die Bewegungsgleichungen für den hier beschriebenen Mechanismus auf, so erhält man zugleich die Induktionsgesetze:

Sind in der von uns gewählten Bezeichnungsweise $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ die cyklischen Variablen, d. h. die Winkeldrehungen der beiden um dieselbe Achse drehbaren Systeme: (R, A, S_1, N_1, Z_1) und (N_2, H, S_2); $\mathfrak{q}_1 = d\,\mathfrak{p}_1/d\,t$ und $\mathfrak{q}_2 = d\,\mathfrak{p}_2/d\,t$ die cyklischen (Winkel-)Geschwindigkeiten, τ_1 und τ_2 die bezüglichen Trägheitsmomente, so sind die kinetischen Energien der beiden Cykelbewegungen: $\frac{1}{2}\,\tau_1\,\mathfrak{q}_1^2$ und $\frac{1}{2}\,\tau_2\,\mathfrak{q}_2^2$. Sind m die Massen, r die Abstände der Gewichte G_1 und G_2 von der Achse, ist τ_3 das Trägheitsmoment aller übrigen Massen des Zwischenmechanismus (also von M, Q_1, Q_2, N_3, N_4, V_1, V_2, a, b, c, k), so ist das Gesamtträgheitsmoment des Zwischenmechanismus $T = \tau_3 + 2\,m\,r^2$. Die kinetische Energie, die in ihm angehäuft ist, ist $\frac{1}{8}\,T\,(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2)^2$. Die gesamte kinetische Energie des Systems ist demnach

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\,L_1\,\mathfrak{q}_1^2 + \frac{1}{2}\,L_2\,\mathfrak{q}_2^2 + \mathfrak{M}\,\mathfrak{q}_1\,\mathfrak{q}_2,$$

wenn wir setzen

$$L_1 = \tau_1 + \frac{1}{4}\,T,\quad L_2 = \tau_2 + \frac{1}{4}\,T,\quad M = \frac{1}{4}\,T.$$

Die Momente sind:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{f}_1 &= d\,\mathfrak{L}/d\,\mathfrak{q}_1 = L_1\,\mathfrak{q}_1 + M\,\mathfrak{q}_2\\ \mathfrak{f}_2 &= d\,\mathfrak{L}/d\,\mathfrak{q}_2 = L_2\,\mathfrak{q}_2 + M\,\mathfrak{q}_1\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 58)$$

Die an den cyklischen Variabeln angreifenden Systemkräfte sind

$$\mathfrak{P}_1' = -\frac{d\,\mathfrak{f}_1}{d\,t};\ \mathfrak{P}_2' = -\frac{d\,\mathfrak{f}_2}{d\,t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 60)$$

q_1 ist identisch mit der Stromstärke des induzierenden, q_2 mit der des induzierten Stromes; $\mathfrak{P}_1'$ und $\mathfrak{P}_2'$ sind die in den entsprechenden Stromkreisen auftretenden E.M.K.; L_1 und L_2 sind die Selbstinduktionskoeffizienten der beiden Stromkreise. M ist der Koeffizient der wechselseitigen Induktion. Wir haben hier dieselben Gleichungen wie im vorigen Paragraphen erhalten.

274. Induktionsversuche am Dicykelmodell. — Man kann das Hervorbringen eines Bewegungsimpulses innerhalb eines Cykels durch eine Bewegung im anderen damit gekoppelten Cykel geradezu als eine (mechanische) Induktionserscheinung bezeichnen und sich leicht davon überzeugen, dass man an dem Modell genau analoge Induktionswirkungen hervorrufen kann, wie wir sie in §§ 218 und 219 für zwei Ströme beschrieben haben.

Im Speziellen kann man mit dem im vorigen Paragraphen beschriebenen Dicykel die folgenden Einzelversuche anstellen:

Versuch 100. Die Gewichte G_1 und G_2 werden mittels der Schnüre g_1 und g_2 und des Hebels b in ihrer der Achse A nächsten Stellung festgehalten. Zunächst sei alles in Ruhe ($q_1 = 0$, $q_2 = 0$); dreht man an der Kurbel K, Fig. 120 (Kraft $\mathfrak{P}_1$), so tritt in dem zweiten Cykel eine Kraft

$$\mathfrak{P}_2' = -\frac{d(M q_1)}{dt}$$

auf, welche den Zeiger Z_2 in Bewegung setzt. Die Grösse der Kraft ist durch die zeitliche Änderung des Produktes $M q_1$ bestimmt.

Versuch 101. Die Richtung der Kraft $\mathfrak{P}_2'$ im Vergleich zu $\mathfrak{P}_1$ lässt sich durch die gegenseitige Bewegung der beiden Zeiger Z_1 und Z_2 bequem verfolgen; sie ist der von $\mathfrak{P}_1$ entgegengesetzt. Ist q_1 konstant geworden, so ist $\mathfrak{P}_2' = 0$, der Zeiger Z_2 bleibt in Ruhe; wächst q_1 weiter, so tritt von neuem eine rückläufige Bewegung im zweiten Cykel auf (Induktion eines entgegengesetzt gerichteten Stromes beim Entstehen und Verstärken eines Stromes).

Versuch 102. Dreht man an K langsamer, so führt Z_2 eine der von Z_1 gleichgerichtete Bewegung aus (Induktion eines gleichgerichteten Stromes beim Schwächen oder Vergehen eines Stromes); die Stromstärke hängt caet. par. wieder nur von der zeitlichen Änderung des Produktes $M q_1$ ab. Bei konstantem M ist $\mathfrak{P}_2'$ um so grösser, je stärker die Geschwindigkeitsänderungen $d q_1 / d t$ im ersten Cykel sind.

Versuch 103. Man dreht mit konstanter Winkelgeschwindigkeit; dann ist $q_2 = 0$ und

$$\mathfrak{P}_2' = -q_1 \frac{dM}{dt}.$$

Nun führt man in der p. 322 beschriebenen Weise die Auslösung herbei, die Gewichte G_1 und G_2 fliegen nach aussen (ihr Abstand r von der Achse wird grösser); der Zeiger Z_2 bewegt sich stark zurück. Die verhältnismässig grosse Masse des Schwungrades R erleichtert dabei das unveränderte Drehen an K und sichert die Konstanz von q_1. Das Trägheitsmoment $T = \tau_2 + 2 m r^2$ des Zwischenmechanismus und damit M ist grösser geworden. dM/dt ist positiv, es musste in der That eine Kraft im zweiten Cykel auftreten, welche einem Wachsen von q entspricht, also der im ersten wirkenden entgegengesetzt gerichtet ist (Induktion eines entgegengesetzt gerichteten Stromes beim Vergrössern des wechselseitigen Induktionskoeffizienten, z. B. durch Nähern der aufeinander wirkenden Leiterkreise, Einschieben von Eisenkernen u. dgl.).

Versuch 104. Der vorige Versuch wird bei verschiedenen Drehungsgeschwindigkeiten q_1 vorgenommen; die Wirkung ist um so grösser, je schneller gedreht wird (je grösser die primäre Stromstärke ist).

Versuch 105. Man befestigt mittels der Stäbe, wie es p. 323 angegeben ist, die Gewichte möglichst weit von der Achse entfernt, dreht wieder konstant ($q_2 = 0$) und löst die Gewichte aus: der Zeiger Z_2 bewegt sich ein grosses Stück gleichsinnig mit der Bewegung im ersten Cykel. T und M haben abgenommen, einem negativen Werte von dM/dt entspricht in der That eine Kraft derselben Richtung wie beim Abnehmen von q_1 (Induktion eines gleichgerichteten Stromes beim Verkleinern des wechselseitigen Induktionskoeffizienten, z. B. durch Entfernen der aufeinander wirkenden Leiterkreise).

Versuch 106. Auch dieser Versuch wird zweckmässig bei verschiedenen Drehungsgeschwindigkeiten q_1 vorgenommen, um das Wachsen und Abnehmen der Wirkung mit q_1 (mit der induzierenden Stromstärke) zu zeigen.

Ferner nimmt man die Versuche 103—106 bei Drehungen in beiderlei Sinn vor, um die Unabhängigkeit von der Richtung der induzierenden Bewegung zu erläutern.

Versuch 107. Wiederholt man die Versuche 100—103, wenn die Gewichte G_1 und G_2 in ihrer der Achse A fernsten Stellung sich befinden, so ist M grösser als vorhin. Die Wirkungen sind stärker bei gleichen Änderungen der primären Winkelgeschwindigkeit q_1 ($\mathfrak{P}_2' = -M\,dq_1/dt$) bei dem grösseren Trägheitsmoment des Zwischenmechanismus (grössere E.M.K. der Induktion je grösser der wechselseitige Induktionskoeffizient gemacht wird, z. B. durch Nähern der Spiralen, grössere Windungszahl, Sammeln der Kraftlinien durch geeignet angebrachte Eisenmassen).

Man ersieht aus diesen Versuchen unmittelbar, wie der Induktionskoeffizient bei elektrischen Vorgängen eine analoge Rolle spielt, wie das Trägheitsmoment bei mechanischen (daher werden rasch verlaufende elektrische Bewegungen, wie man sie u. A. zur Erzeugung Hertzscher Oscillationen braucht, nur erhalten, wenn man Schliessungskreise von kleinen Selbstinduktionskoeffizienten anwendet etc.).

275. Induktionsgesetze beliebig vieler Linearströme; polycyklische Bewegungssysteme. — Die vorigen auf zwei induzierend aufeinander wirkende Stromkreise bezüglichen Betrachtungen lassen sich leicht für beliebig viele solche Ströme verallgemeinern, wenn wir an der Vorstellung festhalten, dass jeder von ihnen cyklischer Natur ist und die Wechselwirkung derselben untereinander durch einen polycyklischen, wenn auch wiederum verborgenen Mechanismus hindurch stattfinden muss. In denselben greift jeder Einzelcykel in gleicher Weise ein, so dass die Geschwindigkeit v_i einer verborgenen Masse m_i nach § 143 durch die Grundgleichung

$$v_i = a_i q_1 + b_i q_2 + c_i q_3 + \quad \ldots\ldots \quad 61)$$

gegeben ist. Die in dem System vorhandene Energie ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} = \sum \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 &= \tfrac{1}{2} \sum m_i a_i^2 q_1^2 + \tfrac{1}{2} \sum m_i b_i q_2^2 \\ &+ \tfrac{1}{2} \sum m_i c_i q_3^2 + \cdots\cdots + q_1 q_2 \sum m_i a_i b_i \\ &+ q_1 q_3 \sum m_i a_i c_i + q_2 q_3 \sum m_i b_i c_i + \cdots \quad \ldots\ldots \quad 62) \end{aligned}$$

Die Grössen

$$L_1 = \sum m_i a_i^2,\ L_2 = \sum m_i b_i^2,\ L_3 = \sum m_i c_i^2 \quad \ldots \quad 63)$$

u. s. w. stellen die Induktanzen der einzelnen Strombahnen für sich dar; die die Produkte der Faktoren enthaltenden Grössen

$$\left.\begin{aligned} M_{12} = \sum m_i a_i b_i,\ M_{13} = \sum m_i a_i c_i \\ M_{23} = \sum m_i b_i c_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 64)$$

u. s. w. beziehen sich auf die Verknüpfungen je eines der Kreise mit den übrigen. Dabei ist augenscheinlich $M_{12} = M_{21}$, $M_{13} = M_{31}$ u. s. w. Die allgemeinen Momente sind

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{f}_1 &= \frac{\partial \Omega}{\partial q_1} = L_1 q_1 + M_{12} q_2 + M_{13} q_3 + \cdots, \\ \mathfrak{f}_2 &= \frac{\partial \Omega}{\partial q_2} = M_{21} q_1 + L_2 q_2 + M_{23} q_3 + \cdots, \\ \mathfrak{f}_3 &= \frac{\partial \Omega}{\partial q_3} = M_{31} q_1 + M_{32} q_2 + L_3 q_3 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 65)$$

Die in jedem einzelnen Stromkreise induzierte E.M.K. ist

$$\mathfrak{P}_1' = -\frac{d\mathfrak{f}_1}{dt},\ \mathfrak{P}_2' = -\frac{d\mathfrak{f}_2}{dt},\ \mathfrak{P}_3' = -\frac{d\mathfrak{f}_3}{dt} \quad \ldots \quad 66)$$

Dies ist das allgemeine F. Neumannsche Gesetz der Induktion beliebig vieler linearer Stromleiter.

17. Kapitel.

Beziehungen der Stromenergie zur Wärme.

Die wichtigste Eigenschaft aller Energieformen ist ihre gegenseitige Umwandelbarkeit ineinander.

Wir haben die Verwandlung mechanischer Arbeit in Stromenergie und ihre Rückverwandlung in Arbeit besprochen. Wir würden aber das Stromphänomen nur unvollkommen beschreiben, wollten wir nicht auch der Energietransformation in Wärme gedenken; eine solche findet innerhalb des Stromträgers fortwährend statt. Wir erweitern dabei gleichzeitig unsere Betrachtungen auch noch nach einer anderen Richtung. Bisher bezogen sich alle unsere Untersuchungen nur auf die Umgebung des Stromträgers, auf das freie elektromagnetische Feld; was an und im sog. Leiter selbst vorging, haben wir ganz unberücksichtigt gelassen. Denn auch die Bezeichnungen „Strom", „E.M.K." in dem Leiter oder in einem seiner Teile, welche wir beibehielten, um nicht neue Namen einzuführen, drückten bei uns immer nur Beziehungen des Trägers zum Felde aus. Der Ablauf der Erscheinungen in den Stromträgern selbst, dem wir uns in diesem Kapitel zuwenden wollen, wird durch eine Grösse (Widerstand) bedingt, die, wie wir zeigen werden, geradezu das Maass für die Umwandlung elektromagnetischer Feldenergie in Wärme bestimmt.

A) Stromverlauf im Gleichstromkreise.

276. Transformation elektromagnetischer Feldenergie in Wärme. — Halten wir an dem Bilde eines cyklischen Bewegungssystems für ein Magnetfeld fest, so entsteht die Frage: Erfolgen alle die verborgenen Einzelbewegungen, aus denen der Cykel zusammengesetzt ist, ganz ohne Reibung? Findet bei dieser Form der Bewegung gar kein Verlust an kinetischer Energie oder wenigstens eine teilweise Umwandlung in Wärme statt, wie wir dies bei allen sichtbaren Bewegungen in der Natur beobachten?

Im freien Felde findet anscheinend kein Verlust statt, worauf wir schon hinwiesen (§ 124). Dagegen erwärmt sich bei den zweifach zusammenhängenden Kraftfeldern erfahrungsgemäss der Feldträger, die Kraftachse. Wärme erscheint in den meisten Fällen entweder als Folge von chemischen (z. B. Verbrennungs-)Prozessen oder sie entstammt einer gehemmten Bewegung und ist dann als Äquivalent einer bestimmten Menge verloren gegangener kinetischer Energie anzusehen. Da wir an unserem metallischen Stromträger keine chemischen Veränderungen wahrnehmen, so liegt die Vermutung am nächsten, dass im vorliegenden Falle die zweiterwähnte Quelle die Ursache der Erwärmung ist und die Cykelbewegungen zwar nicht im freien Felde, wohl aber am und im Stromträger selbst eine Art Reibung erfahren.

Denken wir an das in § 241 ausgeführte Bild der elastisch gekoppelten Bewegungselemente, so würden wir uns vorstellen können, dass die bewegten Teile, soweit sie im Stromleiter liegen, eine Bremsung erfahren, infolge deren die elastische Schnur mit Reibung von ihnen abgleitet, wodurch hier ein Teil der Bewegungsenergie des Gesamtcykels in Wärme verwandelt wird. In diesem Sinne spricht Ol. Lodge von einem slip = Gleitung an und in den sog. Leitern, bei denen wir diese Energietransformation bemerken, und einem spin = freie Drehung im Felde; durch slip und spin sind die beiden Gebiete mechanisch voneinander unterschieden.

Nicht ohne Absicht wurde oben darauf hingedeutet, dass wir diese Umwandlung nur bei den zweifach zusammenhängenden Kraftfeldern, nicht aber bei den einfach zusammenhängenden gewöhnlichen Magnetfeldern finden. Zu jenem mehr geometrischen Unterschiede lernen wir hier einen tiefer gehenden physikalischen kennen; inwieweit beide sich gegenseitig bedingen, lässt sich vor der Hand noch nicht mit Sicherheit übersehen; jedenfalls sind es die einzigen wesentlichen Unterschiede beider Feldarten, die wir zur Zeit kennen.

Wir können uns von den Folgeerscheinungen dieser Energietransformation das folgende mechanische Bild machen. Wenn die Feldbewegungen am und im Stromträger eine Reibung erfahren, d. h. wenn die Energie der innersten den Träger unmittelbar begleitenden Kraftröhren fortwährend zum Teil oder ganz in Wärmeenergie transformiert wird, verlieren sie mit ihrem Inhalte an kinetischer Energie die Fähigkeit, Querdrucke auszuüben und dem Drucke der umgebenden Röhren zu widerstehen; denn nach § 125 sind diese quer zu den Kraftlinien auftretenden Drucke eine Folge der Drehbewegungen im Felde. Die ferner liegenden Kraftlinienringe ziehen sich also zusammen und rücken näher an den Stromträger heran; schliesslich verschwinden sie ganz im Inneren der Kraftachse. Damit findet auch ein fortwährendes Heranwandern und Nachdrängen der in ihnen enthaltenen Feldenergie statt, welche am und im Leiter in Wärme verwandelt wird.

Wir schliessen prinzipiell in diesem Buche Vorgänge aus, bei denen Stromarbeit ausser zu Erwärmungen noch zu anderen als mechanischen Leistungen, z. B. chemischen, aufgewendet wird und denken uns daher die Strombahnen immer aus

Medien zusammengesetzt, welche dadurch, dass sie zu Trägern des Stromphänomens gemacht werden, keinerlei chemische Veränderungen erfahren, aus sog. Leitern I. Klasse, also vornehmlich aus Metallen. Dann haben wir hier einen von den in der Natur überaus häufigen Fällen der Umwandlung der Energie „geordneter Bewegung" (der Cykelbewegung) in Wärmebewegung (Energie „ungeordneter" Bewegung) vor uns. Der Draht ist das Führende für diesen Transformationsprozess. Man hat Grund, die Wärme im Vergleich mit anderen als eine minderwertige Energieform (beschränkte Verwandelbarkeit) anzusehen und kann daher auch sagen: Am Stromleiter tritt fortwährend eine „Degradierung", eine „Verwüstung von Feldenergie" ein.

Was einem Körper im wesentlichen die Eigenschaft eines Leiters giebt, ist die Fähigkeit, Energie des elektromagnetischen Feldes in die minderwertige Form der Wärme herabzutransformieren, wodurch das Nachdrängen neuer Energiequanta bedingt ist, so dass ein fortwährendes Heran-„Leiten von Energie" veranlasst wird. Nach dieser Auffassung ist bei einem Kabel die „isolierende" Guttaperchahülle das „Leitende"; die Kupferseele besorgt durch fortwährendes Heruntertransformieren nur die Führung der Energie, sie hält dieselbe zusammen, ja leitet durch die genannte Transformation überhaupt erst die Energiewanderung, d. h. die Strombildung ein.

277. Das Joulesche Gesetz. — Das Cykelbild der Felderscheinungen giebt uns eine allgemeine Vorstellung von dem Umwandlungsprozesse elektrischer Energie in Wärme, welche bei dem Stromphänomen als Begleiterscheinung auftritt, wie wir im vorigen Paragraphen ausführten. Wir wollen nun zeigen, dass auch das quantitative Gesetz dieser Umwandlung sein Analogon bei diesen Bewegungssystemen findet.

Wirken in einem Cykel Reibungskräfte, so fällt diesen fortwährend ein Teil der in ihm aufgespeicherten Energie zum Opfer. Dieselbe ist nach § 138 proportional dem Quadrate der cyklischen Geschwindigkeit $\mathfrak{q}^2$; tritt keine Veränderung in der Konfiguration der einzelnen Bestandteile des Cykels ein (Trägheitsmoment T, Formel 20) konstant), so muss auch der in Wärme verwandelte Energiebetrag als ein Teil der kinetischen Energie $\mathfrak{L}$ dieser Grösse $\mathfrak{q}^2$ proportional sein. Setzen wir den Proportionalitätsfaktor, den sog. Reibungskoeffizienten gleich R, so ist die in der Zeit dt als Wärme verloren gegangene Energie des Systems

$$-dW = R\mathfrak{q}^2 dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad 67)$$

Die durch Reibung in Wärme umgewandelte Energiemenge ist proportional dem Reibungskoeffizienten R, dem Quadrate der cyklischen Geschwindigkeit $\mathfrak{q}^2$ und der Zeit dt. Man kann den Koeffizienten passend auch den „Umwandlungskoeffizienten" cyklischer Energie in Wärme nennen.

Man braucht diese Formel 67) nur ins Elektrisch-Magnetische zu übersetzen, um sogleich das wichtige Verwandlungsgesetz auch für dieses Erscheinungsgebiet zu erhalten.

Nach der Zusammenstellung der einander entsprechenden Grössen in § 267 ist $\mathfrak{q} = i$; man erhält so für den galvanischen Strom:

$$-dW = wi^2 \cdot dt \quad \ldots \ldots \ldots \quad 68)$$

Die in der Zeit dt in Wärme verwandelte Feldenergie ist dem Quadrate der Feldcharakteristik i, der Zeit dt und einem Verwandlungskoeffizienten w proportional (Gesetz von Joule).

278. Begriff des Spannungsabfalles. — Wenn infolge der fortwährenden Transformation in Wärme Kraftlinienringe sich um den Stromträger herum zusammenziehen und in diesen einwandern, wie dies in § 276 näher beschrieben wurde, so haben wir auch hier ein fortwährendes Schneiden von Kraftlinien mit dem Leiter. Dieses ist aber offenbar insofern von dem in dem 13. und 14. Kapitel besprochenen Schneiden verschieden, als hier elektrische Energie und damit E.M.K. oder Spannung nicht erhalten, sondern verloren wird. Mit Rücksicht auf dieses Kraftlinienschneiden spricht man auch hier von einer E.M.K. oder einer Spannung, aber nicht von einer erzeugten wie bei den Induktionserscheinungen, sondern von einer verbrauchten, von einem „Spannungsverluste" oder einem „Spannungsabfalle".

Wie früher bezeichnen wir auch jetzt die zwischen zwei Punkten eines Stromträgers durch Schneiden von Kraftlinien hervorgerufene Spannungsdifferenz für ein einfaches Gleitstück mit z (§ 227), für ein beliebiges Stück eines Trägers mit e (§ 265), nur mit dem Unterschiede, dass wir diese Symbole hier mit dem umgekehrten Vorzeichen verwenden.

279. Andere Form des Jouleschen Gesetzes. — Wird die in einem Monocykel vorhandene Energie zur Überwindung eines Reibungswiderstandes verwendet, so hat die innere an der cyklischen Koordinate angreifende Systemkraft $\mathfrak{P}' = -\mathfrak{P}$ (vergl. § 267) eine Arbeit gegen die Reibungskräfte zu leisten, welche in Wärme übergeht. Bei einer cyklischen Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ ist diese in der Zeit dt nach Formel 25) gleich

$$-dW = -\mathfrak{P}\mathfrak{q} \cdot dt \quad \ldots \ldots \ldots \quad 69)$$

zu setzen. Betrachten wir das elektrische Analogon: Die elektrische Energie, welche beim Schneiden von Kraftlinien gewonnen wird, ist nach § 231, Formel 38) beim Gleitstück

$$dA = zi \cdot dt,$$

für ein beliebiges Leiterstück

$$dA = ei \cdot dt.$$

Besteht bei einer bestimmten Stromstärke i zwischen zwei Punkten des Trägers die in dem im vorigen Paragraphen bezeichneten Sinne verstandene Spannungsdifferenz $-e$, so wird zwischen diesen Punkten bei der Transformation in Wärme nicht Stromarbeit dA geliefert, sondern verbraucht. Diese verbrauchte elektrische Arbeit können wir durch $-dA$ bezeichnen. Da sie nur durch die beiden Faktoren e und i bei gegebener Zeit dt bestimmt ist, haben wir zu setzen

$$-dA = -eidt \quad \ldots\ldots\ldots \quad 70\,a)$$

Diese Stromenergie verschwindet; ihr entspricht eine gewisse Wärmemenge $-dW$. Da nichts verloren geht, ist

$$-dW = -ei\cdot dt$$

oder

$$dW = ei\cdot dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad 70\,b)$$

Die in einem Abschnitt einer Kraftachse (§ 146), an dessen Enden die Spannungsdifferenz e herrscht, bei einer Stromstärke i in der Zeit dt in Wärme verwandelte Stromarbeit ist dem Produkte der drei genannten Grössen gleich.

280. Das Ohmsche Gesetz. — Da einerseits nach 67) $-dW = R\mathfrak{q}^2 dt$, andererseits nach 69) $-dW = -\mathfrak{P}\mathfrak{q}\,dt$ ist, so muss

$$\left.\begin{aligned} -\mathfrak{P} &= R\mathfrak{q} \quad \text{oder} \\ \mathfrak{q} &= \frac{-\mathfrak{P}}{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 71)$$

sein. Auf dem entsprechenden elektrischen Gebiete ist nach 68) $-dW = wi^2\cdot dt$, nach 70b) $-dW = -ei\cdot dt$, also

$$\left.\begin{aligned} -e &= wi \quad \text{oder} \\ i &= \frac{-e}{w} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 72)$$

Der Spannungsabfall längs eines beliebigen Stückes einer Strombahn ist proportional der Stärke i des von der Bahn getragenen galvanischen Stromphänomens. Dies ist das Gesetz von Ohm.

Alle Anwendungen sowie sorgsamste direkte Prüfungen, namentlich von Fechner und Kohlrausch haben gezeigt, dass dieses Gesetz wirklich völlig genau zutrifft. Da es hier als notwendige Folge der Cykeltheorie des galvanischen Stromes erscheint, so dürfen wir alle die zu seiner Begründung angestellten Messungen als experimentelle Bestätigungen derselben ansehen.

281. Energetische Bedeutung des Ohmschen Gesetzes. — Die Spannungsdifferenz $-e$ an zwei Punkten einer Leitung ist nach § 234 als eine Differenz der Intensitätsgrösse der Stromenergie anzusehen.

Der Prozess der Verwüstung von elektromagnetischer Feldenergie § 276, welche sich an und in dem zwischenliegenden Stück der Bahn vollzieht, erhält diese Differenz des Intensitätsfaktors aufrecht. Wir haben hier einen von den namentlich bei stationären Zuständen vielfach anzutreffenden Fällen vor uns, in denen Energieverwüstungen Intensitätsdifferenzen einer Energieform kompensieren (Ostwald).

So kann die Reibung Gewichtsdifferenzen aufrecht erhalten. Fliesst eine Flüssigkeit aus einem Druckreservoir durch ein langes enges horizontales Rohr aus, so nimmt der Druck vom Reservoir bis zur Ausflussstelle hin stetig ab, die Reibung der bewegten Flüssigkeit im Rohre hält einer gewissen Druckdifferenz an zwei verschiedenen Punkten der Leitung das Gleichgewicht.

Versuch 108. An dem Strommodelle, Fig. 67 § 171, bremst man die unterste, dem Stromträger S zunächst liegende Rollenreihe r_1, indem man etwa einen zusammengebogenen Gummischlauch zwischen S und r_1 klemmt. Dreht man an der Kurbel K, so weisen alle koppelnden Elemente, die Gummifäden in der Umgebung von S eine Spannung auf, die dauernd erhalten bleibt, so lange der Monocykel überhaupt spielt. Einer bestimmten Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{q}(i)$ entspricht eine bestimmte Spannung $-\mathfrak{P}$, welche den Spannungsabfall $-e$ (vergl. Formel 71) und 72) sowie § 241) längs der Strombahn S darstellt. Durch die Reibung an S (slip § 276) wird Energie der Drehbewegung im Felde (spin) fortwährend in Wärme verwandelt; die Reibung erhält gleichzeitig die Intensitätsdifferenz der Spannkräfte in den Fäden aufrecht. So kann man durch das Modell auch die Gesetze von Joule und Ohm wenigstens in ihren qualitativen Beziehungen veranschaulichen.

282. Der Verwandlungskoeffizient elektromagnetischer Feldenergie. — Der Umwandlungskoeffizient w der Gleichungen 68) und 72) spielt eine grosse Rolle und beansprucht einen besonderen Namen, etwa „Transferrenz“ eines Leiterstückes oder einer Strombahn. Wir wagen wiederum aus rein didaktischen Gründen, um dem Anfänger die Orientierung in der vorhandenen Litteratur nicht zu erschweren, nicht diese von englischen Autoren vorgeschlagene, an sich recht passende Bezeichnung einzuführen. Da wir uns doch schon entschlossen haben, die Ausdrücke Strom, Stromstärke, Leiter, Spannung und Spannungsabfall in unser Begriffssystem aufzunehmen, so wollen wir auch hier den hergebrachten Namen „Widerstand“ oder „Resistanz“ für w und „Leitfähigkeit“ für seinen reciproken Wert

$$\lambda = 1/w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 73)$$

beibehalten, ohne mit diesen bildlichen Bezeichnungsweisen irgend etwas mehr über das Phänomen aussagen zu wollen, als wir gethan haben.

Wir können die Beibehaltung dieser Bezeichnung um so eher verantworten, als sich bei diesem Begriffe ja thatsächlich die älteren und neueren Anschauungen einander wieder nähern, da auch die letzteren einen gewissen Reibungswiderstand annehmen. Nur ist die Art dieses Widerstandes hier eine ganz andere, da die Natur der vorausgesetzten Bewegung völlig von der einer Strömung abweicht.

In den älteren Theorien war der elektrische Strom eine Erscheinung, welche sich wesentlich im Inneren des Leiters abspielte; man dachte sich ein Fluidum in

ihm wirklich fliessend und die Bezeichnungen Widerstand und Leitfähigkeit hatten eine analoge Bedeutung wie in der Hydromechanik.

Die neueren Anschauungen verlegen den Prozess mehr und mehr in den Aussenraum des Leiters; das Wandernde und Fliessende ist die Energie, welche von elektromotorisch wirksamen Stellen ausgehend, von aussen her an den Leiter herantritt, um dort in Wärme verwandelt zu werden.

Legt man die hier vertretenen Anschauungen zu Grunde, so erhalten namentlich die Begriffe der „Leitfähigkeit" und des „Widerstandes" eine andere, unter Umständen sogar die entgegengesetzte Bedeutung. Schon früher wurde von Poynting gezeigt, dass dies eine notwendige Folge der Maxwellschen Theorie ist.

Je besser ein Draht leitet (im alten Sinne), um so weniger Energie fliesst gegen seine Längeneinheit in der Sekunde heran. Denken wir uns z. B. einen Eisendraht und einen Kupferdraht von völlig gleichen Dimensionen, wo w für Kupfer achtmal kleiner, λ achtmal grösser als für Eisen ist, von je einem Strome von derselben Intensität durchflossen. Dass der Kupferdraht achtmal besser leitet, kann man auch so ausdrücken: Auf derselben Länge, z. B. der Längeneinheit, ist bei ihm der Spannungsabfall bei derselben Stromstärke achtmal kleiner als bei dem Eisendraht. Durch das Produkt dieses Abfalles in die Stromstärke ist aber nach § 279 die pro Längeneinheit in der Sekunde in Wärme umgewandelte Energie bestimmt. Wird bei dem Kupferdrahte achtmal weniger Feldenergie verwandelt, so braucht auch nur der achte Teil in jeder Zeiteinheit zum Ersatze herangeleitet zu werden; beziehen wir also den Begriff der Leitfähigkeit auf die Energie, das Einzige, was nach unserer Auffassung wirklich strömt, so müssen wir sagen, das Kupfer leitet achtmal schlechter als das Eisen.[1]) Das Einwandern von Energie in den Draht lässt also in dem Maasse nach, je grösser die „Leitfähigkeit" des Materiales wird. Da man bei der elektrischen Energieübertragung dieses Einwandern nicht beabsichtigt, dasselbe aber auch nicht umgehen kann, wenn überhaupt eine Fortführung der Feldenergie möglich werden soll, so wählt man am besten „gute Leiter" im alten Sinne, und wird sogar diese Bezeichnung beibehalten mit Rücksicht auf den praktischen Zweck, wiewohl man sie eigentlich „schlechte Leiter" nennen müsste.

Die Ausführungen in § 276 liessen die Fähigkeit der Metalle, die Energie heranzuleiten, mit den Bewegungen ihrer Moleküle gegeneinander in Zusammenhang erscheinen; ist dies wirklich der Fall, so muss diese Fähigkeit in dem Maasse erlöschen, als wir (durch Abkühlung) die molekularen Bewegungen einschränken und dadurch verhindern, dass die von den an der Oberfläche liegenden Teilen aufgenommene Energie an die tiefer liegenden weitergegeben und in Wärme verwandelt wird. Dass dies der Fall ist, beweisen viele Versuche, z. B. neuere von Cailletet und Bouty, Wroblewski und Dewar, welche zeigen, dass bei Temperaturerniedrigungen die Leitfähigkeit (im Sinne der älteren Theorien) fortwährend zunimmt, so dass man durch starke Abkühlung einen Leiter vom Leitvermögen ∞ würde herstellen können. Mit abnehmender Temperatur lässt also nach dem Vorigen das Zuströmen von Energie nach, die „Leitfähigkeit" (im neueren Sinne) wird geringer, dieselbe scheint also in der That in engstem Zusammenhange mit den molekularen Bewegungen der Leiter selbst zu stehen.

Dass die Wärmebewegungen der Leiter in engster Beziehung zu ihrer elektrischen Leitfähigkeit stehen, deutet ferner die Thatsache an, dass nach Abzug der sekundären, störenden Einflüsse der Widerstand w der Metalle nahe der absoluten Temperatur proportional ist (Clausius). Diese scheint aber nicht nur für Gase,

---

[1]) Bezüglich ähnlicher scheinbarer Paradoxa, die aber nur dadurch zu stande kommen, „dass man die Angabe dessen, was geleitet wird, unterschlägt", vergl. H. Hertz, Wied. Ann. 37. p. 408. 1889; Untersuchungen p. 183. 1892.

sondern für alle Körper proportional der kinetischen Energie der Molekularbewegungen zu sein, also ist w auch dieser proportional.

Ferner mag auf den Parallelismus zwischen elektrischem und thermischem Leitvermögen hingewiesen werden. Die die Wärme am besten leitenden Substanzen Silber, Kupfer u. s. w. sind zugleich diejenigen, für welche λ die grössten, w die kleinsten Werte besitzt.

283. Dimension des Verwandlungs-(Widerstands-)Koeffizienten. — Aus Formel 68) folgt für den Koeffizienten w, welcher ein Maass für die an und in der Strombahn stattfindende Transformation der Feldenergie in Wärme giebt,

$$w = \frac{-dW}{i^2 dt},$$

wobei $-dW$ eine in Energiemaass gemessene Wärmemenge ist.

Daher ist

$$\dim w = \frac{\text{cm gr sek}^{-2} \cdot \text{cm}}{\text{cm gr sek}^{-2} \cdot \text{sek}} = \text{cm sek}^{-1}.$$

Dieser Koeffizient hat also die Dimension einer Geschwindigkeit § 59.

Ziehen wir das Ohmsche Gesetz, Formel 72) heran, so erhalten wir $w = -e/i$, daher

$$\dim w = \frac{\text{cm}^{3/2}\,\text{gr}^{1/2}\,\text{sek}^{-2}}{\text{cm}^{1/2}\,\text{gr}^{1/2}\,\text{sek}^{-1}} = \text{cm sek}^{-1},$$

also wiederum die Dimension einer Geschwindigkeit.

Die Dimension der Leitfähigkeit ist daher nach 73)

$$\dim \lambda = \frac{\text{sek}}{\text{cm}}$$

die einer reciproken Geschwindigkeit.

284. Praktische Einheit des Verwandlungs-(Widerstands-)Koeffizienten: das Ohm. — Wir hatten schon bei der Induktanz 10^9 Längeneinheiten des cm gr sek-Systems zu der höheren Einheit des Erdquadranten zusammengefasst. Der Koeffizient w der Energieumwandlung stellt sich nach § 283 als Geschwindigkeitsgrösse dar. Die absolute Einheit $w = 1$ cm sek^{-1} ist sehr klein; die in der Praxis vorkommenden Umwandlungen erfordern zu ihrer quantitativen Angabe gewöhnlich das Milliardenfache dieser Einheit. Man hat daher die in einer Sekunde zurückgelegt gedachte Wegstrecke von 1 Erdquadranten als höhere praktische Einheit eingeführt und sie nach dem lange unbeachtet gebliebenen Forscher, der zuerst die einfache Beziehung zwischen Stromstärke, E.M.K. und Verwandlungskoeffizienten entdeckte, „Ohm“ benannt.

$$1 \text{ Ohm} = 10^9 \text{ cm sek}^{-1} = 1 \text{ Erdquadrant pro Sekunde.}$$

Ein Stück einer Leiterbahn hat nach Formel 72) den Widerstand

von 1 Ohm, wenn sich an seinen Enden bei 1 Ampère Stromstärke die Spannungsdifferenz von 1 Volt dauernd erhält.

Diese Einheit ist schwer reproduzierbar und daher auch eine mit ihr ausgeführte Messung schwierig zu kontrollieren. Man hat daher nach einem Abbild in greifbarer Gestalt gesucht und durch mühevolle Messungsreihen (Ohmbestimmungen) gefunden, dass 1 Ohm gerade diejenige Grösse des Koeffizienten w darstellt, bei der ein Spannungsabfall von 1 Volt längs eines Quecksilberfadens von 1 qmm Querschnitt und 106,3 cm Länge bei 0° Celsius Temperatur erreicht wird, wenn man ihn in einen Stromkreis von 1 Ampère Stromstärke einfügt. Man bezeichnet die Ohmeinheit durch Ω.

285. Widerstandsvergleichungen. — Von dem praktischen „Ohm", Bruchteilen und ganzzahligen Vielfachen desselben stellt man Kopien (meist aus den Legierungen Manganin oder Konstantan) her, welche in einem sog. Widerstandssatz oder -kasten vereinigt, geaicht (in Deutschland in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt) und in den Handel gebracht werden, ebenso wie die Gewichte von Bruchteilen und Vielfachen der Masseneinheit gr. Die Bestimmung eines Widerstandes nach dem Grundmaasse läuft daher auf eine Vergleichung desselben mit einer bestimmten Anzahl von Einheitswiderständen hinaus, geradeso wie die Massenbestimmung auf einer Vergleichung mit den geaichten Grundmaassen, den Gewichten, an der Wage beruht. Hier wie dort kann man die Vergleichung in verschiedener Weise bewerkstelligen; wir besprechen nur die einfachsten und wichtigsten Methoden.

a) Vergleichung durch Substitution (Tariermethode). Eine unveränderliche Stromquelle, der zu messende Widerstand w und ein strommessendes Instrument werden zu einem Schliessungskreise vereinigt und die Stromstärke bei gegebener E.M.K. der Quelle bestimmt. Dann nimmt man w aus dem Kreise heraus und substituiert an seine Stelle so viel Einheitswiderstände, bis bei derselben E.M.K. wieder dieselbe Stromstärke wie vorher erzielt wird (eventuell interpoliert man aus dem zu kleinen und zu grossen Ausschlage am Ampèremeter, wenn nur ein zu grosser und zu kleiner Vergleichswiderstand zur Verfügung steht, auf den wahren Wert des zwischen zu schaltenden Bruchteiles). Nach dem Ohmschen Gesetze 72) muss dann w gleich der Anzahl Ohm sein, welche man im zweiten Falle eingeschaltet hat.

b) Direkte Vergleichung (der direkten Wägung an der zweiarmigen Wage entsprechend). Man verzweigt eine von einer Polklemme einer Stromquelle Q, Fig. 123, kommende Leitung (Punkt I), vereinigt sie dann wieder (Punkt II) und führt sie zur Stromquelle zurück. Um beide Zweige herum bilden sich dann Stromkraftlinien aus; der Teilstrom in der oberen Zweigleitung habe die Stärke i_{oben} (i_o), der in der unteren die Stärke i_{unten} (i_u). Zwischen den beiden Punkten

I und II des Schliessungskreises wird ein bestimmter Abfall der E.M.K. stattfinden; in I sei die E.M.K. e_I, in II gleich e_{II}, so dass $e_I > e_{II}$ und $e_I - e_{II}$ der auf die Strecke von *I* nach *II* kommende Spannungsabfall ist. Wenn wir beide Zweige metallisch durch eine mit einem stromanzeigenden Instrumente versehene Zwischenleitung überbrücken (Wheatstonesche Brücke), so wird dann, aber auch nur dann kein Spannungsausgleich durch diese Überbrückung stattfinden (Galvanometer in Ruhe), wenn diese zwei Stellen verbindet, in denen dieselbe E.M.K. herrscht. Die in Fig. 123 durch l und e bezeichneten Punkte seien solche Stellen, an denen oben und unten die Spannung gleich sei, $e_I > e_b > e_{II}$. Dann haben wir vier gesonderte Zweige, in denen die Widerstandsgrössen die beigeschriebenen Werte haben mögen. Nach dem Ohmschen Gesetze muss für diese sein:

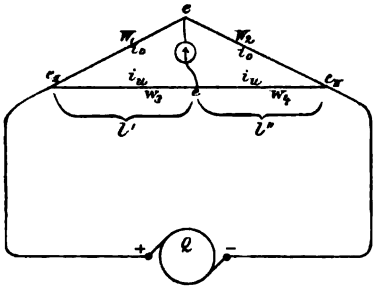


Fig. 123.

$$e_I - e_b = w_1 i_o \qquad e_b - e_{II} = w_2 i_o$$
$$e_I - e_b = w_3 i_u \qquad e_b - e_{II} = w_4 i_u$$

D. h. es ist

$$w_1 i_o = w_3 i_u$$
$$w_2 i_o = w_4 i_u$$

oder nach Division:

$$w_1 / w_2 = w_3 / w_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 74\,a)$$

Die genannte Brückenlage ist also durch diese Proportion gekennzeichnet. Lässt man den ganzen unteren Zweig aus einem überall gleich beschaffenen Drahte bestehen, so verteilt sich der gesamte Spannungsabfall $e_I - e_{II}$ gleichmässig über die ganze Länge desselben. Dann verhalten sich die Spannungsabfälle auf den Teilstrecken $e_I - e_b$ und $e_b - e_{II}$ wie die Längen l' und l'' derselben und bei Stromlosigkeit der Brücke und infolgedessen gleichem i in beiden Strecken, auch die Widerstände w_3 und w_4 wie die Längen. Ist also $w = w_1$ der zu bestimmende Widerstand, w_2 eine geeignete Anzahl von Vergleichswiderständen Ω, so braucht man nur den oberen Brückenpunkt zwischen beiden festzulegen und den unteren auf dem Drahte so lange zu verschieben (Gleitkontakt), bis ein in die Brücke eingeschaltetes Galvanometer weder nach rechts noch nach links ausschlägt (Nullmethode). Dann ist

$$w = \frac{l'}{l''}\,\Omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 74\,b)$$

286. Beziehungen des Widerstandes zu der Natur der Leiterbahn. — Nach unseren bisherigen Betrachtungen müssen wir erwarten, dass der Widerstandskoeffizient w eines Stückes einer Strombahn sowohl von der Grösse wie von der Natur des Materiales desselben abhängig ist. Zunächst lässt sich ohne weiteres schliessen, dass der Spannungsabfall und damit w bei gegebener Stromstärke um so grösser sein wird, je länger das betrachtete Stück ist; denn in einem l mal so langen Achsenabschnitt wird die Energietransformation unter sonst gleich bleibenden Umständen l mal so gross sein, wie in einem Stück von der Länge von 1 cm; w ist also, so vermuten wir, der Länge direkt proportional. Da wir ferner die durch w bestimmte Wärmeentwickelung auf eine Art Reibungsprozess zurückgeführt haben, an dem sich das ganze Innere beteiligt, so wird w um so kleiner, die Reibung um so geringer sein, auf je mehr Einzelteile sich die Ursachen der Energietransformation (der „slip" vergl. § 276) verteilen kann, je grösser also der Querschnitt ist; w ist der Grösse des Querschnitts umgekehrt proportional, die besondere Form desselben spielt keine Rolle. Endlich bedingt die spezifische Natur der Substanz bei gleichen geometrischen Abmessungen noch Verschiedenheiten des w; gute Wärmeleiter haben kleines, schlechte Wärmeleiter grosses w § 282. Wir können daher zunächst vermutungsweise setzen:

$$w = \mathfrak{s}_0 \frac{l}{\omega} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 75)$$

wo $\mathfrak{s}_0$ eine für die einzelnen Substanzen spezifische Konstante, der „spezifische Widerstand" ist. Die Erfahrung bestätigt das eben Gesagte vollkommen.

Der spezifische Widerstand ist, wie aus der Formel hervorgeht, der Widerstand w_1 eines Würfels der betreffenden Substanz von 1 cm Kantenlänge, welcher mit zwei einander gegenüberliegenden Seiten in eine Strombahn eingeschaltet ist; denn es ist $w_1 = \mathfrak{s}_0 \frac{1}{1^2}$. Seine Dimension ist cm sek^{-1} × cm, sein Ziffernwert beträgt rund für

Ag	Cu	Au	Al	Zn	Pt	Fe
1500	1600	2000	2900	5600	8900	9600

Ni	Sn	Pb	Sb	Hg	Bi
12 400	18 100	19 500	35 200	94 840	130 000

Eine Leitfähigkeit $\lambda = \frac{1}{\mathfrak{s}_0}$ nennt man die „spezifische Leitfähigkeit" des Materiales; sie hat die Dimension cm^{-2} sek und misst die Leitfähigkeit eines Würfels von 1 cm^3 der Substanz, wenn die Stromrichtung einer Kantenrichtung parallel verläuft.

287. Das thermische Äquivalent der Stromarbeit. — Der Stromeffekt ist durch Watts oder Voltampères bestimmt § 231; wird Stromarbeit zur Wärmeentwickelung in der Leitungsbahn verbraucht, so muss daher für jedes Watt ein bestimmter Wärmeeffekt erscheinen. Auch für beliebige Zeitdauern muss die gesamte zur Erwärmung verwendete Stromarbeit (Watt mal Zeit) einer Wärmemenge äquivalent sein. Ist $-e$ die Spannungsdifferenz in Volts an den beiden Enden eines Leiterstückes, i die von ihm getragene Stromstärke, so muss nach Formel 70 b)

$$e\,i\,t = \varkappa\,W \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 76)$$

sein. Der Zahlenfaktor $\varkappa$ (die Äquivalenzzahl) hängt von den gewählten Einheiten ab. Misst man die Wärmemenge W wie gewöhnlich in Gramm- oder sog. kleinen Calorien (Wärmemenge, welche die Temperatur von 1 gr Wasser um 1° Celsius erhöht), so ist $\varkappa = 0{,}24$:

$e\,i$ Voltampère $= 0{,}24\ e\,i$ Sekunden-Gramm-Calorien.

1 gr cal ist erfahrungsgemäss mit der mechanischen Arbeit von 427 (mechanisches Wärmeäquivalent) m gr oder der Hubarbeit äquivalent, durch welche eine Gramm-Masse gegen die Erdschwere (981 Dyne § 57) um 1 m oder 100 cm hoch gehoben wird, d. h.

$$1 \text{ gr cal} = 427 \times 981 \times 100 \text{ cm}^2 \text{ gr sek}^{-2}$$
$$= 41\,900\,000 = 4{,}19 \cdot 10^7, \text{ rund } 4{,}2 \cdot 10^7$$

absolute (C.G.S.-)Arbeitseinheiten.

Da ein Voltampère $= 10^8 \cdot 10^{-1} = 10^7$ absolute (C.G.S.-)Einheiten ist, so ist

$$e\,i \text{ Voltampère} = 10^7\ e\,i \text{ cm}^2 \text{ gr sek}^{-3}.$$

Daher $4{,}2\ e\,i$ Voltampères $= e\,i$ sek gr cal, also in Formel 76) $\varkappa = 1/4{,}2 = 0{,}24$.

288. Die allgemeine Stromgleichung. — Wenn eine Leitung an die beiden Polklemmen einer Gleichstromquelle angeschlossen wird, so wirkt an ihren Enden von dem Augenblicke der metallischen Verbindung an eine gewisse E.M.K. Bei einer Stromstärke i wird diese E.M.K. für zweierlei Leistungen in Anspruch genommen. Ein Teil der Stromenergie wird dauernd in Wärme verwandelt; der hierfür aufzuwendende Betrag an Spannung ist nach dem Ohmschen Gesetze gleich $-wi$; die diesem Verbrauche entsprechende Quantität Stromenergie ist nicht ohne weiteres zurück verwandelbar. Ein anderer Teil der E.M.K. wird zu der Ausbildung des magnetischen Feldes um die Strombahn herum verwendet. Die E.M.Gegenkraft der Selbstinduktion muss überwunden werden, wozu nach § 262 Formel 47) eine E.M.K. $-dn/dt$ nötig ist, wenn n das Moment der Strombahn bezeichnet. Dieser Teil der Stromenergie wird wieder zurück erhalten, wenn die äussere E.M.K. zu wirken aufhört § 265. Schliessen wir andere Leistungen, mechanische oder chemische Arbeiten aus, so haben wir alle Möglichkeiten erschöpft; die

verbrauchte E.M.K., wir wollen sie $-E$ nennen, setzt sich aus den beiden Bestandteilen

$$-E = -wi - \frac{dn}{dt} \text{ zusammen,}$$

es ist

$$E = wi + \frac{dn}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 76)$$

Dies ist die allgemeine Stromgleichung.

Ist die Stromstärke i konstant geworden, so ändert sich das Moment n der Leitungsbahn nicht mehr, $dn/dt = 0$, und die Gleichung 76) reduziert sich auf das Ohmsche Gesetz. Dieses stellt also nur einen speziellen Fall der allgemeinen Stromgleichung 76) dar, den des sog. stationären Stromes. Die Gleichung 76) dagegen gilt für alle Zeiten und offenbar auch für alle Werte der E.M.K. E, sowohl für konstante Werte derselben, also z. B. wenn wir die Leitung an eine Gleichspannungs-Gleichstrommaschine anschliessen, als auch insbesondere für den Fall, dass E variiert, z. B. wie die Klemmenspannung einer Wechselstrommaschine § 250.

Nehmen wir keine Änderung mit der Strombahn selbst oder in ihrer Umgebung vor, so ist $\frac{dn}{dt} = L\frac{di}{dt}$, wenn L die Induktanz der Bahn ist, und wir erhalten

$$E = wi + L\frac{di}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 77)$$

Durch diese Gleichung ist bei gegebener Resistanz w und gegebener Induktanz L der Stromablauf für jede beliebige auch mit der Zeit veränderliche E.M.K. E eindeutig bestimmt.

Der hier geschilderte Vorgang findet sein mechanisches Analogon überall dort, wo Massen von erheblichem Trägheitsmomente durch stetig wirkende Kräfte in Bewegung gesetzt werden. Wenn der Dampfdruck in den Cylindern einer Lokomotive den Zug in Bewegung setzt, so hat derselbe zunächst den zu bewegenden Massen eine gewisse Geschwindigkeit zu erteilen. Die dabei entwickelte kinetische Energie bleibt erhalten und führt den Zug nach dem Aufhören der treibenden Kraft noch um ein entsprechendes Stück voran. Dieser Betrag an aufgewendeter Arbeit entspricht dem zweiten Gliede der Gleichung 77). Daneben muss aber von der treibenden Kraft von Anfang an eine Arbeit zur Überwindung der Reibung an den Achsen, den Schienen und der Luft geleistet werden. Der hierzu erforderliche Betrag an Energie geht als Wärme dem Systeme verloren. Hat der Zug seine normale Geschwindigkeit erlangt, so ist nur noch dieser Verlust dauernd zu decken; er entspricht dem ersten Gliede der Gleichung 77), und der stationäre Zustand dem Bestehen des Ohmschen Gesetzes. Diese Betrachtung gilt ganz allgemein und insbesondere auch für das in Bewegung Versetzen und in konstanter Bewegung Erhalten eines mechanischen Cykelsystems. Die Selbstinduktion entspricht dem Trägesein der in Bewegung versetzten ponderablen Massen vergl. § 267.

289. Analogon des gebremsten Monocykels. — An die Achse eines schweren Schwungrades von grossem Trägheitsmomente, das mit

einer Kurbel (Antriebspunkt) versehen ist, werde eine kräftige Gleitfeder angedrückt, so dass sich das Rad mit einer gewissen Reibung bewegt. In konstante Umdrehung versetzt, stellt es dann einen (unechten § 142) gebremsten Monocykel dar. Um dem Rade eine bestimmte Umdrehungsgeschwindigkeit $\mathfrak{q}$ zu erteilen, bei der es dann einen Vorrat an kinetischer Energie enthält, hat man beim freien Cykel nach Formel 26) § 139 mit der Kraft $d\mathfrak{f}/dt$ an dem Antriebspunkte zu wirken, wo $\mathfrak{f}$ das Moment des Cykels ist. Beim gebremsten Cykel ist aber fortwährend ausserdem eine Kraft gegen die Reibung zu leisten, welche nach Formel 71) § 280 der cyklischen Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ selbst proportional ist. Hier hat also die an der cyklischen Koordinate angreifende Kraft den Wert

$$\mathfrak{P}' = -\mathfrak{P} = R\mathfrak{q} + \frac{d\mathfrak{f}}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 76\,a)$$

Diese Gleichung entspricht genau der Gleichung 76) für das analoge elektrische Phänomen.

290. Begriff der Zeitkonstante. — Zwei die Leiterbahn als solche charakterisierende Konstanten haben wir seither kennen gelernt: die Induktanz L und den Umwandlungskoeffizienten oder die Resistanz w.

In sehr vielen Fällen tritt nur ihr Verhältnis L/w auf. Dieses hat, da dim L = cm, dim w = cm sek^{-1}, die Dimension sek, d. h. die einer reinen Zeit; man nennt daher das Verhältnis von Induktanz und Resistanz eines Leiterkreises

$$\tau = L/w \text{ sek} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 78)$$

die „Zeitkonstante" desselben oder auch die „Relaxationsdauer".

Für einen gebremsten Monocykel können wir τ dadurch variieren, dass wir einerseits Massen mit Trägheitsmomenten mit ihm koppeln und andererseits die reibenden Kräfte der gleitenden Elemente möglichst gering machen. Ein grosses Schwungrad auf gut geölter Achse bietet ein Beispiel eines Cykels mit grosser Zeitkonstante.

291. Zeitlicher Verlauf des Schliessungsstromes. — Als Anwendungsbeispiel der allgemeinen Stromgleichung 77) wollen wir den Prozess der Strombildung näher verfolgen. Wir sahen schon oben § 261, dass, wenn sich ein Strom auszubilden beginnt, von seinem Entstehen $i = 0$ zur Zeit $t = 0$ an, bis zu der Zeit, wo er seinen schliesslichen konstanten Endwert J erreicht hat, sich ihm fortwährend ein Induktionsstrom infolge der Selbstinduktion des Schliessungskreises entgegenstellt. Derselbe ist um so stärker, je grösser das Verhältnis von Induktanz zu Resistanz ist; die Selbstinduktion schiebt also die völlige Ausbildung des Stromes um so länger hinaus, je grösser die Zeitkonstante τ des Kreises ist. Die konstante E.M.K. der Quelle, an

welche wir den Leiterkreis im Augenblicke $t = 0$ angeschlossen denken, sei E. Wenn der Strom seinen konstanten Endwert erreicht hat, ist $E = wJ$. Bis dahin aber haben wir wegen der zeitlichen Änderung der Stromstärke i noch der Induktanz Rechnung zu tragen und es gilt die Gleichung 77):

$$E = wi + L\frac{di}{dt}$$

oder

$$\frac{E}{w} = J = i + \frac{L}{w}\frac{di}{dt}.$$

Aus $J = i + \tau\frac{di}{dt}$ folgt aber

$$i = J\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 79)$$

für die Abhängigkeit der Stromstärke i von der Zeit t.

Denn da $J - i = \tau\frac{di}{dt}$, oder $\frac{J-i}{-di} = -\frac{\tau}{dt}$ oder $\frac{d(J-i)}{J-i} = -\frac{dt}{\tau}$ ist, so folgt durch Integration $\log(J-i) + C = -\frac{t}{\tau}$.

Da für $t = 0$, $i = 0$ sein soll, so muss die Integrationskonstante $C = -\log J$ sein. Für $\log(J-i) - \log J = \log\left(1 - \frac{i}{J}\right) = -\frac{t}{\tau}$ kann man aber schreiben:

$$1 - \frac{i}{J} = e^{-t/\tau}, \text{ wo } e = 2{,}71\,828\cdots$$

die Basis des natürlichen Logarithmensystems ist. Hieraus folgt Gleichung 79) durch blosse Umstellung. Bemerkt sei noch, dass die zeitliche Änderungsgeschwindigkeit der Stromstärke

$$\frac{di}{dt} = \frac{J}{\tau}e^{-t/\tau} \text{ für } t = 0 \text{ gleich } \frac{J}{\tau}$$

ist und dann immer kleiner wird.

Wir entnehmen der Gleichung 79) das Folgende über die zeitliche Ausbildung des Stromphänomens:

Beim Stromschluss beginnt die Stromstärke Fig. 124 erst schnell, dann langsamer zu wachsen, um so schneller, je kleiner die Zeitkonstante ist. Nach der Zeit

$$t = \tau \text{ ist } i = J\left(1 - \frac{1}{e}\right) = J\frac{e-1}{e} = \frac{1{,}71\,828}{2{,}71\,828}J = 0{,}632\ J.$$

Nach einer Zeit gleich der Zeitkonstante erreicht die Stromstärke i einen Wert, welcher ungefähr erst $^2/_3$ der schliesslichen maximalen Stromstärke beträgt. Wächst t immer weiter, so ist doch von J immer noch ein positiver Betrag abzuziehen, der zwar immer kleiner wird, theoretisch aber erst für $t = \infty$ den Wert 0 annimmt. Streng genommen giebt es also überhaupt keinen konstanten Strom, selbst nicht

bei konstanter E.M.K., und damit keinen Strom, für den das Ohmsche Gesetz strenge Gültigkeit hätte; wenn indessen die Zeitkonstante klein ist, kann man praktisch schon nach Bruchteilen einer Sekunde $i = J$ setzen.

Ist z. B. $w = 1$ Ohm $= 10^9$ cm sek^{-1} und $L = 1$ Erdquadrant $= 10^9$ cm, so ist $\tau = 1$ sek und schon nach 10 Sekunden unterscheidet sich i vom Endwerte J nur noch um $1/(2{,}7)^{10}\,J$, also um unmerklich wenig.

Für lange Kabel oder bei grossen Elektromagneten ist die Zeit, bis der stationäre (Ohmsche) Zustand erreicht ist, nicht unbeträchtlich.

292. Zeitlicher Verlauf des Öffnungsstromes. — Wir wollen annehmen, dass wir einen Schliessungskreis von der Zeitkonstante τ, in

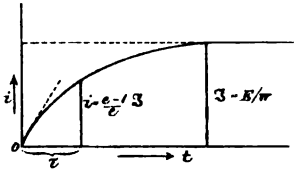


Fig. 124.

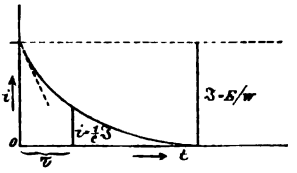


Fig. 125.

dem ein Strom von der konstanten Intensität J fliesst, in dem Momente $t = 0$ von der bis dahin wirkenden E.M.K. abnehmen. Für die Folgezeit gilt dann für das Stromphänomen die für $E = 0$ aus Formel 77) und 78) folgende Gleichung:

$$0 = i + \tau \frac{di}{dt},$$

aus der sich eine Abhängigkeit zwischen i und t von der Form ergiebt:

$$i = J e^{-t/\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 80)$$

Aus $i = -\tau \frac{di}{dt}$ oder $-\frac{dt}{\tau} = \frac{di}{i}$ folgt durch Integration $-\frac{t}{\tau} + C = \log i$. Da für $t = 0$, i eben noch den Wert J haben soll, muss $C = \log J$ sein. Man hat also

$$-\frac{t}{\tau} = \log \frac{i}{J} \text{ oder } i = J e^{-t/\tau}.$$

Hier ist $\frac{di}{dt} = -\frac{J}{\tau} e^{-t/\tau}$ für $t = 0$ gleich $-J/\tau$, also numerisch gleich wie beim Schliessungsstrom, aber vom umgekehrten Vorzeichen.

In dem Momente, wo die E.M.K. zu wirken aufhört, sinkt die Stromstärke erst rasch, dann immer langsamer, vergl. Fig. 125. Nach einer Zeitspanne t gleich der Zeitkonstante des Schliessungskreises τ ist i nur noch $\frac{1}{2{,}7}\,J$, also nur noch rund $^1/_3$ der ursprünglichen Stärke. Theoretisch nach unendlich langer, praktisch schon nach kurzer Zeit

bei kleiner Selbstinduktion oder grossem Widerstande ist die Stromstärke gleich 0 geworden.

Der Öffnungsstrom verläuft rascher als der Schliessungsstrom, da der induzierte Extrastrom dem verschwindenden Strom gleichgerichtet ist; er setzt denselben meist in Gestalt eines beträchtlichen Funkens (Öffnungsfunken) fort, wobei die Feldenergie, aus der die Energie dieses Öffnungsstromes bezogen ist, in Wärme verwandelt wird. Zum Öffnen von Kreisen mit grosser Zeitkonstante (grosse Elektromagnete) bedarf man besondere Ausschalter, da der Öffnungsfunke einen gewöhnlichen Unterbrecher zu sehr ausbrennen würde (Kohleausschalter). Die Wirkung einer vergrösserten Zeitkonstante zeigt der folgende einfache Versuch recht instruktiv:

Versuch 109. An eine Stromquelle von konstanter, aber nicht zu hoher E.M.K. wird unter Zwischenschaltung eines Ampèremeters ein mehrere Meter langer übersponnener Kupferdraht, zunächst lang ausgestreckt, einerseits angeschlossen. Mit der anderen Polklemme verbindet man ein Quecksilbernäpfchen. Taucht man das Drahtende in dieses ein, so erhält man beim Herausziehen einen mässig starken Funken. Wickelt man denselben Draht aber auf einer Stange weichen Eisens zur Spirale auf, so wird der Öffnungsfunke hell und knallend. Der Widerstand (und daher auch die Ohmsche Stromstärke) ist konstant geblieben, aber die Selbstinduktion und damit die Zeitkonstante ist erheblich vergrössert.

Durch den zeitlichen Verlauf sind die physiologischen Wirkungen des Schliessungs- und Öffnungsstromes bestimmt.

B) Stromverlauf im Wechselstromkreise.

293. Harmonisch variierende E.M.K. in einem Kreise von gegebener Induktanz und Resistanz. — Wir gehen wiederum von der allgemeinen Stromgleichung 77) aus und denken uns einen Schliessungskreis von der Zeitkonstante τ an eine Wechselstrommaschine angeschlossen. Der Stromverlauf wird dann durch die Gleichung

$$E = E_0 \sin 2\pi n t = w i + L\frac{di}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 81)$$

beschrieben § 250, Formel 43 b).

Wäre keine merkliche Selbstinduktion vorhanden, so würde das Ohmsche Gesetz gelten und die Stromstärke in jedem Augenblicke

$$\left.\begin{aligned} i &= \frac{E_0}{w} \sin 2\pi n t \\ \text{oder} \\ i &= J_0 \sin 2\pi n t \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 82)$$

sein, wenn wir

$$E_0/w = J_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 83)$$

setzen, wo J_0 die Maximalstromstärke bedeutet, welche während jeder Periode des Sinusstromes erreicht wird.

Von diesem einfachsten Verhalten in der Strombahn bringt nun aber die Induktanz eine bemerkenswerte Abweichung zu Stande.

Um zu erkennen, wie sich hier das Stromphänomen gestalten wird, knüpfen wir wieder am besten an das Beispiel des mechanischen, gebremsten Monocykels von grosser Trägheit an. Suchen wir z. B. das in § 289 erwähnte grosse Schwungrad durch unsere Muskelkraft in eine hin- und hergehende Bewegung zu versetzen, so folgt dasselbe wohl den ihm periodisch erteilten Impulsen, wir bemerken aber, dass die Momente grösster Geschwindigkeit hinter denen grösster Muskelanspannung zurückbleiben. Wir müssen durch diese die Bewegung in einem Sinne aufheben, dann erst können wir sie umkehren und zu dieser zusammengesetzten Operation ist die grösste Kraftanstrengung erforderlich; bewegt sich das Rad einmal in einem bestimmten Sinne, so ist eine viel geringere Kraft nötig, um seine Geschwindigkeit bis zur beabsichtigten Maximalgrösse zu steigern.

Eine erste Wirkung des zu überwindenden Trägheitsmomentes besteht also in dem Auftreten einer Phasendifferenz zwischen der periodisch erregenden Kraft und der erzeugten Bewegung. Die andere Wirkung tritt noch augenscheinlicher hervor: Da wir die eben erzeugte Bewegung erst wieder zum Stillstand bringen müssen, ehe die neue Bewegungsepoche beginnt, so ist die erzielte Maximalgeschwindigkeit bei demselben Kraftaufwande viel geringer, als wenn wir mit derselben Stärke immer in einem Sinne an dem Monocykel wirken würden. Ganz Analoges gilt für die Stromstärke im Wechselstromkreise.

Zwischen der E.M.K., die nach dem zeitlichen Gesetze $\sin 2\pi n t$ wirkt, und der resultierenden Stromstärke i stellt sich eine Phasendifferenz derart ein, dass für jeden Wert des gleichmässig mit der Zeit wachsenden Argumentes $2\pi n t$ die zugehörige Stromstärke einem dahinter zurückgebliebenen Werte entspricht. Bezeichnen wir die Grösse dieses Zurückbleibens mit φ, so ist φ die sog. Phasendifferenz zwischen der wirkenden E.M.K. und der Intensität des erzeugten Wechselstromes. Ferner steigt die Stromamplitude nicht so hoch an, wie es ohne Selbstinduktion nur mit Rücksicht auf den Verwandlungskoeffizienten w der Fall sein würde, die Stromstärke folgt also nicht dem durch Gleichung 82) ausgedrückten Gesetze, sondern einem Gesetze von der Form:

$$i = i_0 \sin(2\pi n t - \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 84)$$

294. Berechnung der Phasenverschiebung. — Die in der Gleichung 84) auftretende Grösse φ berechnet sich leicht, wenn man beachtet, dass die durch sie definierte Grösse i, sowie ihre zeitliche Änderungsgeschwindigkeit

$$\frac{di}{dt} = 2\pi n i_0 \cos(2\pi n t - \varphi)$$

der Gleichung 81) für jeden einzelnen Zeitmoment t Genüge leisten muss. Setzt man die Werte von i und di/dt in diese ein, so ergiebt ein Vergleich

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\pi n L}{w} = 2\pi n \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 85)$$

Denn entwickelt man in der Gleichung

$$E_0 \sin 2\pi n t = w i_0 \sin(2\pi n t - \varphi) + L\, 2\pi n i_0 \cos(2\pi n t - \varphi)$$

die sin und cos nach bekannten Regeln der Geometrie, so erhält man

$$[E_0 - w i_0 \cos\varphi - L\, 2\pi n i_0 \sin\varphi] \sin 2\pi n t$$
$$- [-w i_0 \sin\varphi + L\, 2\pi n i_0 \cos\varphi] \cos 2\pi n t = 0.$$

Soll dieses für alle Zeiten t gleich 0 sein, so muss jeder der beiden Klammerausdrücke für sich gleich 0 sein, wodurch man die beiden Gleichungen

$$E_0 = w i_0 \cos\varphi + L\, 2\pi n i_0 \sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 86)$$
$$0 = -w i_0 \sin\varphi + L\, 2\pi n i_0 \cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 87)$$

erhält, deren zweite unmittelbar obigen Ausdruck 85) liefert.

Die Phasenverschiebung ist also um so grösser, je grösser die Zeitkonstante τ des Wechselstromkreises und je grösser die Periodenzahl n des pulsierenden Stromes ist; für hochfrequenten Strom § 250 kann sie bis zu einer Viertelperiode, dem grössten Wert, den sie offenbar erreichen kann, anwachsen.

295. Berechnung der maximalen Stromstärke. — Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen hatten auf zwei Gleichungen zwischen den Konstanten des Stromkreises und des Wechselstromes geführt. Aus ihnen kann man zwei Unbekannte, d. h. ausser der Phasenverschiebung φ auch die Amplitude i_0 des pulsierenden Stromes berechnen. Man findet

$$i_0 = \frac{E_0}{\sqrt{w^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 88)$$

Denn quadriert und addiert man die beiden Gleichungen 86) und 87), so erhält man

$$E_0^2 = w^2 i_0^2 + L^2 4\pi^2 n^2 i_0^2,$$

woraus sich der Wert von i_0 unmittelbar ergiebt.

Die Gleichung des Wechselstromes ist danach:

$$i = \frac{E_0 \sin(2\pi n t - \varphi)}{\sqrt{w^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 89)$$

Vergleicht man diesen Wert mit demjenigen 82), der sich für die Stromstärke aus dem Ohmschen Gesetze bei $L = 0$ ergeben würde, so erkennt man, dass die Stromstärke in der That herabgedrückt ist, dass jeder Wert der E.M.K. durch einen Wert dividiert erscheint, der grösser als der einfache Ohmsche Widerstand $w = \sqrt{w^2}$ ist. Zu w^2 ist die allezeit positive Grösse $4\pi^2 n^2 L^2$ hinzugekommen.

Den Verlauf der periodischen E.M.K. $E = E_0 \sin 2\pi n t$ und den der hinter ihr um die Phase φ zurückbleibenden Stromstärke $i = i_0 \sin(2\pi n t - \varphi)$ im Wechselstromkreise stellen die beiden Kurven der Fig. 126 graphisch dar. Die Sinuslinie mit der Amplitude E_0 hat bereits eine gewisse Höhe erreicht, wenn die Ordinaten-

werte der flacheren Linie, die nur bis zu einer maximalen Höhe i_0 überhaupt ansteigt, eben erst anfängt sich über ihren Nullwert zu erheben und so bleibt sie überall in ihrer Entwickelung um die Strecke φ, der Phasendifferenz, zurück, welche hier etwa $^1/_8$ der ganzen Periodenlänge beträgt. Wie beide Grössen mit der Zeit variieren, sieht man am besten, wenn man aus einem Stück Papier einen schmalen geradlinigen Spalt ausschneidet, ihn senkrecht zur horizontalen (Abscissen-)Linie der Fig. 126, welche die Zeit darstellt, legt und parallel mit sich selbst von links nach rechts (im Sinne der wachsenden Zeit) verschiebt. Das Auf- und Abpulsieren der Schnittpunkte der Spaltrichtung mit beiden Kurven veranschaulicht recht gut das periodische Anwachsen und Abnehmen der beiden harmonisch variierenden Grössen E und i mit der in ihrem zeitlichen Verlaufe bestehenden konstanten Phasendifferenz φ.

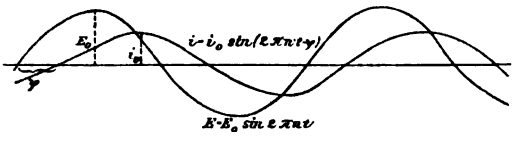


Fig. 126.

296. Scheinbarer Widerstand: Die Impedanz. — Bei harmonischem Wechselstrom ist nicht nur der gewöhnliche Ohmsche, der sog. „wahre Widerstand", die Resistanz w maassgebend, sondern, wie wir in § 295 sahen, auch ein Ausdruck, der diesen vergrössert. Wir können zwar die Stromstärke durch eine dem Ohmschen Gesetze völlig entsprechende Formel darstellen, wir müssen aber statt w die Grösse

$$P = \sqrt{w^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}$$

als Widerstand einführen. Man nennt diese Grösse

$$P = \sqrt{w^2 + (2\pi n L)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 90)$$

den scheinbaren Widerstand oder die Impedanz. Diese Impedanz ist offenbar um so grösser, je grösser w, die Periodenzahl n und die Selbstinduktion L ist. Das vermehrende Glied $2\pi n L$, welches die Selbstinduktion hier in den Widerstandskoeffizienten hineinbringt, nennt man den induktiven Widerstand oder die Induktanz „des Wechselstromkreises".

Durch diesen in Anführungsstriche gesetzten Zusatz wollen wir auf das Hinzutreten des Faktors $2\pi n$ hindeuten, der bei den einfachen gewöhnlichen Induktanzen § 262 fehlt.

Es ist also die Gleichung des Wechselstromkreises von der Impedanz P nach 89) und 90)

$$i = \frac{E_0}{P} \sin(2\pi n t - \varphi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 90\,a)$$

oder

$$i = i_0 \sin(2\pi n t - \varphi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 90\,b)$$

wo

$$i_0 = E_0 / P \quad \ldots\ldots\ldots \quad 90\,c)$$

gesetzt worden ist.

297. Beziehung zwischen Induktanz, Resistanz und Impedanz. — Die drei Ausdrücke:

w : wahrer Widerstand oder Resistanz,

$2\pi n L$: induktiver Widerstand oder Induktanz,

$\sqrt{w^2 + (2\pi n L)^2}$: scheinbarer Widerstand oder Impedanz

stehen in einer sehr einfachen Beziehung zu einander, welche sich leicht graphisch darstellen lässt, Fig. 127. Trägt man die Maasszahlen des wahren und des induktiven Widerstandes auf zwei rechtwinklig zu einander stehenden Geraden auf, Fig. 127, so wird die Maasszahl des scheinbaren Widerstandes durch die Länge der Hypotenusenlinie des rechtwinkligen Dreiecks bestimmt, welches die beiden erstgenannten Grössen zu Katheten hat. Da nach 85) $\operatorname{tg}\varphi = 2\pi n L/w$ ist, so ist der eingezeichnete Winkel in der That die in § 294 berechnete Phasenverschiebung φ.

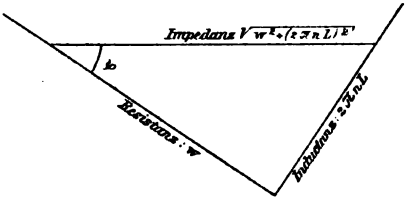


Fig. 127.

An diesem Diagramm kann man alle oben schon hervorgehobenen Einzelheiten, z. B. das Wachsen der Phasendifferenz mit der Induktanz studieren. Das Dreieck kann man aber auch dazu benutzen, um neue Beziehungen zwischen den hier in Betracht kommenden Grössen abzuleiten. So lesen wir die sogleich zu verwendende Formel:

$$\cos\varphi = \frac{w}{\sqrt{w^2 + (2\pi n L)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 91)$$

direkt aus der Figur ab.

Mit Rücksicht auf 91) kann man Formel 88) in der Form

$$i_0 = \frac{E_0 \cos\varphi}{w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 92)$$

schreiben. Diese sagt aus: Die wirkende E.M.K. ist bei dem Wechselstrome, um die Maximalstromstärke zu erhalten, mit einem Faktor zu multiplizieren, der immer kleiner als 1 ist und dann durch den Ohmschen Widerstand w zu dividieren. Statt der vollen E.M.K. kommt also immer nur ein Bruchteil derselben zur strombildenden Wirkung. Man nennt diesen Teil $E_0 \cos\varphi$ die elektromotorische Nutzkraft.

Diese Auffassung entspricht ganz den bisherigen Ableitungen, wonach immer ein Teil der E.M.K. zur Überwindung der E.M.Gegenkraft der Selbstinduktion im Schliessungskreise selbst verwendet werden muss.

Die E.M.Nutzkraft giebt, durch den wahren Widerstand w dividiert, die Stromamplitude i_0, d. h. für diese reduzierte E.M.K. gilt wieder das Ohmsche Gesetz.

298. Mittlere Stromstärke. — Für viele Zwecke ist es wichtig,

für die von Augenblick zu Augenblick wechselnde Stärke eines Wechselstromes denjenigen Mittelwert zu kennen, der in der Wirkung bei allen Vorgängen, welche der Stromstärke direkt proportional sind (z. B. die Zahl der in Gesamtheit ausgebildeten Kraftlinien), einem Gleichstrom äquivalent ist: die sog. „mittlere Stromstärke".

Da die Stromkurve nach jeder Halbperiode wieder einen ganz analogen Verlauf nimmt, so können wir uns auf die Betrachtung einer derselben beschränken. Es zeigt sich, dass

$$i_{\text{mittel}} = \frac{2}{\pi} i_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 93)$$

ist, wenn i_0 wie vorher die überhaupt erreichte Maximalamplitude der Stromstärke bezeichnet.

Setzen wir den Bogen $2\pi n t - \varphi = \Phi$, so ist

$$i_{\text{mittel}} = \frac{1}{\pi} \int_{\Phi=0}^{\Phi=\pi} i \cdot d\Phi,$$

wo

$$i = \frac{E_0}{P} \sin \Phi$$

ist, vergl. 90 a).

Durch Ausführung der Integration erhält man

$$i_{\text{mittel}} = \frac{1}{\pi} \frac{E_0}{P} \cdot 2 = \frac{2}{\pi} i_0,$$

da nach 90 c)

$$i_0 = \frac{E_0}{P}$$

ist.

Die mittlere Stromstärke ist also nur $2/\pi$ oder 0,637 oder rund $^3/_5$ so gross wie die maximale.

299. Effektive Stromstärke. — Eine andere Frage ist es, welcher Gleichstrom einen harmonischen Wechselstrom in Bezug auf Leistungen vertreten könne, die dem Quadrate der augenblicklichen Stromstärke proportional sind, also z. B. in Bezug auf die Wärmewirkungen in der Strombahn. Man findet für die mittlere Wärmeentwickelung im Stromträger während einer halben Periode und damit überhaupt für alle Zeiten des Stromverlaufes

$$W_{\text{mittel}} = \frac{w}{2} \cdot \frac{E_0^2}{P^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 94)$$

Denn es muss

$$W_{\text{mittel}} = \frac{1}{\pi} \int_{\Phi=0}^{\Phi=\pi} w\, i^2 \cdot d\Phi$$

sein; das ist aber mit Rücksicht auf 90 a)

$$\frac{1}{\pi} w \frac{E_0^2}{P^2} \cdot \int_0^{\pi} \sin^2 \Phi \cdot d\Phi = \frac{1}{\pi} w \frac{E_0^2}{P^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Diejenige Stärke eines Gleichstromes, welche diese selbe Wärmewirkung hervorrufen würde, nennt man die effektive Stromstärke i_{eff}. Für diese muss also die Gleichung bestehen:

$$w i_{\text{eff}}^2 = \frac{w}{2} \frac{E_0^2}{P^2},$$

woraus sich ergiebt

$$i_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{E_0}{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} i_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 95)$$

Die effektive Stromstärke ist nur $1/\sqrt{2} = 0{,}7071$ so gross wie die maximale Stromstärke; sie ist grösser als die mittlere Stromstärke.

300. Erwärmung durch Wechselstrom. — Wir können die im vorigen Paragraphen berechnete, im Mittel in der Strombahn als Wärme verausgabte Energie W_{mittel} des Wechselstromes noch anders ausdrücken. Da nach 91) $w/P = \cos\varphi$ ist, so ist mit Bezug auf 94) und 90 c)

$$W_{\text{mittel}} = \frac{1}{2} E_0 i_0 \cos\varphi = \frac{1}{2} \frac{E_0^2 w}{w^2 + (2\pi n L)^2} \quad \ldots \ldots \quad 96)$$

Die im Stromkreise entwickelte Wärme ist von der durch n und L bedingten Phasenverschiebung zwischen E.M.K. und Stromstärke abhängig. Je grösser diese ist, um so geringer ist die Wärmeentwickelung. Bei sehr grossen Induktanzen, bei denen dann φ beinahe gleich $\pi/2$ ist, vergl. Fig. 127, verschwindet die Erwärmung fast vollkommen. Wir können dann einen noch so kräftigen Wechselstrom in dem Kreise von hoher Selbstinduktion pulsieren lassen, ohne einen Verlust an Energie zu erleiden oder das Leitermaterial durch Erwärmungen anzugreifen. Alle Energie, welche zur Überwindung der E.M.Gegenkraft der Selbstinduktion in der einen Phase der Strombildung aufgewendet wurde, wird in der darauf folgenden entgegengesetzten Phase wieder erhalten. Diese Verhältnisse spielen in der Wechselstromtechnik eine ausserordentlich wichtige Rolle.

301. Gleichungen des Transformators. — Wenn in einem Stromkreise ausser den induktiven Widerständen noch beträchtliche wahre Ohmsche Widerstände zu überwinden sind, so treten in den Gleichungen 60 a) § 272 für die wechselseitige Induktion zweier Kreise aufeinander noch Glieder von der Form $w_1 i_1$ und $w_2 i_2$ hinzu.

An dem Dicykelmodell Figg. 120 und 121 wird der Einfluss dieser dauernd wirkenden Widerstände durch die an den Peripherien der Scheiben S_1 und S_2 schleifenden Drahtringe dargestellt, welche durch die Federn F_1 und F_2 angezogen

werden, so dass sie die durch eine Induktionswirkung vom anderen Cykel her übertragene Kraft mehr oder weniger stark bremsen.

Wir können durch Anziehen der Drahtschleifen die Reibungskräfte beliebig verändern und mit ziemlicher Annäherung annehmen, dass sie der ersten Potenz der cyklischen Geschwindigkeit q_1 bezw. q_2 proportional sind. Dann entsprechen diese Widerstände w_1 und w_2 vollkommen dem Ohmschen Widerstande bei der Strombewegung.

Versuch 110. Durch Anziehen der Schrauben s_1 und s_2 (Fig. 120) werden die beiden Cykel verschieden stark gebremst. Wiederholt man dann die Versuche 100—107, so ergeben sich die bekannten Beziehungen bei verschiedenen Widerständen im primären und sekundären Kreise. Bisher haben wir immer nur den einzelnen Impuls, der an dem Zeiger Z_2 bemerkbar wurde, nach seiner ungefähren Grösse und Richtung (den Differentialstrom) in Betracht gezogen. Man kann aber auch die gesamte Zeigerbewegung bei verschieden schnellem Andrehen oder Anhalten des ersten Cykels (den Integralstrom) ins Auge fassen. Bei einiger Übung gelingt es leicht, dieselbe Endgeschwindigkeit q_1 auf sehr verschiedene Weise zu erreichen (wobei man sich etwa durch den Takt eines daneben gestellten Metronoms unterstützen lässt), indem man z. B. erst die Geschwindigkeit rascher steigert und dann langsamer oder erst langsam und dann rasch u. s. w. Noch leichter ist es, eine gewisse Geschwindigkeit in verschiedener Weise zu vernichten; immer ist die Integralbewegung dieselbe. (Der Integralstrom hängt caet. par. nur von dem Unterschied des Anfangs- und Endwertes der Stromstärke ab). Sie ist grösser bei kleinem Widerstand u. s. w.

Nach Analogie der Gleichungen 60 a) § 272 können wir die vollständigen Induktions-Gleichungen zweier Stromkreise schreiben:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= -w_1 i_1 - L_1 \frac{d i_1}{d t} - M \frac{d i_2}{d t} \\ E_2 &= -w_2 i_2 - L_2 \frac{d i_2}{d t} - M \frac{d i_1}{d t} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 97)$$

Diese Gleichungen kommen bei dem Transformator in Betracht. Ist derselbe an eine Wechselstrommaschine angeschlossen, so ist

$$E_1 = E_1^{\,0} \sin 2\pi n t;$$

ist die Sekundärwickelung des Transformators ungeschlossen, so ist $E_2 = 0$. Die Transformatorgleichungen wurden schon von Maxwell allgemein integriert. Wir erwähnen nur, dass auch hier die Induktanzen eine Phasenverschiebung von Primär- und Sekundärstrom zur Folge haben.

Am Dicykelmodell, Fig. 120, kann man diese Verschiebungen sehr schön zeigen, wenn man den Primärcykel abwechselnd hin und her dreht, vergl. auch § 293. Man sieht dann deutlich, wie der rote Zeiger auch eine periodische Bewegung ausführt und zwar von gleicher Dauer, wie er aber dabei erheblich hinter der Bewegung des schwarzen Zeigers zurückbleibt. Verändert man das Trägheitsmoment des Zwischenmechanismus, § 273 (wechselseitiger Induktionskoeffizient), so wird die Phasendifferenz, aber auch das Amplitudenverhältnis geändert, es entspricht dies einer Änderung des Übersetzungsverhältnisses am Transformator. Man kann alle Einzelheiten der Transformatorerscheinungen am Dicykelmodell durch mechanische Induktion nachahmen.

IV. Abschnitt.

Erscheinungen des freien elektromagnetischen Feldes.

Im vorhergehenden Abschnitte haben wir eine neue Erfahrungsthatsache in den Kreis unserer Betrachtungen gezogen, welche den Begriff und das Maass eines Vektors kennen lehrte, den der „elektrischen Kraft“ (§§ 238—241), der vermöge der Induktionserscheinungen auf das engste mit den Zuständen in den magnetischen Kraftfeldern verknüpft ist. Zunächst haben wir aber die durch ihn beschriebenen Zustandsänderungen fast ausschliesslich längs linearer Leiter betrachtet und nur gelegentlich war auch der Induktion in flächenhaft ausgedehnten Leitern, nämlich in rotierenden Scheiben, gedacht worden § 223.

Ein ganz neues Gebiet von Betrachtungen betreten wir nun, wenn wir die Untersuchungen des III. Abschnittes auf körperliche, dreidimensionale Leiter ausdehnen und die Verknüpfung der beiden Vektoren der magnetischen und der elektrischen Kraft im freien elektromagnetischen Felde ins Auge fassen.

Wir setzen hier also nicht mehr besondere Leiterbahnen voraus, an welche die Stromenergie gebunden ist, und die daher als Träger eines konachsialen Kraftliniensystems mit allen seinen Begleiterscheinungen (Transformation von Feldenergie in Wärme u. s. w.) anzusehen sind, sondern betrachten den Zustand der elektrischen Spannung als frei im Felde neben dem der magnetischen Zustandsänderung bestehend.

Wie dies zu verstehen ist, hatten wir bereits in §§ 240 und 241 erläutert, wo wir zeigten, dass „elektrische Kraft“ geradezu als eine Folgeerscheinung der magnetischen anzusehen ist, wenn zu den Bestimmungsstücken der letzteren diejenigen zeitlicher Änderungen von bestimmter Richtung hinzutreten.

Diese Vorstellungen von selbständig im Raume bestehenden Kraftvektoren, welche zeitliche Änderungen erfahren, und deren Wirkungen sich, durch das Medium vermittelt, von Stelle zu Stelle fortpflanzen können, sind für die neueren Anschauungen besonders charakteristisch. Wir hoffen dadurch, dass wir von vornherein nur die Feldzustände selbst betrachteten, auf diese Anschauungsweise genügend vorbereitet zu haben. Ausserdem haben wir schon in § 241 ein einfaches und möglichst anschauliches Bild eines solchen Nebeneinanderbestehens zweier Zustände im Raume (Drehung und Spannung) entworfen, welches

wir hier beibehalten und das uns — zunächst an der Hand mechanischer Analogien — in das Ineinandergreifen beider Zustandsänderungen einführen soll. Späteren Entwickelungen bleibt es dann vorbehalten, diese Betrachtungen zu verfeinern und zu vertiefen und vor allem an der Hand des Kalküls zu beweisen, zugleich aber die mechanischen Bestandteile derselben mehr und mehr wieder zu verflüchtigen und die allgemeinen Felderscheinungen, losgelöst von jeder speziellen Hypothese, zu beschreiben. Wir gehen damit zugleich denselben Weg, den MAXWELL, BOLTZMANN, HELMHOLTZ und vor allem HEINRICH HERTZ gegangen sind; auf demselben wurde die MAXWELLsche Theorie zunächst von „rudimentären", noch aus den alten Fernewirkungstheorien übernommenen, im neuen Lehrgebäude entbehrlichen Begriffen gereinigt, und die formale Seite dieser Theorie geklärt. Es ist interessant zu sehen, wie bei allen vier Forschern die Vorstellungen zu den verborgen cyklischen Bewegungen hindrängen, wobei namentlich bei HERTZ eine immer weiter gehende Befreiung von den oft etwas grob sinnlichen (somewhat awkward, wie MAXWELL selbst bekennt) spezielleren mechanischen Bildern eintritt, welche allerdings besonders in MAXWELLS Hand einen ungeheuren heuristischen Dienst geleistet hatten und bei Weiterforschungen auch immer wieder leisten werden.

Naturgemäss muss in diesem letzten Abschnitte von analytischen Hilfsmitteln ein umfangreicherer Gebrauch als bisher gemacht werden. Indessen soll auch hier das Thatsachenmaterial immer vorangestellt werden; die Bedeutung der abzuleitenden Formeln und Sätze wollen wir zuerst veranschaulichen und erläutern und dann erst beweisen. Der Hinweis auf einfache Beispiele und Anwendungen wird dann auch dem Leser, welcher nicht überall in die Einzelheiten des mathematischen Beweises eindringt, dem Geiste der neuen Entwickelung zu folgen gestatten.

18. Kapitel.

Wanderung und Anhäufung elektrischer Feldenergie.

In diesem Kapitel soll zunächst der Vektor der elektrischen Kraft, auf den wir in § 238 geführt worden sind, in seiner Eigenschaft als eine einen gewissen Feldzustand beschreibende Richtungsgrösse näher ins Auge gefasst werden. Diese Betrachtungen führen zu einem weitgehenden Parallelismus mit denjenigen des 5., 6. und 4. Kapitels über den magnetischen Zustand, so dass wir geradezu den magnetischen die „elektrischen" Kraftfelder gegenüberstellen können; beide sind miteinander auf das innigste verknüpft.

Dass jede Änderung, und damit auch das Entstehen und Vergehen eines magnetischen Kraftfeldes mit einer elektrischen Erscheinung identisch ist, und umgekehrt jede Zustandsänderung in einem elektrischen Felde notwendig das Auftreten von Magnetismus bedingt, wie wir weiter unten genauer darlegen werden, war für Hertz ein leitender Gedanke. („Über die Beziehungen zwischen den Maxwellschen elektrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Elektrodynamik", wo unter der „gegnerischen Elektrodynamik" dasjenige zu verstehen ist, was wir hier die „älteren Theorien und Anschauungen" genannt haben.)

A) Die Energiewanderung im Felde.

Wenn an und in einem Stromträger fortwährend Stromenergie in Wärme verwandelt wird, 17. Kapitel, so muss in gleichem Maasse immer neue elektromagnetische Energie nachrücken, wenn der Prozess ein längere Zeit andauernder und stationärer sein soll. Dieses Nachrücken kann nur vom Felde aus erfolgen, da wir in demselben den eigentlichen Sitz der bei dem Strome zur Erscheinung kommenden Energie erkannten.

Die Energie des Feldes muss also in fortwährender Wanderung begriffen sein, so lange der Strom und das Niederbrechen der Feldenergie in Wärme innerhalb der Strombahn andauert.

302. Mechanisches Beispiel der Energiewanderung; Modell des elastisch gekoppelten Cykels. — Um uns eine anschauliche Vorstellung von der Wanderung der Energie zu bilden, wollen wir zunächst einen einfachen Mechanismus betrachten, in dem eine solche Wanderung stattfindet und der den Vorteil hat, mit demjenigen unmittelbar vergleichbar zu sein, auf den die Symmetriebetrachtungen über das Phänomen des längs einer Linie bestehenden elektrischen Spannungszustandes innerhalb eines magnetischen Kraftfeldes in § 241 geführt hatten.

Eine Reihe von gleich grossen Rollen mit parallelen Achsen, Fig. 128, Taf. III, sind paarweise durch je einen straff gespannten, in

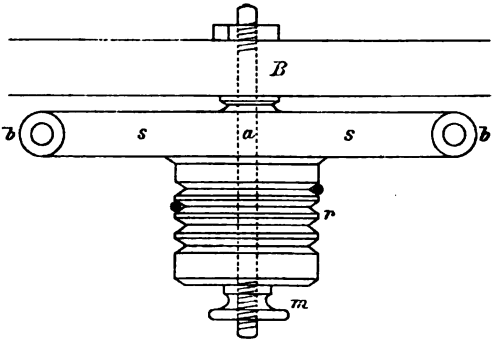


Fig. 129.

sich zurücklaufenden Gummifaden miteinander verbunden; die erste Rolle trägt im Abstande 1 von der Achse eine als Antriebspunkt dienende Kurbel, die letzte kann durch eine Schraube beliebig stark gebremst werden.

Die Ausführung im einzelnen ist die folgende:

Modell der elastisch gekoppelten Rollenreihe.

An einem schmalen horizontal liegenden dicken Brette A, Fig. 128, ist das senkrecht stehende ebenfalls kräftige Brett BB befestigt, an dem neun starke, vorn und rückwärts mit Gewinden versehene Achsen a, Fig. 129, durch Flantschen und Gegenmuttern in horizontaler Lage festgeschraubt sind. Auf diese Achsen sind die ca. 14 cm im Durchmesser haltenden Holzscheiben s, Fig. 129, gesteckt, von denen jede eine Rolle r von etwa 4 cm Durchmesser trägt, in die je vier Riefen von dreieckigem Querschnitt eingetieft sind. (Vorläufig werden nur je zwei derselben gebraucht, damit die Rollen aber auch bei dem später zu beschreibenden Feldmodelle verwendet werden können, versehen wir sie mit vier Riefen). Die Scheiben s sind am Rande ausgedreht und hier ist auf dieselben ein Bleirohr b gelegt, welches zu einem beschwerenden Ringe zusammengelötet ist, wodurch die Rollen ein erhebliches Trägheitsmoment erhalten und schon bei verhältnismässig kleinen Umdrehungsgeschwindigkeiten eine grosse Menge kinetischer Energie in

sich aufspeichern können. Am Abgleiten von den Achsen werden die Rollen durch Muttern m gehindert. Über je zwei Rollen ist ein in sich zurücklaufender Gummifaden gelegt, der so straff gespannt ist, dass er sich fest in die Riefen einlegt und die Drehung der Rollen selbst bei starker Drehungsverschiedenheit von einer zur anderen ohne merkliche Gleitung vermittelt. Im Ruhezustande wird jede Rolle mit einem nach oben gerichteten Striche, Fig. 128, versehen, dessen Bogenentfernung von der Vertikalen für jedes der hier gekoppelten Elemente bei der Drehung die Entfernung aus der Ruhelage (cyklische Koordinate) erkennen lässt. Die letzte, neunte Rolle ist in einem Kasten verborgen, der durch einen unten auf A, oben auf ein gleich weit nach vorn überstehendes Brett A' aufgelegten Deckel $C\,C$ vorn geschlossen ist. Die durch $C\,C$ hindurch ragende Mutter m kann so fest angezogen werden, dass die Bewegung der Rolle *9* ganz gebremst wird; in Fig. 128 ist diese „Druckschraube" mit D bezeichnet.

Die Rollen und die sie verbindenden Gummifäden bilden eine Reihe von „Elementenpaaren" im Sinne der Kinematik, wie sie der Maschinenbauer verwendet, um Energie zu übertragen. Das wesentliche Merkmal solcher „kinematischer Koppelungen" besteht darin, dass sich die beiden Elemente eines Paares (Rolle und Riemen) gleitungslos voneinander abwickeln.

Versuch 111. a) Die letzte, neunte Rolle, Fig. 128, werde zunächst nicht gebremst; wird dann die erste in Umdrehung versetzt, so werden in kurzer Zeit alle Rollen dieselbe gleichförmige Drehungsgeschwindigkeit besitzen. Die einzelnen Elemente veranschaulichen dann die Bewegungen in einem schmalen streifenartigen Teile eines homogenen magnetischen Kraftfeldes. Wird, wie in der Figur angenommen, nach rechts gedreht, so geht der Sinn der Kraftlinien nach § 121 von vorn nach rückwärts, vor der Zeichenebene ist der Kraftlinien aussendende Nordpol, hinter derselben der Südpol zu denken. In dem System ist bei konstanter Umdrehungsgeschwindigkeit aller Elemente nur eine Form von Energie vorhanden, in unserem Beispiel kinetische (von den geringen Reibungsverlusten sehen wir ab).

b) Durch die Druckschraube D wird die letzte Rolle etwas gebremst; sofort treten in den Gummifäden Spannungen auf, alle oberen Teile der koppelnden Elemente sind gespannt, alle unteren sind locker. Bezeichnen wir wie in Fig. 104 die Richtung „ungespannt nach gespannt" durch Pfeile, so haben wir bei Rechtsdrehung der Kurbel an Rolle 1 alle Pfeile nach oben zu ziehen. Zwischen je zwei benachbarten Rollen bestehen Unterschiede der Drehung, wie in Fig. 128 durch die von links nach rechts immer weiter voranstehenden Striche und Pfeilspitzen angedeutet ist; die Figur stellt den Fall dar, wo die Bremsung so stark ist, dass die neunte Rolle gerade um eine ganze Umdrehung hinter der Antriebsrolle 1 zurückbleibt.

Die kinetische Energie, welche wir durch eine auf den Antriebspunkt wirkende Kraft $\mathfrak{P}$ in die erste Rolle hineingeben, überträgt sich zum Teil allerdings noch immer als kinetische Energie auf die folgenden

Rollen, zum Teil existiert sie aber auch als Energie elastischer Spannung in den Gummifäden. An der letzten Rolle endlich wird die von rechts her fortwährend zufliessende Energie in Wärme transformiert. Soll die Drehung im Gange bleiben, so muss andauernd Energie bei 1 in das System gegeben werden (Energie geordneter Bewegung); umgekehrt findet das erneute Heranwandern von Energie nur so lange statt, als bei *D* Energie aus dem System genommen und in Wärme verwandelt wird. Wir haben hier das Beispiel einer Energiewanderung im Sinne des Pfeiles *E*, Fig. 128, vor uns.

Die Analogie mit den Fällen der Transformation von Feldenergie in Wärme beim Stromträger § 276 tritt ohne weiteres hervor. Denken wir uns die ganze Fig. 128 um eine durch die Mitte der Rolle 9 gehende vertikale Achse gedreht, so haben wir ein Bild eines kurzen Stückes eines konachsialen Stromfeldes vor uns; der Kasten *A' C C* mit der in ihm verborgenen Rolle mit Reibung an ihren Lagern stellt den Stromträger vor mit seinem in seinen Einzelheiten unserem Verständnis noch verschlossenen Transformationsmechanismus.

Die zu konzentrisch den Träger umschliessenden Röhren ausgezogenen Rollenquerschnitte repräsentieren die Kraftröhren des Magnetfeldes. Die Energie fliesst von aussen her (Pfeil *E*) an den Leiter heran, um in ihm in Wärme verwandelt zu werden; die elektrische Spannung wirkt dem Leiter parallel.

Wir haben hier nur ein Bild der Vorgänge beim galvanischen Strome, aber ein sehr viel vollkommeneres, zutreffenderes und aussichtsreicheres als das Strömungsbild der älteren Anschauungen.

303. Maxwell's Displacement; dielektrische Polarisation. — Maxwell kam zu dem Schlusse, dass ein Medium, welches Träger elektromagnetischer Wirkungen wird, in doppelter Beziehung sich in einem eigentümlichen Zustande befinden müsse. Insofern es Träger magnetischer Kräfte ist, muss es den magnetischen Polarisationszustand annehmen, den wir schon in § 104 besprachen. Insofern aber sich in ihm auch Spannungen elektrischer Natur ausbilden, ist es Sitz eines elektrischen Polarisationszustandes geworden. Dieser besteht nach Maxwell darin, dass in jedem Elemente des Mediums das eine Ende durch irgend welche Eigenschaften von dem anderen differenziert erscheint. Er nannte dieses Verschiedensein in entgegengesetzter Richtung: Displacement oder dielektrische Polarisation des Volumenelementes.

Maxwell hat selbst verschiedene Bilder dieses Zustandes zu geben versucht, ohne je mehr in ihnen niederlegen zu wollen, als dieses verschiedene Verhalten nach beiden Seiten hin. Fitzgerald machte darauf aufmerksam, dass wir in den auf der einen Seite gespannten, auf der anderen entspannten in sich geschlossenen Gummifäden, Fig. 128, das beste mechanische Bild des Displacement vor uns haben.

Denn die Fäden unseres Modelles sind zwar immer gespannt, bei eintretendem Polarisationszustand aber ist es die eine Seite mehr als die andere, so dass Verschiedenheiten auf beiden Seiten dieses koppelnden Elementes auftreten.

Wie auch der längs der Magnetkraftlinien bestehende Vorgang, dem wir achsialen Charakter zuschreiben müssen, und die Art und Weise, wie die auf benachbarten Kraftlinien liegenden Elemente eines magnetisierten Mediums miteinander verknüpft (gekoppelt) sind, sein möge, immer wird eine polare Gegensätzlichkeit hervorgerufen werden, wenn benachbarte Elemente zeitlichen Änderungen ihrer Drehgeschwindigkeit in verschiedener Weise unterworfen sind.

Das Rollenmodell zeigt uns Verknüpfungen mit allen Eigenschaften der in dielektrischer Polarisation befindlichen Elemente eines auf elektrische Spannung in Anspruch genommenen Feldmediums, denn auch bei ihm tritt jene Gegensätzlichkeit von Gespannt- und Losesein nur dann auf, wenn benachbarte Rollen sich verschieden rasch drehen. Spannungen im Felde erscheinen nie ohne die Begleiterscheinung des Magnetismus, bei uns der Rotation; jede zeitliche Änderung der dielektrischen Polarisation muss daher notwendig das Auftreten magnetischer Kräfte in der Umgebung bedingen (der Spannungszustand kann sich nicht ändern, ohne gleichzeitige Drehung der gekoppelten Elemente). Hierin besteht eine Haupteigentümlichkeit dieses Zustandes, die von Maxwell auf Grund seiner Theorie vermutet, von Hertz mit aller Schärfe experimentell bestätigt wurde. Die Richtung der Polarisation steht stets senkrecht zu der Richtung der bei einer zeitlichen Änderung erzeugten magnetischen Kraft und damit (im isotropen Medium wenigstens) auch senkrecht zur magnetischen Polarisation. Auch dies lässt unser Bild, Fig. 128, als notwendig erkennen. Ferner zeigt ein Vergleich mit unserer mechanischen Interpretation des elektrischen Kraftvektors $\mathfrak{E}$, § 241, dass die Richtung der dielektrischen Polarisation (entspannt nach gespannt § 241) mit der des Vektors $\mathfrak{E}$ zusammenfällt; denn das Displacement bezieht sich ja gerade auf die Gegensätzlichkeit von Entspanntsein auf der einen und Gespanntsein auf der anderen Seite. Daher ist dasselbe ebenso wie $\mathfrak{E}$ quer zu den koppelnden Elementen, im Modelle den Gummifäden, gerichtet, während die Verschiebung und Spannung der einzelnen Bestandteile selbst natürlich in der Richtung der Fäden erfolgt.

Das Wort Displacement erinnert an eine Verschiebung eines materiellen, wenn auch imponderablen Fluidums. In der That wurde es auch ursprünglich im Anschluss an die alten Fluidumhypothesen gebildet. Maxwell verwahrt sich aber gelegentlich ganz ausdrücklich dagegen, als hätte er mit dem Worte mehr als nur jene polare Gegensätzlichkeit, welche wir ausschliesslich betonen, bezeichnen wollen. In diesem Sinne wollen auch wir von „Verschiebung" sprechen, ohne etwa an eine Verschiebung positiven Fluidums in der einen, negativen in der entgegengesetzten Richtung innerhalb eines jeden Elementes eines polarisierten Mediums zu denken, wie dies verschiedentlich bei Darstellungen der Maxwellschen Theorie geschieht. Wir halten uns an das im vorigen Paragraphen erläuterte

mechanische Bild, was nur die Bestandteile des Mediums selbst, nicht aber hypothetische, diesem eingelagerte Fluida kennt.

304. Die Poyntingsche Regel für die Energiewanderung im elektromagnetischen Kraftfelde. — Bei dem Modelle Fig. 128 wandert die mechanische Energie von rechts nach links; dort, wo sich der Antriebspunkt (Rolle 1) befindet, wird immer aufs neue Arbeit geleistet und damit durch eine äussere, an der cyklischen Koordinate wirkenden Kraft, etwa unsere Muskelkraft, dem System Energie zugeführt; sie wird nach links hin weiter gegeben, an dem gebremsten Teile fortwährend in Wärme verwandelt und als solche den umgebenden Massen zugeführt. Kehren wir den Drehungssinn des Antriebsmechanismus um, so wechselt auch der Drehungssinn aller anderen Teile.

Im Sinne unseres elektromagnetischen Bildes heisst dies: die Richtung der magnetischen Kraftlinien geht jetzt von rückwärts durch die Zeichenebene nach vorn.

Gleichzeitig kehrt sich aber an allen Stellen auch die Richtung der Spannungen in den vermittelnden Elementen um; die Richtung

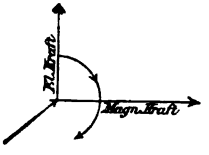


Fig. 130.

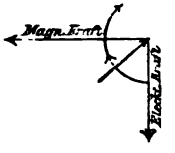


Fig. 131.

der elektrischen Kraft, des Displacement, der dielektrischen Polarisation ist dann von oben nach unten gerichtet. Die Energie wandert nach wie vor von rechts nach links durch die Reihe der gekoppelten Elemente hindurch. Der Energiefluss ist also in völlig eindeutiger Weise mit den Richtungen des magnetischen und elektrischen Kraftvektors verbunden. Die folgende Regel gilt ganz allgemein:

Die Energie wandert immer in einer Richtung durch das elektromagnetische Feld, welche sowohl zur Richtung der magnetischen wie der elektrischen Kraft senkrecht steht. Und zwar ist der Sinn der Wanderung derselbe wie der der Vorwärtsbewegung einer gewöhnlichen Rechtsschraube (Korkzieher), wenn dieselbe in der Richtung von der elektrischen zur magnetischen Kraft herumgedreht wird.

Von rechts her gesehen, liegen die genannten beiden Vektoren bei dem in Fig. 128 gezeichneten Drehungssinne, wie es Fig. 130 zeigt; die Schraube dringt vorwärts, wenn sie im Pfeilsinne gedreht wird, ebenso die Energie (Pfeil E in Fig. 128, § 302). Ist der Drehungssinn an Rolle 1 der umgekehrte, so liegen die Vektoren (von rechts gesehen) wie es Fig. 131 zeigt, die Wanderung der Energie erfolgt wieder gegen die Zeichnungsebene hin.

Die Quantität der in der Zeiteinheit übertragbaren Energie ist sowohl der elektrischen wie der magnetischen Kraft, in unserem mechanischen Beispiele der Drehgeschwindigkeit und der elastischen Spannung, also dem Produkte beider Grössen proportional. Diese Regel hat zuerst POYNTING als unmittelbare Folge der MAXWELLschen Theorie abgeleitet.

305. Energiewanderung im Stromfelde. — Wie wir im 17. Kapitel ausführlicher darlegten, ist der wesentliche Zug der elektrischen Strömung in einem Drahte die fortwährende, in ihn sich hinein erstreckende Fortpflanzung von elektrischer Spannung und elektromagnetischer Energie, veranlasst durch Niederbrechen dieser Spannungen und die Umwandlung ihrer Energie in Wärme.

Der Hauptmechanismus des elektrischen Stromes liegt also in dem umgebenden Medium. Von diesem wird die Stromenergie geliefert, sie tritt von der Seite her aus dem Felde an den Draht heran. Der Draht spielt natürlich auch eine wesentliche Rolle, denn ohne das fortwährende Niederbrechen von Spannung an ihm würde ja kein Nachlassen derselben entstehen, die zurückwirkende Spannung des Mediums würde bald gleich der vorwärts wirkenden der Energiequelle sein, und damit würde die Maschinerie aufhören zu arbeiten.

Wir erhalten durch Vereinigung der Figg. 67 und 128 ein anschauliches Bild von den Vorgängen in der Umgebung eines Stromträgers. Denkt man sich mehrere Modelle wie Fig. 128 übereinander gesetzt und die untereinander stehenden Rollen der einzelnen Reihen ebenfalls durch Gummifäden verbunden (die wirkliche Ausführung siehe weiter unten in § 326) und die Anfangsrollen 1 jeder Reihe besonders und gleich stark angedreht, so haben alle Spannungen der übereinander liegenden Fäden die gleichen Richtungen, sie addieren sich und wir können von einer Spannung pro Längeneinheit des Leiters *C C* sprechen, von einem „Spannungsgefälle" oder „Spannungsgradienten", vergl. § 241. Lässt man das ganze System um *C C*, Fig. 128, als Achse rotieren, so erhält man eine Verteilung, wie in Fig. 132, Taf. III, welche den Querschnitt durch das Feld eines langen, dicken, geradlinigen Drahtes *S*, der Träger eines stationären galvanischen Stromes ist, darstellt. Der dunkel schraffierte Teil soll den Längsschnitt durch den Leiter selbst, die Kreise in der Umgebung die Querschnitte der konzentrischen magnetischen Kraftröhrenringe veranschaulichen. Der Strom sei von unten nach oben gerichtet; die Drehbewegungen erfolgen dann rechts uhrzeigermässig, links umgekehrt, vergl. Fig. 49. Die die Drehung vermittelnden Teile des Mediums zeigen eine von unten nach oben gerichtete dielektrische Spannung.

Die Energie wandert nach der POYNTINGschen Regel § 304 fortwährend auf der rechten Seite von rechts nach links, auf der linken Seite von links nach rechts, also beide Mal vom Felde her gegen den Leiter hin. Fig. 67 giebt einen Teil des linksseitigen Mechanismus wieder, aber noch ohne Verbindung mit dem Leiter, d. h. ohne Bremsung an oder in diesem. Darum haben dort die Fäden auch noch keine Spannung (es ist nur „spin" vorhanden, § 276, auf den „slip" ist noch nicht Rücksicht genommen).

Nur ein Umstand könnte auf den ersten Blick störend erscheinen. Bei dem Modelle Fig. 67 drehen sich die weiter entfernten Elemente entsprechend

langsamer; hier müssen die äusseren Rollen scheinbar eine grössere Drehung erfahren, damit die von unten nach oben gerichtete Spannung in den Zwischenelementen zu stande kommt.

Dass hier kein Widerspruch vorliegt, sondern gerade wegen des Bestehens eines Gesetzes wie das der reciproken Entfernung § 164 unser Bild als besonders zutreffend erscheinen muss, lehrt eine einfache Überlegung: Der Zustand sei stationär geworden, d. h. von allen Seiten wandere gerade soviel Feldenergie heran, als im Stromträger verbraucht wird. Dann geht in derselben Zeit durch eine zum Träger konachsiale Cylinderfläche in der Entfernung r_2 genau so viel Energie wie durch eine engere Cylinderfläche vom Radius r_1 und derselben Höhe ($r_2 > r_1$). Auf der äusseren Fläche stehen aber r_2/r_1 mal soviele Einzelelemente für diese Energieübertragung zur Verfügung, jedes einzelne hat also bei derselben elektrischen Spannung nur eine r_1/r_2 so kleine magnetische Kraft zu repräsentieren, d. h. braucht sich nur r_1/r_2 mal so rasch zu drehen, wie ein Element in der Entfernung r_1, wie es in dem Modelle Fig. 67 der Fall war (§§ 304 und 125 Schlusssatz).

Gerade dadurch, dass die magnetische Kraft in der Entfernung von r cm r mal so klein, als in der Entfernung 1 ist, bedingt die r-fache Zahl der bei dem Herbeiführen von Energie zwischen Schichten gleichen Spannungsabfalles beteiligten Einzelelemente des Mediums die Gleichförmigkeit des Energieflusses. Unsere Vorstellung erfordert also geradezu das Bestehen des Biot-Savartschen Gesetzes § 164.

B) Ansammlung von elektrischer Spannungsenergie.

306. Ungeschlossene Ströme. — Wenn wir an die Polklemmen einer Stromquelle von bestimmter Klemmenspannung, z. B. einer magnetelektrischen Maschine, ein Kabel anschliessen, so vollzieht sich alsbald die Wanderung der Energie dem Kabel entlang und in dieses hinein. Nach unserer kinetischen Vorstellung setzt sich dabei der Feldmechanismus in Bewegung, magnetische Kraftlinien werden rings um den Leiter ausgebildet. Schneiden wir das Kabel an einer Stelle durch, so müsste nach der älteren Auffassung das Stromphänomen momentan stocken, da die metallische Leitung, in der das (als inkompressibel vorausgesetzte) Fluidum fliesst, unterbrochen ist. Nach der neueren (Maxwellschen) Auffassung setzt sich der Prozess indessen noch eine Zeit lang fort, nämlich so lange, bis die Drehung der Feldelemente und die damit verbundene Spannung im Zwischenmittel einen bestimmten Wert erreicht hat. Stillstand der ganzen „Maschinerie" (Poynting) tritt offenbar erst ein, wenn die rückwirkende Spannung des Feldes gerade so gross geworden ist wie die Spannung, welche die magnetelektrische Maschine zur Verfügung stellt. Dann tritt an Stelle des stationären Bewegungszustandes ein Gleichgewichtszustand, ein „statischer" Zustand ein. Eine bestimmte Quantität elektrischer Spannungsenergie ist in dem Felde aufgehäuft, die Magnetkraftlinien (Drehung, spin) verschwinden. Werden die freien Kabelenden wieder

vereinigt, so setzt sich der Mechanismus wiederum in Bewegung, Stromkraftlinien erscheinen aufs neue.

Unser Modell Fig. 128 veranschaulicht auch diesen Vorgang sehr gut.

Versuch 111. c) (Vergl. oben p. 357 a) und b).) Die Rolle Nr. 9 Fig. 128 wird durch die Druckschraube D so stark gebremst, dass sie sich gar nicht mehr bewegen kann. Dann wird an ihr auch keine Bewegungsenergie durch Reibung in Wärme umgewandelt. Wird Rolle 1 nach rechts aus der Gleichgewichtslage gedreht (Stromquelle), so werden auch alle folgenden Rollen gedreht (Magnetismus), aber die Drehung kann bei gegebener Kraft $\mathfrak{P}$ nur bis zu einem bestimmten Betrage fortgesetzt werden, nämlich nur so lange, bis die elastische Rückwirkung aller Gummifäden auf die erste Rolle gerade gleich $\mathfrak{P}$ geworden ist. Dann steht die Maschine still. Alle Energie, welche an 1 gewirkt hat, ist in Form von Spannungsenergie aufgehäuft.

Das Medium befindet sich im dielektrischen Zwangszustande, § 303. Die Stärke desselben hängt von der Natur des Zwischenmittels, hier von der Länge, der Dicke und dem Elasticitätskoeffizienten e (§ 118) der Fäden ab.

Lässt man den Antriebspunkt an Rolle 1 plötzlich los, so entspannen sich die Fäden, Drehung (magnetische Kraft) tritt auf, die Spannungsenergie verwandelt sich in kinetische. Da die Rollen, namentlich die in rasche Bewegung geratenen ersten, bei ihrer Rückkehr zur Gleichgewichtslage dieselbe überschreiten, so tritt wieder ein teilweises Spannen der Fäden ein, Spannungsenergie entwickelt sich; die Richtung der dielektrischen Polarisation ist jetzt aber die umgekehrte wie vorhin; diese verwandelt sich wieder in Drehung (magnetische Kraft) u. s. f.: man erhält „Schwingungen". Wenn die Rollenreihe mit anderen benachbarten gekoppelt ist, so werden die Schwingungen auf dieselben übertragen („elektromagnetische Strahlung" siehe weiter unten).

Das Modell versinnbildlicht noch einige andere Analogien mit elektromagnetischen Zwangszuständen: Man darf die Spannung nicht zu weit treiben, sonst reisst ein Faden, „das Medium bricht unter der Wirkung der dielektrischen Spannung nieder". Dann lösen sich mit einem Male auch die Spannungen in allen übrigen Fäden, die aufgehäufte Energie „entladet sich".

Bei den entsprechenden elektrischen Vorgängen findet dies gewöhnlich in der Form eines Funkens statt. Das stärkste elektrische Feld, was wir in Luft von Atmosphärendruck erzeugen können, ohne die elektrische Festigkeitsgrenze derselben zu überschreiten und dadurch Entladungen herbeizuführen, ist erfahrungsgemäss ungefähr 30 000 Volt für die Länge eines Centimeters (Spannungsgradient).

Die vorstehenden Betrachtungen führen zu dem Begriffe der „ungeschlossenen Ströme", welche sich längs eines Trägers, der nicht zu einem metallischen Schliessungskreise vereinigt ist, ausbilden. Das Studium derselben hat seit Hertz eine grosse Bedeutung erlangt.

Die Bezeichnung „ungeschlossen" bezieht sich, wie das Beispiel, an das wir anknüpften, zeigte, auf die metallische Leitung. Da sich die Feldbewegungen und -Spannungen auch durch das isolierende Zwischenmittel hindurch fortsetzen, so reicht bei den neueren Auffassungen der Begriff des „Stromes" viel weiter als das „Strömungsbild" es erlaubte, da er bei diesem naturgemäss auf den Leiter selbst beschränkt war. Die dielektrischen Polarisationen setzen den um den „Leiter" herum sich abspielenden Prozess in den die metallische Leitung trennenden Zwischenraum hinein fort. Diese erweiterte Auffassung bezüglich der ungeschlossenen Ströme bildete einen der wesentlichsten Punkte, durch die sich die Maxwellsche Theorie von den älteren Anschauungen unterschied. Hier konnte das Experimentum crucis einsetzen, welches Hertz anstellte; nach diesem giebt es also ungeschlossene Ströme im eigentlichen Sinne überhaupt nicht, vergl. auch § 315 „Maxwells Verschiebungsstrom".

307. Ladung eines Kondensators. — An eine magnetelektrische Maschine von der Klemmenspannung E Volt schliessen wir ein Kabel an; wir schneiden es an einer Stelle durch und setzen an die entstehenden freien Enden je eine ebene Platte von der Fläche F cm² an, die wir im Abstande von a cm einander parallel gegenüber stellen. Von der Stromquelle aus wandert die Stromenergie an den Kabeln entlang zwischen die Platten hinein, so lange, bis die Spannungsdifferenz zwischen ihnen gerade gleich E geworden ist. Dann hört das Stromphänomen auf, aber zwischen den Platten ist eine gewisse Menge Spannungsenergie angehäuft. Man nennt ein solches Plattenpaar darum einen „Ansammlungsapparat" oder einen „Kondensator" für diese Energieform, den Strom, welcher die Energie lieferte, den „Ladestrom."

Wir können uns von dem Spannungs- oder Zwangszustande innerhalb der Platten eines „geladenen Kondensators" auf Grund unserer Betrachtungen in § 302 und § 306 ein anschauliches Bild machen, Fig. 133, Taf. III. Von rechts her ist Energie in den Kondensator eingewandert. Die Zuleitungsdrähte müssen rechts ausserhalb der Zeichnung gelegen gedacht werden. Die vertikale Rollenreihe zur äussersten Linken ist unbewegt geblieben. Die Spannungen sind von unten nach oben gerichtet.

Das Medium zwischen den Platten bietet die Stützpunkte für die dielektrische Spannung. Da die Grösse derselben von der Natur des Zwischenmittels abhängt, muss auch dieses bei dem Prozess eine individuelle Rolle spielen. Das isolierende Medium ist in bestimmter Weise modifiziert und wir können uns diesen Zustand nach den bisherigen Betrachtungen als eine Spannung vorstellen, welche die kleinsten Teile des Mediums ergreift. In der That bemerken wir zum Beispiel, dass das Licht verschieden schnell in verschiedenen Richtungen ein isotropes Medium durcheilt, wenn dieses Träger einer solchen dielektrischen Spannung ist: das Medium wird doppelbrechend, gerade wie wenn es durch mechanische Kräfte in seinen kleinsten Teilen gespannt würde.

308. Begriff der „Elektricität" im Rahmen der neueren Anschauungen. — Ist das Medium zwischen zwei leitenden Körpern in dielektrischer Polarisation begriffen, so äussert sich dies an den Oberflächen der Körper darin, dass an ihnen polar verschiedene Spannungszustände bestehen. So sehen wir an die einzelnen Oberflächenelemente der unteren Kondensatorplatte der Fig. 133 nur polarisierte Elemente mit ihren entspannten Seiten grenzen, an der Oberfläche der oberen Platte dagegen ist das Medium in allen seinen Teilen in Spannung begriffen. Man hat diesen Gegensatz durch die Gegensätzlichkeit von + und −, d. h. von positiv und negativ bezeichnet und pflegt den Körper, von dem die in der Fig. 133 durch die vertikalen Pfeile bezeichneten Feldspannungen ausgehen, als den „positiven" zu bezeichnen.

Die elektrischen Entladungen (§ 306), bei denen diese Gegensätzlichkeit besonders auffällig zu Tage tritt, namentlich wenn sie in verdünnten Gasen erfolgen (Gasentladungen), weisen in der That auf einen eigentümlichen, an der negativen Platte („Kathode") bestehenden Spannungszustand hin. Die Lösung der Spannungen erfolgt hier in ganz anderer Wechselwirkung mit dem Platten-(Elektroden-)Materiale als an der positiven Platte („Anode"), (dasselbe wird zerstäubt u. s. w., ferner sei auf die sog. lichtelektrischen Versuche hingewiesen, d. h. Lösung dieser Kathodenspannung durch Bestrahlung mit ultraviolettem Lichte).

Die Fluidumhypothesen dachten sich auf den beiden Metallmassen, welche das dielektrische Feld begrenzen, gleiche Mengen von positivem und negativem Fluidum, der sog. + und − Elektricität, aufgehäuft.

Nach unserer Auffassung ist „Elektricität" oder „Elektrisierung" eines Körpers nur eine Bezeichnung für die Modifikation, welche die oberflächlichen Schichten deshalb erfahren haben, weil Spannungen des umgebenden Mediums an ihnen enden.

Die als „elektrostatische Ladungen" bezeichneten andauernden Spannungen kommen nur in Gegenwart ponderabler Materie vor; sie sind offenbar an diese gebunden, gleichsam als ob wir nur an körperlichen Atomen den Halt gewinnen könnten, den wir brauchen, um ein Medium dielektrisch zu spannen.

Das Gesetz, nach dem infolge dieser Spannungen elektrostatisch geladene Körper aufeinander wirken, hängt von der speziellen Art ab, wie die einzelnen Bausteine der Materie miteinander verknüpft sind, vergl. den folgenden Paragraphen.

309. Das Dielektrikum. — Das Medium zwischen den einzelnen Teilen eines ein elektrisches Spannungsfeld begrenzenden Leitersystems nennt man ein „Dielektrikum". Wir haben also als Dielektrikum jeden Körper zu betrachten, in dem die elektrische Spannung bis zu einem bestimmten Betrage gesteigert werden kann, in dem also allgemein eine „Verschiebung" § 303 möglich ist. Wie wir weiter unten zeigen werden, ist die Spannungsenergie, welche in einem bestimmten Raume z. B. zwischen den Platten eines Kondensators bei derselben spannenden Kraft angesammelt werden kann, sehr verschieden, je nach der Natur des Dielektrikums.

So wird auch in unserem elastischen Modelle bei derselben Verschiebung eine ganz verschiedene Energiemenge angesammelt, je nach den elastischen Eigenschaften der Zwischenelemente, der gespannten Fäden.

310. Linien dielektrischer Polarisation. — Die Richtung der dielektrischen Verschiebung fällt in den hier allein betrachteten (isotropen) Medien mit der Richtung der elektrischen Kraft zusammen, § 303. Gehen wir in der Richtung des Displacement (von der entspannten zur gespannten Seite, § 241) von Element zu Element eines Dielektrikums weiter, so werden wir auf Linien, den „Polarisations- oder Induktionslinien" (MAXWELL) entlang geführt, deren Verlauf den Linien der elektrischen Kraft parallel ist. Da aber der numerische Wert der Polarisation sich von dem der elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$ im allgemeinen unterscheiden wird, da ja auf die Polarisation die spezifische Beschaffenheit des Dielektrikums von Einfluss ist, so sind die Induktions- oder Polarisationslinien nicht in der gleichen Dichte wie die Kraftlinien anzunehmen und zu zeichnen.

Es besteht hier ein ähnlicher Unterschied wie zwischen magnetischen Induktionslinien ($\mathfrak{B}$) und Kraftlinien ($\mathfrak{H}$) § 108.

Röhrenförmige, von Induktionslinien umhüllte Räume werden der Analogie (§ 108) wegen als „Induktionsröhren" bezeichnet.

So stellen die in den Figg. 128, 132 und 133 gezeichneten blauen Linien, welche der Richtung der dielektrischen Spannungen parallel verlaufen, die Mäntel von solchen Induktionsröhren dar.

311. Flächen gleicher elektrischer Spannung. — Nach früheren Betrachtungen summieren sich die Spannungen, welche längs einer elektrischen Kraftlinie bestehen. Legen wir durch die Punkte einer Kraftlinienschaar, in denen die Spannungen den gleichen Wert haben, eine Fläche, so erhalten wir eine „Fläche gleicher elektrischer Spannung" oder eine sog. „Niveaufläche".

In den Figg. 128, 132 und 133 bezeichnen die zur Kraftlinienrichtung senkrechten roten Linien die Spuren solcher Niveauflächen in der Zeichnungsebene; zwischen je zwei von ihnen herrscht dieselbe Spannungsdifferenz. Denken wir uns ein Feld ganz mit unendlich vielen, unendlich kleinen solchen elastisch gekoppelten achsialen Elementen erfüllt, so ist leicht zu erkennen, dass die Niveauflächen senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien stehen müssen.

Durch Induktionsröhren und Niveauflächen können wir den ganzen Feldraum in Zellen abteilen, von denen jede einen bestimmten Inhalt an elektrischer Spannungsenergie enthält (MAXWELLS Zellen).

312. Dielektrisches Moment. — Das Modell Fig. 128 sowie die Diagramme der Tafel III hatten uns dazu gedient, eine Reihe qualitativer Eigenschaften des dielektrisch polarisierten Feldes zu erläutern. Jetzt wollen wir einige für das Folgende wichtige quantitative Beziehungen ableiten; unser mechanisches Modell soll uns dabei wiederum

als Führer dienen, doch sollen die Betrachtungen sogleich in solcher Allgemeinheit durchgeführt werden, dass sie frei von jeder speziellen Voraussetzung sind und eine von jedem besonderen Bilde unabhängige Bedeutung haben. Dazu müssen wir zunächst einen Begriff einführen, welcher uns ein Maass für den in einem Dielektrikum bestehenden Zwangszustand zu geben vermag.

Für unser mechanisches Analogon ergiebt sich ein solches sehr einfach aus der Betrachtung der elastischen Kräfte: Wir fassen einen bestimmten, von elastisch gespannten Elementen erfüllten, von einer Induktionsröhre und zwei beliebigen Niveauflächen begrenzten Raum (eine Zelle § 311) ins Auge, in Fig. 128 etwa den zwei Fadenpaare enthaltenden Raum zwischen zwei blauen vertikalen und den beiden roten horizontalen Linien. Von dem Momente an, in dem spannende Kräfte auf das System an irgend einer Stelle, z. B. an Rolle 1 wirken, treten in den Fäden Kräfte auf, welche zum Gleichgewichtszustand zurückstreben. Der innerhalb des betrachteten Raumes, der Zelle, im ganzen bestehende Zwangszustand hängt ab von der Zahl der polarisierten Elemente (zwei Fadenpaare) und dem Betrage, den die Polarisation erreicht hat, also sowohl von der Grösse der polarisierenden Kraft wie der Elasticität des Materiales, da diese angiebt, inwieweit der elastische Körper einer bestimmten äusseren Kraft nachgiebt. Betrachten wir einen halb so grossen Raum, der also nur ein Fadenpaar enthält, so ist in diesem die Anzahl der gleichgespannten Elemente und damit die vorhandene Gesamtspannung auch nur halb so gross, bei einem doppelt so grossen Raume aber (zwei Zellen), der vier Fäden zwischen fünf Rollen enthält, doppelt so gross als im ersten Falle. Das Verhältnis der Gesamtspannung zu dem Raume, innerhalb dessen sie angetroffen wird, giebt also ein Maass für den im Cykel an jeder Stelle vorhandenen Spannungszustand. Die Betrachtung lässt sich leicht auf die anderen Modelle Taf. III übertragen.

Bei einem dielektrisch polarisierten Medium haben wir den Sitz der Polarisation in den kleinsten Elementen desselben zu suchen; wir kennen aber weder deren Zahl noch den Zwangs- oder Spannungszustand, in dem sich jedes einzelne befindet. Bleiben wir inmitten des freien Spannungsfeldes und halten uns von den Grenzen des Dielektrikums sowie von Flächen fern, an denen ein Dielektrikum an ein völlig davon verschiedenes grenzt, so dürfen wir annehmen, dass sich die Zustände von Nachbarelementen nur unendlich wenig voneinander unterscheiden, dass die Polarisation stetig mit dem Orte variiere. Worin daher auch dieser Zustand, das Displacement bestehe, und wonach wir es bemessen, immer werden sich um so grössere Beträge ergeben, je grösser der ins Auge gefasste Raum ist. Betrachten wir daher an einer Stelle ein Volumenelement, so wird das Verhältnis von darin angetroffenem Displacement zu dem Volumen des Elementes charakteristisch für den daselbst im Dielektrikum überhaupt bestehenden Polarisationszustand sein. Dieses Verhältnis ist aber die auf die Volumeneinheit berechnete Gesamtverschiebung. Sie ist um so grösser, je mehr polarisierbare Teilchen in demselben Volumenelement enthalten

sind und je leichter diese bei gegebener wirkender elektrischer Kraft in den Polarisationszustand übergehen. Man nennt dieses Verhältnis „das dielektrische Moment pro Volumeneinheit“ und bezeichnet es nach MAXWELL durch $\mathfrak{D}$.

Wir übernehmen diese Bezeichnung aus den älteren Anschauungen. Unter Moment eines Magneten verstanden wir nach § 67 das Produkt aus Polstärke und Polabstand. Nach § 93 hatten wir uns einen Magneten aus lauter einzelnen kleinen (Molekular-)Magneten, jeden von bestimmtem Momente, zusammengesetzt zu denken und hatten mit Rücksicht darauf in § 99 auch schon von einem magnetischen Momente pro Volumeneinheit gesprochen. Bei der dielektrischen Polarisation begegnete man polaren Differenzierungen, welche ebenfalls in den kleinsten Teilen ihren Sitz haben. Man dachte sich in den polarisierten Elementen das + Fluidum von dem − Fluidum getrennt und beide Fluida an die entgegengesetzten Enden der kleinen Volumina verschoben. Quantität mal Abstand wurde auch hier als Moment angesehen, bei Division durch das Volumen ergab sich das auf die Volumeneinheit bezogene Moment. Waren die Elemente durch elektrische Induktionsröhren § 310 und Niveauflächen begrenzt, so war $\mathfrak{D}$ eine verschobene Elektricitätsmenge, dividiert durch ein Flächenelement der Niveaufläche, d. h. die pro Flächeneinheit auf die Niveaufläche verschobene Elektricitätsmenge. Nach den in § 308 am Ende gegebenen Auseinandersetzungen kann in unserem Begriffssystem analog $\mathfrak{D}$ als die auf der Flächeneinheit der Niveaufläche angetroffene Gesamtspannung angesehen werden.

313. Beziehungen zwischen dielektrischer Polarisation und elektrischer Kraft. — Die im Dielektrikum bestehende Spannung hält einer elektrischen Kraft das Gleichgewicht. Zwischen beiden muss eine numerische Beziehung bestehen; um sie zu finden, gehen wir wiederum von dem mechanischen Analogon des elastisch gekoppelten Cykels § 303, Fig. 128, Taf. III aus. In § 118 erwähnten wir, dass die elastischen Kräfte innerhalb gewisser Grenzen der Grösse der durch sie hervorgerufenen Deformationen proportional zu setzen sind. Bezeichnen wir die an der ganzen Rollenreihe Fig. 128 angreifende Kraft mit $\mathfrak{P}$, die durch sie bei völliger Bremsung der letzten Rolle 9 hervorgerufene, durch die Bogenentfernung des Antriebspunktes auf 1 von der Anfangslage gemessene Deformation mit $\mathfrak{p}$, so ist

$$\mathfrak{P} = \vartheta\,\mathfrak{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 97)$$

wo ϑ offenbar die Kraft darstellt, welche zu einer Dehnung $\mathfrak{p} = 1$ aufzuwenden ist (Elasticitätsmodul). Je grösser ϑ ist, um so schwerer ist das Fadensystem durch eine gegebene Kraft zu spannen.

Würden wir statt der „weich elastischen“ Gummifäden Stahldrähte zur Koppelung der Rollen verwenden, so würden bei dem viel höheren Modul ϑ dieses Materiales viel kleinere „Verschiebungen“ bei denselben Kräften resultieren. Um der später näher auszuführenden Analogie willen erinnern wir daran, dass die Grösse $\mathfrak{p}$ mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ (§ 137) in der Beziehung: $\mathfrak{p} = \int \mathfrak{q} \cdot dt$ steht.

Den reciproken Wert von ϑ, nämlich $\eta = 1/\vartheta$ (Elasticitätskoeffizient),

können wir als Maass der Nachgiebigkeit gegen deformierende Kräfte, als „elastische Kapazität“ ansehen, und nach 97) besteht die Relation

$$\mathfrak{p} = \eta \mathfrak{P} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 98)$$

Hiernach wird bei dem mechanischen Modelle des Dielektrikums die Entfernung vom Gleichgewichtszustande $\mathfrak{p}$ und damit das Displacement, der gesamte Polarisationszustand durch das Produkt der wirkenden Kraft $\mathfrak{P}$ und eines Faktors η gemessen, der die Fähigkeit des Mediums Displacement, Polarisation anzunehmen, misst.

Ob bei dem Dielektrikum zwischen dielektrischem Momente $\mathfrak{D}$ und elektrischer Kraft $\mathfrak{E}$ ebenfalls Proportionalität und damit eine ähnliche einfache Relation wie 98) besteht, kann nur die Erfahrung entscheiden.

Die Beziehung zwischen magnetischer Polarisation (Induktion) $\mathfrak{B}$ und wirkender Feldkraft $\mathfrak{H}$ war nach Formel 8) § 109

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}.$$

Wir bemerkten aber in § 111, dass diese Relation nur angenähert gilt, insofern μ keine eigentliche Konstante ist, sondern selbst wieder von $\mathfrak{H}$ abhängt. Etwas Ähnliches ist bei der Beziehung zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ seither nicht bekannt geworden. Soweit die Beobachtungen reichen, besteht zwischen beiden Grössen genaue Proportionalität:

Die gesamte Verschiebung innerhalb der Volumeneinheit, das dielektrische Moment $\mathfrak{D}$ ist der elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$ direkt proportional.

314. Dielektricitätskonstante. — Können die beiden Richtungsgrössen des dielektrischen Momentes $\mathfrak{D}$ pro Volumeneinheit und der elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$ pro Centimeter Länge einander proportional gesetzt werden, wie im vorigen Paragraphen ausgeführt wurde, so können wir beide Vektoren durch eine Formel miteinander in Beziehung setzen, für die wir nur noch eine geeignete Bezeichnung des Proportionalitätsfaktors wählen müssen. Maxwell bezeichnet ihn durch $K/4\pi$. Hertz setzt für K den Buchstaben ε. Um diesen beiden auf unserem Gebiete führenden Autoren gerecht zu werden, wollen wir den Proportionalitätsfaktor gleich $\varepsilon/4\pi$ wählen; hierbei ist ε die sog. „Dielektricitätskonstante“. Wir können demnach schreiben:

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{E} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 99)$$

Die Formel entspricht der Gleichung 98) $\mathfrak{p} = \eta \mathfrak{P}$ für den elastischen, gebremsten Cykel § 313.

Die Bezeichnung Dielektricitätskonstante kürzt man meist ab und schreibt nur D.K., wie auch wir im folgenden immer thun wollen.

Die beiden Konstanten ε und μ charakterisieren ein elektromagnetisches Feldmedium vollkommen (sofern es isotrop ist).

315. Maxwells Verschiebungsstrom. — In § 239 hatten wir die zeitliche Änderungsgeschwindigkeit der magnetischen Polarisation als „magnetischen Strom" bezeichnet. Auch bei der Änderung dielektrischer Polarisationen, der Verschiebung, des Displacement, pflegt man nach MAXWELL von einem Strome, dem „Verschiebungsstrome" zu sprechen. Das Phänomen selbst steht dem im II. Abschnitte behandelten Strome in der That insofern nahe, als auch hier, wie bei diesem Magnetkraftlinien ausgebildet werden; denn wie die bisherigen Betrachtungen zeigen, kann eine Änderung in den Feldspannungen nicht eintreten, ohne dass gleichzeitig die Zwischenelemente cyklische Bewegungen ausführen (die Rollen der Modelle in Bewegung geraten). Bei ungeschlossenen Strömen setzt also der Verschiebungsstrom das Stromphänomen durch das Dielektrikum hindurch fort, bis der Ruhezustand, der statische Zustand, eingetreten ist.

Nach der hier vertretenen, im wesentlichen schon von MAXWELL begründeten Anschauungsweise besteht demnach kein prinzipieller Unterschied zwischen gewöhnlichem (Leitungs-) und Verschiebungsstrom.

316. Intensität des Verschiebungsstromes. — Nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Definition ist für einen Verschiebungsstrom die Intensität

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{d\mathfrak{E}}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 100)$$

da die D.K. (§ 314 am Ende) im allgemeinen wenigstens als von der Zeit unabhängig zu betrachten ist. Nach § 314 steht $\mathfrak{D}$ der Verschiebung $\mathfrak{p}$ parallel, nur bezieht sich hier die Grösse nach § 313 auf eine Fläche von der Grösse von 1 cm². Da $\mathfrak{q} = d\mathfrak{p}/dt$ der Stromstärke i entspricht § 267, so ist die übliche Bezeichnung der durch Gleichung 100) definierten Grösse $d\mathfrak{D}/dt$ als Intensität des Verschiebungsstromes in völliger Übereinstimmung mit unseren Begriffsbestimmungen. Nur müssen wir im Auge behalten, dass sich (nach § 312 am Ende) ebenso wie $\mathfrak{D}$ selbst, auch die Intensität des Verschiebungsstromes $d\mathfrak{D}/dt$ auf die Querschnittseinheit bezieht; man spricht in diesem Sinne von einer „Stromdichte" als der Intensität pro Einheit des Querschnitts des Stromträgers, hier des Dielektrikums.

Da nach der älteren Auffassung $\mathfrak{D}$ die Quantität des pro Flächeneinheit verschobenen elektrischen Fluidums bezeichnet § 312, so bezeichnet $d\mathfrak{D}/dt$ in der That die Stärke des Strömens durch die Flächeneinheit. Danach steht $\mathfrak{D}$ vollkommen der Quantitätsgrösse e (§ 234 vorletzte Bemerkung) parallel, nur dass sie sich auf einen Querschnitt von 1 cm², jene sich auf einen beliebigen Querschnitt bezieht.

317. Der Kapazitätsbegriff. — Die auf der Flächeneinheit eines in Polarisation versetzten Dielektrikums vorhandene Spannung war mit $\mathfrak{D}$ bezeichnet worden (§ 312 am Ende), eine Grösse für die die Relation $\mathfrak{D} = \varepsilon/4\pi \cdot \mathfrak{E}$ gilt. Betrachten wir nicht die Flächeneinheit des Plattenkondensators § 307, sondern seine Flächen in ihrer Gesamtausdehnung von F cm², die sich im Abstande von a cm parallel gegenüberstehen, so ist an ihnen eine Spannung $Q = \mathfrak{D} F$ vorhanden. Dieses Produkt entspricht nach der Schlussbemerkung des vorigen Paragraphen einer Quantitäts- oder Kapazitätsgrösse (§ 233) der elektrischen Energie. Die Intensitätsgrösse derselben ist nach Früherem die E.M.K. $\mathfrak{E}$.

Nach der älteren Auffassung wäre $Q = \int i\,dt$ die Quantität positiven elektrischen Fluidums, welche auf der gesamten + Platte angehäuft ist, eine gleiche Quantität − Elektricität wäre auf der anderen Platte vorhanden zu denken.

$\mathfrak{E}$ ist die Spannung längs eines Centimeters einer elektrischen Spannungslinie. Beschränken wir unsere Betrachtungen auf den homogenen Teil des Feldes zwischen den Platten, so ist $E = \mathfrak{E} a$ der gesamte Spannungsabfall auf dem Wege von einer Platte zur anderen. Dann ist also E der Intensitätsfaktor der im Kondensator vereinigten elektrischen Energie.

Multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung 99) mit F, so erhalten wir

$$\mathfrak{D} F = \frac{\varepsilon F}{4\pi a} \cdot \mathfrak{E} a$$

und setzen wir zur Abkürzung

$$K = \varepsilon \frac{F}{4\pi a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 101)$$

ein, so erhalten wir

$$Q = KE \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 102)$$

Die Grösse K giebt offenbar ein Maass dafür, wieviel Einheiten der Quantitätsgrösse elektrischer Energie Q der Plattenkondensator bei gegebener Spannung E aufzunehmen vermag; man nennt daher K passend die „Kapazität" des Kondensators.

Aus 102) folgt weiter:

$$E = Q/K \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 103)$$

und

$$K = Q/E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 104)$$

Die Gleichung 101) lässt erkennen, dass Kapazitätsvergleichungen an Kondensatoren ein Mittel zur Bestimmung der D.K. liefern. Hat derselbe Kondensator, wenn Luft sein Dielektrikum ist, die Kapazität K_0, wenn sein Zwischenmedium ein anderes ist, die Kapazität K_1, so ist die D.K. des letzteren (bezogen auf Luft)

$\varepsilon = K_1/K_0$. Diese Kapazitätsvergleichungen kann man mit dem Telephon in ähnlicher Weise wie die Induktanzvergleichungen bei der Induktionswage § 270 vornehmen, wenn man die beiden zu vergleichenden Kondensatoren in eine Wheatstonesche Brückenanordnung einschaltet.

Die D.K. der Luft, die nicht wesentlich von der des Vakuums abweicht, setzt man (willkürlich) gleich 1. Dann haben die D.K. der folgenden Substanzen die beigeschriebenen Werte:

Paraffin	2	Petroleum	2,1
Ebonit	2,8	Benzol	2,2
Schellack	3,4	Terpentinöl	2,3
Schwefel	4	Olivenöl	3,1
Glimmer	7	Äthylalkohol	26
Glas	5—10	Methylalkohol	33
		Wasser	80.

318. Energieinhalt eines dielektrisch polarisierten Mediums. — In dem von uns betrachteten cyklischen Bewegungssysteme mit den elastischen Koppelungen können wir die Energiemenge, welche bei irgend einem (durch den Wert von $\mathfrak{p}$ bezeichneten) Spannungszustand aufgehäuft ist, berechnen, wenn wir wie in § 118 schliessen:

Zur Steigerung der Gesamtverschiebung um $d\mathfrak{p}$ ist die Teilarbeit

$$dA = \mathfrak{P} \cdot d\mathfrak{p} = \vartheta\, \mathfrak{p} \cdot d\mathfrak{p} = \frac{1}{\eta}\, \mathfrak{p} \cdot d\mathfrak{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 105)$$

nötig, also ist, da bei $\mathfrak{p} = 0$ keine Verschiebungsenergie vorhanden ist, die Energie

$$A = \frac{1}{2}\, \vartheta\, \mathfrak{p}^2 = \frac{1}{2}\, \frac{\mathfrak{p}^2}{\eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 105\,a)$$

in Form elastischer Spannung bei der Verschiebung $\mathfrak{p}$ vorhanden. Der hier benutzten Relation $\mathfrak{P} = \vartheta\, \mathfrak{p}$ oder (da $\vartheta = 1/\eta$) $\mathfrak{p} = \eta\, \mathfrak{P}$ entsprechen im elektrischen Gebiete die durch die Erfahrung bestätigten Relationen $\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\, \mathfrak{E}$ für die Flächeneinheit, und $Q = KE$ für eine beliebige Flächengrösse F eines Plattenkondensators. Die elektrische Energie ist durch zwei Faktoren, Intensitätsfaktor E und Quantitätsfaktor Q (§ 317) bestimmt (§ 232). Versuchen wir bei einer gegebenen konstanten Spannungsdifferenz E die Kapacitätsgrösse Q um die Quantität dQ zu vermehren, so ist dazu die Arbeit $E \cdot dQ$ aufzuwenden, d. h. es ist mit Rücksicht auf 103) § 317

$$dA = \frac{1}{K}\, Q\, dQ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 106)$$

Dem $\mathfrak{p}$ des obigen mechanischen Beispiels entspricht in dem Falle eines durch die Flächen F begrenzten Dielektrikums die Grösse Q; die zur Steigerung um dQ nötige Arbeit ist proportional Q und dQ, also

dem Produkte beider Grössen, aber umgekehrt proportional der durch K (bezw. η) gemessenen Aufnahmefähigkeit des Mediums für den betreffenden Zwangszustand; der Gleichung 105) entspricht also die Gleichung 106) und der Gleichung 105 a) die aus 106) folgende Gleichung

$$A = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{K} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 106\,a)$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf 103) und 102)

$$A = \frac{1}{2} Q E \quad \ldots\ldots\ldots \quad 107)$$

und

$$A = \frac{1}{2} K E^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 108)$$

Die in einem dielektrischen Felde angesammelte Energiemenge ist gleich dem halben Produkte aus der Spannungsdifferenz an den Grenzen des Feldes und der Grösse Q, oder diese Energiemenge ist auch proportional dem Quadrate der an den Grenzen von aussen her wirkenden elektrischen Kraft E.

Diese Formeln gestatten uns die pro Kubikcentimeter in einem elektrischen Felde lokalisiert zu denkende Spannungsenergie zu berechnen; wir brauchen dazu nur in unseren Formeln von den Grössen F und a auf die Flächen- bezw. Längeneinheiten zurückzugehen.

Denken wir uns aus einem (homogenen) elektrischen Spannungsfelde einen Würfel von 1 cbcm derart herausgeschnitten, dass die Seiten den elektrischen Kraftlinien parallel laufen, die beiden einander gegenüberstehenden Endflächen von 1 cm² Grösse aber senkrecht zur Richtung der elektrischen Kraft stehen, so können wir diesen Würfel als einen Kondensator betrachten, dessen Flächengrösse $F = 1$ cm² beträgt und dessen Platten um $a = 1$ cm voneinander abstehen. In diesem Falle wird E identisch mit $\mathfrak{E}$, der Spannungsdifferenz pro Längeneinheit. Ist also ε die D.K. des Mediums, so ist der Inhalt an elektrischer Spannungsenergie pro Kubikcentimeter mit Rücksicht auf 108) und 101)

$$A_e = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}^2 = \frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2 \quad \ldots\ldots \quad 109)$$

Auch wenn das Feld nicht homogen ist, können wir von einem Energieinhalte an jeder Stelle sprechen, und meinen damit die Arbeitsmenge, welche in Form elektrischer Energie in einem kleinen Volumenelement $d\tau$ an der betreffenden Stelle aufgehäuft ist; diese ist dann offenbar $A_e \cdot d\tau = \varepsilon/8\pi\,\mathfrak{E}^2 \cdot d\tau$, wenn $\mathfrak{E}$ der Wert des elektrischen Kraftvektors an der betrachteteten Stelle ist. Hiervon werden wir im nächsten Kapitel Gebrauch machen.

Unsere Formel 109) ist unabhängig von dem mechanischen Bilde, welches wir

zum Vergleiche herangezogen haben und ebenso allgemein gültig, wie die Proportionalität 99) selbst, die ihrer Ableitung zu Grunde gelegt wurde.

319. Dimension der Kapazität. — Da nach 106 a) $\frac{1}{2} Q^2/K$ einer Energiegrösse von der Dimension $\mathrm{cm^2\,gr\,sek^{-2}}$ gleich sein soll, Q aber als Summe von Produkten einer Stromstärke i ($\mathrm{cm^{1/2}\,gr^{1/2}\,sek^{-1}}$ § 166) und einer Zeit dt (sek) (vergl. § 317) die Dimension $\mathrm{cm^{1/2}\,gr^{1/2}}$ hat, so muss

$$\dim K = \frac{\mathrm{cm\,gr}}{\mathrm{cm^2\,gr\,sek^{-2}}} = \frac{\mathrm{cm}}{\left(\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sek}}\right)^2}$$

sein. Die Dimension der (elektromagnetisch gemessenen) Kapazitätsgrösse ist die einer Länge, dividiert durch ein Geschwindigkeitsquadrat.

Benutzen wir die Gleichung 104) $K = Q/E$ zur Definition von K, wie das meist üblich ist, so erhalten wir, da $\dim E = \mathrm{cm^{1/2}\,gr^{1/2}\,sek^{-2}}$ nach § 228 ist,

$$\dim K = \frac{\mathrm{cm^{1/2}\,gr^{1/2}}}{\mathrm{cm^{1/2}\,gr^{1/2}\,sek^{-2}}} = \frac{1}{\mathrm{cm\,sek^{-2}}} = \frac{\mathrm{cm}}{\left(\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sek}}\right)^2}$$

wie vorhin.

320. Praktische Einheit der Kapazität: Farad und Mikrofarad. — Die absolute E.M.Einheit der Kapazität ist sehr gross, so dass ein Kondensator von der hier angenommenen Beschaffenheit, der z. B. eine Einheit Kapazität hätte, eine ganz enorme Grösse besitzen müsste. In der Praxis spielen nur viel kleinere Ansammlungsapparate elektrischer Spannungsenergie eine Rolle. Man hat daher für die Kapazität eines milliardsten Teiles der absoluten eine praktische Einheit gewählt und sie nach dem Begründer der neueren Anschauungen ein Farad genannt.

$$1 \text{ Farad} = 10^{-9} \text{ E.M.Kapazitätseinheit } [\mathrm{cm} : (\mathrm{cm\,sek^{-1}})^2].$$

Auch diese Einheit ist für die gewöhnlichen Zwecke (besonders in der Elektrotechnik) zu gross; man hat ihren millionsten Teil ein Mikrofarad genannt, so dass

$$1 \text{ Mikrofarad} = 10^{-6} \text{ Farad} = 10^{-15} \text{ E.M.Einheiten}$$

ist.

321. Dimension der Dielektricitätskonstante. — Mit Rücksicht auf 101) folgt aus $\dim K$

$$\dim \varepsilon = 1 : \left(\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sek}}\right)^2,$$

die Dimension der D.K. ist im E.M.Maasssystem die eines reciproken Geschwindigkeitsquadrates.

Um zu zeigen, dass alle im Vorhergehenden getroffenen Festsetzungen auch untereinander in Übereinstimmung stehen, wollen wir den Ausdruck für die Intensität des Verschiebungsstromes noch auf Grund einer anderen als der in § 316 angestellten Betrachtung ableiten, sowie die Dimension dieser Grösse bestimmen.

Ist ein Medium in dielektrischer Polarisation begriffen, so ist in jedem Kubikcentimeter nach 109) die Energiemenge

$$A_e = \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathfrak{E}^2$$

angesammelt.

Ändert sich diese, so entsteht ein Verschiebungsstrom, dessen Arbeit gleich der Verminderung des in der Volumeneinheit enthaltenen Arbeitsvorrates

$$dA_e = \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{E} \cdot \frac{d\mathfrak{E}}{dt} dt$$

sein muss. Da die Stromarbeit immer gleich dem Produkte von Spannung $\mathfrak{E}$, Zeit dt und Intensität ist, so muss $\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{d\mathfrak{E}}{dt}$ als Intensität des Verschiebungsstromes angesehen werden. Diese Intensität ist auf die Flächeneinheit bezogen, da wir vom Kubikcentimeter ausgingen; es ist also

$$I_{\text{versch}} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{d\mathfrak{E}}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 110)$$

wie in § 316 bereits angegeben.

Bei einem Querschnitt ω ist

$$i_{\text{versch}} = \omega I_{\text{versch}} = \omega \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{d\mathfrak{E}}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 111)$$

Da $\dim \omega = \text{cm}^2$, $\dim \varepsilon = \text{cm}^{-2}\text{sek}^2$, $\dim \mathfrak{E} = \text{cm}^{1/2}\,\text{gr}^{1/2}\,\text{sek}^{-2}$, $\dim 1/dt = \text{sek}^{-1}$ ist, so ist die Dimension des rechtsseitigen Ausdruckes in der That diejenige einer gewöhnlichen Stromstärke: $\text{cm}^{1/2}\,\text{gr}^{1/2}\,\text{sek}^{-1}$, so dass in unserem (dem Maxwellschen) Begriffssystem auch in der Dimensionierung kein Unterschied zwischen der Stromstärke eines Verschiebungs- und eines gewöhnlichen Leitungsstromes existiert (vergl. § 316); beide Stromarten können also superponiert und ihre Intensitäten addiert werden, wovon wir später Gebrauch machen wollen.

C) Theorie der elektrischen Schwingungen.

322. Allgemeine Stromgleichung für einen Träger mit Induktanz, Resistanz und Kapazität. — Wir wollen annehmen, ein Kondensator von der Kapazität K sei durch irgend eine Stromquelle, etwa eine magnetelektrische Maschine bis zur Spannungsdifferenz E, von einer zur anderen Platte gerechnet, geladen und dann von der Quelle abgenommen worden. Dann ist in ihm eine gewisse Arbeitsmenge aufgehäuft, magnetische Kräfte existieren nicht mehr im Felde, alle Energie hat die Form elektrischer Spannungsenergie. Nun mögen die beiden

Platten durch einen metallischen Schliessungskreis von der Induktanz L und der Resistanz w verbunden werden. An den Enden dieses Kreises wirkt jetzt die Spannungsdifferenz E, aber im umgekehrten Sinne wie vorhin, die elektrischen Kraftröhren drängen sich aus dem Inneren des Kondensators heraus, konachsiale magnetische Kraftlinien bilden sich um den Kreis aus, und damit tritt die ganze Gruppe von Erscheinungen, welche das Stromphänomen begleiten, auf. Wir haben einen Stromträger mit den charakteristischen Konstanten L und w, an dessen Enden die E.M.K. $-E$ wirkt, wo nach 103) $-E = -Q/K$ und nach § 317 $dQ/dt = i$ ist. Auf diesen Träger können wir die allgemeine Stromgleichung § 288 anwenden, wenn wir in derselben E durch $-Q/K$ ersetzen:

$$-\frac{Q}{K} = wi + L\frac{di}{dt}.$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach der Zeit t und setzen wir für dQ/dt seinen Wert i ein, so erhalten wir

$$-i = wK\frac{di}{dt} + LK\frac{d^2i}{dt^2}$$

oder

$$LK\frac{d^2i}{dt^2} + wK\frac{di}{dt} + i = 0 \quad \ldots\ldots \quad 112)$$

Dies ist die allgemeinste Stromgleichung, die wir aufstellen können.

323. Thomson-Kirchhoffsches Problem. — Die Gleichung 112) beschreibt den Verlauf einer Kondensatorentladung. Um aus ihr die Stromstärke i als Funktion der Zeit zu gewinnen, müssen wir 112) integrieren. Dies geschah zuerst durch W. Thomson (Lord Kelvin), kurz darauf und unabhängig davon von Kirchhoff. Die allgemeine Form eines Integrals, welches der Differentialgleichung II. Ordnung 112) genügt, ist

$$i = i_0 e^{ht}.$$

Denn setzen wir die Werte $di/dt = i_0 h e^{ht}$ und $d^2i/dt^2 = i_0 h^2 e^{ht}$ in die Gleichung 112) ein, so wird sie für alle Werte von t befriedigt, wenn die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} LKh^2 + wKh + 1 &= 0 \\ \text{oder} \qquad h^2 + \frac{w}{L}h + \frac{1}{LK} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 113)$$

erfüllt ist. Dies ist eine quadratische Gleichung, aus der wir den

Wert der noch unbekannten Konstante h berechnen können. Es ergeben sich die beiden Wurzelwerte:

$$\left.\begin{matrix} h_1 \\ h_2 \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}\frac{w}{L} \pm \sqrt{\frac{w^2}{4L^2} - \frac{1}{LK}} \qquad \left.\begin{matrix} h_1 \\ h_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-w \pm \sqrt{w^2 - 4L/K}}{2L} \qquad \ldots \ldots \quad 114)$$

Für die weitere Verfolgung des Problems sind nun offenbar zwei Fälle zu unterscheiden. Es können nämlich erstens beide Wurzeln h_1 und h_2 reell sein, was nur dann der Fall ist, wenn $w^2 > 4L/K$ oder

$$w > 2\sqrt{\frac{L}{K}} \qquad \ldots \ldots \ldots \quad 115)$$

ist. Dann ist das Integral

$$i = i_0 \left(e^{h_1 t} + e^{h_2 t}\right) \qquad \ldots \ldots \ldots \quad 116)$$

wo i_0 den Anfangswert der Stromstärke (zur Zeit $t = 0$) bezeichnet.

Sowohl h_2 als auch h_1 ist eine negative Grösse (da $\sqrt{w^2 - 4L/K}$ kleiner als w ist, das $-w$ also nur zum Teil durch die positiv genommene Wurzelgrösse kompensiert wird). Wenn also t von 0 (Moment der Schliessung) an wächst, so nehmen beide Glieder in 116) nach einer Exponentiellen immerzu ab, die Stromstärke i schwindet von ihrem anfänglichen Maximalwerte i_0 an bis zu 0 allmählich hin.

Dies tritt nach 115) ein, wenn der Widerstand im Schliessungskreise ein grosser im Verhältnis zu dem Quotienten L/K ist. Wenn wir bei dem Versuche 111 c, § 306, alle Rollen mehr oder weniger stark bremsen, so erhalten wir doch trotz grosser Trägheitsmomente der einzelnen Scheiben (Induktanz vergl. § 267) kein Überschwingen der Gleichgewichtslagen, sondern ein einfaches langsames Verschwinden aller Verschiebungen.

324. Elektrische Schwingungen. — Wenn bei dem vorigen Problem

$$w < 2\sqrt{\frac{L}{K}} \qquad \ldots \ldots \ldots \quad 117)$$

ist, so führt die Operation des Wurzelziehens in dem Ausdrucke 114) zu einer imaginären Grösse und die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung haben die Form

$$\left.\begin{matrix} h_1 \\ h_2 \end{matrix}\right\} = -\alpha \pm i\beta \qquad \ldots \ldots \ldots \quad 118)$$

wo

$$\alpha = \frac{w}{2L}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4LK - w^2K^2}}{2LK} \qquad \ldots \ldots \quad 119)$$

ist.

Das allgemeine Integral ist jetzt bis auf einen konstanten, noch näher zu bestimmenden Faktor

$$e^{-at+i\beta t} + e^{-at-i\beta t}$$

oder

$$e^{-at}(e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}) = e^{-at}(\cos\beta t + i\sin\beta t + \cos\beta t - i\sin\beta t),$$

d. h. die Stromstärke variiert nach dem Gesetze

$$i = i_0 e^{-at}\cos\beta t \quad \ldots\ldots\ldots \quad 120)$$

da für $t = 0$ i den Wert i_0 haben soll.

Die Stromstärke nimmt zwar auch hier mit der Zeit fortwährend ab, aber nicht gleichförmig, sondern dem Faktor $\cos\beta t$ entsprechend, periodisch. Die Entladung erfolgt nicht einseitig in der Richtung der anfänglich wirkenden dielektrischen Spannungen, sondern oscillatorisch. Erst nach einer Reihe von Schwingungen, von denen jede folgende eine immer geringere Amplitude $i_0 e^{-at}$ erreicht als die vorhergehende, hat sich der Ausgleich der Spannungen vollständig vollzogen, und ist $i = 0$ geworden.

Wir erhalten also zufolge 117) immer Schwingungen, wenn der Widerstand des Schliessungskreises klein ist, jedenfalls wenn $w < 2\sqrt{L/K}$ ist.

In § 306, Versuch 111 c) studierten wir das Zustandekommen einer oscillatorischen Entladung elastischer Energie, die vollkommen der hier betrachteten analog verläuft.

325. Schwingungsdauer und Dämpfung elektrischer Oscillationen. — Die oscillatorische Entladung kehrt immer zu ähnlichen Zuständen zurück, so oft das Argument βt des cos sich um die Grösse 2π vermehrt hat. Die dazu nötige Zeit nennt man die „Schwingungsdauer T des Schliessungskreises".

Aus $\beta T = 2\pi$ folgt mit Rücksicht auf 119)

$$T = 2\pi\frac{2LK}{\sqrt{4LK - w^2K^2}} = 2\pi\sqrt{LK}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2K}{4L}}} \quad \ldots \quad 121)$$

oder

$$T = 2\pi\sqrt{LK}\,\text{sekans}\,\varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad 121\,a)$$

wenn wir

$$\sin\varrho = \frac{w}{2}\sqrt{\frac{K}{L}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 121\,b)$$

setzen.

Ist die Resistanz w des Kreises klein, so können wir das Glied $\frac{w^2K}{4L}$ vernachlässigen, d. h. sekans ϱ gleich 1 setzen und erhalten:

$$T = 2\pi\sqrt{LK} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 122)$$

Nach § 263 ist dim L = cm und nach § 319 dim $K = \text{cm} : \left(\frac{\text{cm}}{\text{sek}}\right)^2$ in unserem E.M.System. Also hat $\sqrt{L\,K}$ in der That die Dimension einer reinen Zeit. Das Produkt der Induktanz und Kapazität ist für einen Kreis mit eingeschalteter Kapazität also eine zweite Zeitkonstante, vergl. § 290.

Ist $i_0\, e^{-\alpha t}$ die Amplitude einer Schwingung in einer bestimmten Phase der periodischen Erscheinung, so ist $i_0\, e^{-\alpha (t+T)}$ die Amplitude der nächst folgenden Schwingung in derselben Phase. Diese ist kleiner als die erste. Man nennt das Amplitudenverhältnis

$$i_0\, e^{-\alpha t} / i_0\, e^{-\alpha (t+T)} = e^{\alpha T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 123)$$

das „Dämpfungsverhältnis“ der Schwingungen, und den natürlichen Logarithmus δ dieser Grösse, hier also das Produkt $\alpha\, T$ selbst das „logarithmische Dekrement“; es ist also mit Rücksicht auf 119) und 122)

$$\delta = \frac{w}{2L}\, 2\pi \sqrt{L\,K} = \pi w \sqrt{\frac{K}{L}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 124)$$

Die Schwingungen von Schliessungskreisen mit kleiner Kapazität aber grosser Induktanz werden langsamer gedämpft als die, bei denen die Verhältnisse umgekehrt liegen. Die Induktanz verleiht den Strombahnen eben die Eigenschaften einer gewissen elektrischen Trägheit, vergl. § 267. Ausserdem muss der Widerstand klein sein, vergl. das Modell Versuch 111 c).

Elektrische Schwingungen wurden zuerst von Feddersen beobachtet; er benutzte verhältnismässig grosse Ansammlungsapparate und erhielt Schwingungen von einhunderttausendstel bis einmillionstel Sekunde Schwingungsdauer. Hertz erhielt hundertmal raschere Schwingungen, wenn er Kugeln von 30 cm Durchmesser an einfache gestreckte Drahtstücke steckte, so dass die Induktanz der Strombahn sehr klein wurde. Bei kurzen dicken Stäben mit kugelförmigen Verdickungen an den gegenüberstehenden Enden war die Schwingungsdauer bis auf den milliardsten Teil einer Sekunde herabgedrückt; mit dünneren, kugellosen Stäben, die in der Mitte durchschnitten sind, erhält man leicht Schwingungen mit einem T von der Ordnung 10^{-10} Sekunden, so lange als der Entladungsfunke die Unterbrechung überbrückt. Noch schnellere Schwingungen erhielt Righi durch Entladungen zwischen Kugeln von nur wenigen Centimetern Durchmesser.

19. Kapitel.

Die allgemeinen Feldgleichungen.

In diesem Kapitel wollen wir das wichtige System von Gleichungen ableiten, welches die Vorgänge in einem elektromagnetischen Kraftfelde aufs Vollkommenste beschreibt und das den eigentlichen Kern der „MAXWELLschen Theorie“ ausmacht. Dasselbe diente HERTZ bei seinen bahnbrechenden Untersuchungen als Führer und hat allen bisherigen Erfahrungen auf diesem Gebiete gegenüber Stich gehalten. Wir geben die Gleichungen in der Form, in die sie HERTZ gebracht hat, und wie sie jetzt von den neueren Forschern fast ausschliesslich verwendet wird. Wir wollen die Gleichungen im Gegensatz zu HERTZ, der sie ohne Beweis an die Spitze seiner Systematik stellte, auf Grund unserer bisherigen Entwickelungen ableiten.

Um diese Gleichungen und ihre Ableitung als ein selbständiges Ganzes hervortreten zu lassen, holen wir etwas weiter aus, stellen die Grundbegriffe nochmals zusammen und erläutern die Vorgänge im Felde an einem Modelle, dessen Einzelheiten dem Leser der früheren Kapitel bereits bekannt sind.

Man kann die ganze Theorie auf zwei Haupt- und Grundthatsachen vollkommen aufbauen. Die eine bezieht sich auf den in § 169 abgeleiteten Satz, dass die Summe der magnetischen Kraft längs einer einen Stromträger umschliessenden beliebigen Kurve gleich $4\pi i$ ist, wo die Stromstärke i sich sowohl auf Leitungs- wie auf Verschiebungsströme (§§ 315 und 316, vergl. auch § 321) beziehen kann. Die andere ist die in § 239 formulierte Beziehung zwischen der zeitlichen Änderung der magnetischen Kraft und der dabei auftretenden, längs einer das betrachtete Gebiet umschliessenden Kurve wirkenden, elektrischen Kraft. Dieses sich wechselseitige Bedingen (elektrischer Strom bedingt magnetische Kraft ringsum, magnetischer Strom bedingt elektrische Kraft) der beiden Felderscheinungen bildet den Eckpfeiler der MAXWELLschen Theorie.

Die allgemeinen Feldgleichungen setzen die magnetischen und elektrischen Kräfte, deren gegenseitiges qualitatives Verhalten wir im vorigen Kapitel erläuterten, in bestimmte quantitative Beziehungen zu einander. Wir haben diese eigentlich schon kennen gelernt, wenn auch nicht in der Form, in welcher sie in der MAXWELLschen Theorie auf-

treten. Sie in diese Form zu bringen, ist daher unsere nächste Aufgabe.

Dabei wollen wir zur Erläuterung gelegentlich Hertzs eigene, durch Anführungsstriche gekennzeichnete Worte heranziehen, um dem Leser das Eindringen in die Originalarbeiten möglichst zu erleichtern.

A) Die Maxwell-Hertzschen Fundamentalgleichungen des magnet-elektrischen Kraftfeldes in Form von Vektorgleichungen.

326. Die Feldvektoren. — Wir haben zur Charakterisierung sowohl des magnetischen wie des elektrischen Zustandes eines Feldes je eine Grösse von bestimmter Richtung, Grösse und bestimmtem Sinne, einen Vektor eingeführt. Der magnetische Zustand des Feldes an irgend einer Stelle war durch die Feldstärke, die Kraft (in Dynen), welche auf den + Einheitspol wirkt, kurz die „magnetische Kraft $\mathfrak{H}$" eindeutig bestimmt § 68. Der elektrische Zustand wurde durch die E.M.K. pro Längeneinheit, durch die „elektrische Kraft $\mathfrak{E}$", wie wir kurz sagen wollen, nach Richtung, Grösse und Sinn durch die Betrachtungen der §§ 238, 240 und 241 festgelegt.

Nach § 70 ist dim $\mathfrak{H} = \mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-1}$, nach § 238 ist dim $\mathfrak{E} = \mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sek}^{-2}$.

Die Verteilung der beiden Vektoren in dem „elektromagnetischen Felde" wird durch die magnetischen bezw. elektrischen Kraftlinien veranschaulicht. Da das „magnetisch- oder elektrisch-Sein" allein auf dem Bestehen der genannten vektoriellen Zustandsänderungen innerhalb des Feldmediums beruht, so haben diese Kraftlinien für uns nicht nur eine geometrische, sondern auch eine physikalische Bedeutung. Sie beschreiben den Verlauf der Veränderungen, welche mit dem Medium in seinen kleinsten Teilen vor sich gegangen sind. In jedem Feldpunkte können im allgemeinen sowohl magnetische wie elektrische Zustandsänderungen, Polarisationen bestehen. Jeder Punkt ist also durch ein bestimmtes $\mathfrak{H}$ und ein bestimmtes $\mathfrak{E}$ ausgezeichnet.

Elektromagnetisches Feldmodell.

Wir wollen uns die Beziehungen zwischen den beiden Vektorgrössen in einem elektromagnetischen Felde durch ein Modell veranschaulichen, von dem wir einzelne Teile schon früher benutzt haben, vergl. § 241. An einem kräftigen Brette, welches durch Stützen in vertikaler Stellung erhalten wird, sind in fünf Vertikalkolonnen und vier Horizontalreihen 20 von den in § 302 beschriebenen Rollen, Fig. 129, in gleichen Abständen voneinander, alle mit je einer Kurbel wie Rolle 1, Fig. 128 versehen, befestigt. Die Muttern sind für gewöhnlich soweit zurückgeschraubt, dass sich sämtliche Rollen leicht drehen können, dagegen kann man sie auch so fest anziehen, dass sich dieselben nur mit mehr oder weniger grosser Bremsung bewegen. Sie sind durch übergespannte Gummifäden unter-

einander gekoppelt, so dass von den Randrollen je zwei oder drei, von den mittleren Rollen je vier Fadenpaare ausgehen; in der Ruhelage befinden sich alle Kurbeln in identischen Stellungen. Die Drehung der Rollen entspricht der magnetischen Kraft mit ihrem achsialen Charakter; drehen sich alle mit gleicher Geschwindigkeit, z. B. rechts herum, so stellt das Modell ein homogenes Magnetfeld dar, dessen Kraftlinien von vorn nach rückwärts, also von uns weg verlaufen, § 121.

Die Gummifäden sind zunächst alle gleich stark gespannt; bewegen sich zwei benachbarte Rollen aber verschieden rasch, so tritt in dem sie koppelnden Faden eine Differenzierung beider Seiten ein; auf der einen wird die Fadenspannung erhöht, auf der anderen vermindert. In § 303 wurde gezeigt, dass hierdurch die dielektrische Polarisation versinnbildlicht wird; die Richtung von der entspannten zu der gespannten Fadenseite giebt die Richtung der elektrischen Kraft an. Werden Rollen durch Anziehen der Muttern derartig gebremst, dass sie sich nur noch mit starker Reibung bewegen können, so entspricht dies einem Übergange von Feldenergie in Wärme, d. h. von „Leitung" an den betreffenden Stellen.

Wir fügen dem Modelle noch zwei Holzleisten mit je fünf Löchern, die in dieselben in dem gleichen Abstande wie die Rollen voneinander gebohrt sind, hinzu, durch die die Kurbeln der obersten und untersten Reihe gleichzeitig gefasst und gedreht werden können. Ferner dient ein rechteckiger Holzrahmen mit 14 äquidistanten Durchbohrungen zur Verbindung sämtlicher am Rande stehender Rollen.

327. Die charakteristischen Konstanten des Feldmediums. — In welcher Weise das Medium durch die Kräfte $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ verändert, polarisiert wird, geben die beiden für die Substanz desselben charakteristischen Grössen μ und ε, Permeabilität und Dielektricitätskonstante an (§§ 109 und 313), die gleichzeitig den Inhalt an den entsprechenden Energieformen bei gegebenem $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ messen, vergl. den folgenden Paragraphen. Sie sind nur ihrem relativen Werte nach bestimmt; setzt man sie für das Vakuum gleich 1, so haben sie die in §§ 109 und 317 genannten Werte. Wir nehmen für die folgenden Betrachtungen μ als wirkliche Konstante an.

„Die Konstanten ε und μ sind notwendig positive reine Zahlen und zwar Verhältniszahlen, durch welche wir die Energie eines Stoffes vergleichen mit der Energie eines anderen Stoffes. Aus der Natur eines Stoffes allein geht ein bestimmter Wert derselben nicht hervor. Dies meinen wir, wenn wir sagen, Dielektricitäts- und Magnetisierungskonstante seien keine inneren Konstanten eines Stoffes. Es ist nicht unrichtig, wenn wir sagen, diese Konstanten seien gleich Eins für das Vakuum, aber es enthält diese Behauptung keine Thatsache der Erfahrung, sondern eine willkürliche Festsetzung unsererseits." In Wirklichkeit weichen die dabei erhaltenen Zahlen so wenig von denen ab, die sich für die meisten Fälle ergeben, wenn wir Luft als Bezugsmedium wählen, dass wir auch sagen können, wir setzen diese Zahlen für Luft gleich 1.

Nach § 109 ist dim $\mu = 0$, nach § 321 dim $\varepsilon = \mathrm{cm}^{-2}\,\mathrm{sek}^2$.

Auch diese beiden, das Feldmedium näher beschreibenden Grössen finden in unserem Feldmodelle § 326 ihren Ausdruck: Je grösser das Trägheitsmoment der Scheiben s ist, um so mehr (kinetische) Energie ist bei bestimmter Drehgeschwindigkeit vorhanden, um so grösser ist die (magnetische) Energie des durch unser

Modell abgebildeten Feldes bei derselben Feldstärke, um so grösser ist die magnetische Permeabilität des Mediums, die der Trägheit der Rollen entspricht, vergl. auch § 267. Der Elasticitätskoeffizient der Koppelungen giebt ein Maass für die Menge aufgehäufter (elastischer) Spannungsenergie bei gegebener Verschiebung. Dieser Koeffizient entspricht nach § 314 der D.K. des Mediums; die vorhandene elastische (elektrische) Spannungsenergie ist ausserdem dem Quadrate der elastischen (elektrischen) Kraft proportional, § 318.

328. Energieinhalt des elektromagnetischen Feldes. — Da in jedem Volumenelement eines elektromagnetischen Feldes im allgemeinen sowohl magnetische wie elektrische Zustandsänderungen vorausgesetzt werden müssen, so setzt sich auch der Energieinhalt desselben aus zwei Teilen zusammen. Insofern als magnetische Polarisationen der kleinsten Teilchen eingetreten sind, befindet sich pro Kubikcentimeter ein Arbeitsvorrat im Feldmedium aufgespeichert, den wir mit A_m bezeichnen wollen. Nach Formel 17) in § 119 ist

$$A_m = \frac{\mu}{8\pi} \mathfrak{H}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 17)$$

Der Vorrat an elektrischer Energie ist in demselben Raume nach § 318

$$A_e = \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathfrak{E}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 109)$$

Sowohl A_m wie A_e haben die Dimension $cm^2\ gr\ sek^{-2}/cm^3$, was auch mit den Dimensionen der rechtsseitigen Ausdrücke: $(cm^{-1/2}\ gr^{1/2}\ sek^{-1})^2$ und $cm^{-2}\ sek^2\ (cm^{1/2}\ gr^{1/2}\ sek^{-2})^2$ übereinstimmt.

Der gesamte Arbeitsvorrat in der Volumeneinheit A_1 ist daher

$$A_1 = \frac{\mu}{8\pi} \mathfrak{H}^2 + \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathfrak{E}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 125)$$

und die in einem Volumenelemente $d\tau$ enthaltene Energie ist $A_1 \cdot d\tau$.

„Die Erzeugung des geänderten Zustandes erfordert den Aufwand von Energie; diese Energie wird beim Verschwinden der Störung wieder ersetzt; das Vorhandensein der Störung stellt also einen Vorrat von Energie dar."

Um in unserem Modell die Rollen in einen gewissen Bewegungszustand zu versetzen, ist die Aufwendung von Arbeit erforderlich; sie ist in Form kinetischer Energie in dem System vorhanden und kann aus diesem wiederum entnommen werden. Bremst man an dem Modelle eine Reihe von Rollen, etwa die obersten, zum völligen Stillstand, so kann in dem System auch lediglich Spannungsenergie aufgehäuft werden, wenn die Elemente der untersten Reihe durch die Holzleiste § 326 (Ende) miteinander verbunden und in einer bestimmten Entfernung von ihrer ursprünglichen Ruhelage erhalten werden.

329. Begriff des Linienintegrals eines Vektors. — Wir sind schon an zwei Stellen unserer Darstellung auf Grössen geführt worden, welche sich auf eine beliebige Kurve bezogen und die für ein Feld charakteristisch waren. Zuerst sahen wir in § 169, dass, wenn wir Komponenten der Grösse $\mathfrak{H}$, welche mit ihren Richtungen mit den

aufeinander folgenden Längenelementen einer einen Stromträger einmal umschlingenden beliebigen Linie zusammenfallen, addierten, wir eine für das ganze Stromfeld charakteristische Grösse $4\pi i$ erhielten. Eine ganz ähnliche Aufsummierung nahmen wir mit entsprechend gebildeten Komponenten des elektrischen Kraftvektors $\mathfrak{E}$ vor und sahen in § 239, dass diese Summe für die zeitlichen Änderungen des magnetischen Zustandes des Feldes bezeichnend ist; denn diese Summe war gleich $-\frac{d}{dt}(\omega\mathfrak{B})$, dem magnetischen Strome.

Die beiden genannten Summen sind sog. Linienintegrale. Solche Linienintegrale lassen sich für jede Vektorgrösse, welche in einem Felde kontinuierlich verteilt ist, bilden, und da diese beiden Integrale für das Folgende die wichtigste Bedeutung haben, wollen wir zur völligen Klarstellung dieses Begriffes die Bildung eines solchen Linienintegrals für einen beliebigen Vektor $\mathfrak{B}$ ganz allgemein erläutern. Wir wählen wie bisher zur Bezeichnung von Vektoren deutsche Buchstaben im Anschlusse an Maxwell, der dadurch vielleicht andeuten wollte, dass der „Vektorenkalkül" eine deutsche Erfindung (Grassmann) ist, für die Linienintegrale aber besondere Symbole. Für jeden Punkt des dreidimensionalen Raumes habe $\mathfrak{B}$ einen bestimmten Wert, d. h. wir nehmen an, dass wir von jedem Raumpunkte aus eine Strecke ziehen können, welche nach Richtung, Sinn (von dem Punkte an gerechnet) und Grösse durch $\mathfrak{B}$ dargestellt ist. Gehen wir von Punkt zu Punkt in der Richtung dieses Vektors $\mathfrak{B}$ weiter, so gelangen wir zum Begriff der Vektorlinien. In demselben Sinne, wie wir in § 82 vom Kraftflusse, in § 108 vom Induktionsflusse sprachen, können wir allgemein von einem Vektorenflusse reden. Wir legen durch den Raum eine beliebige, aber sich nicht selbst schneidende, geschlossene Kurve, Fig. 134. Dieselbe umgrenze die Fläche ω, von der wir ebenfalls voraussetzen, dass sie einen einfachen Verlauf habe, d. h. sich nirgends selbst überdecke.

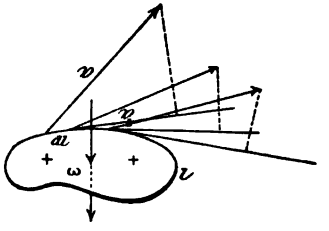


Fig. 134.

Ist die Fläche ω so klein, dass unser Vektor für alle ihre Punkte denselben Wert $\mathfrak{B}$ hat, so bezeichnen wir das Produkt $\mathfrak{B}\omega$ als Vektorenfluss; ist ω nicht klein, so wählt man den Durchschnittswert von $\mathfrak{B}$ auf dieser Fläche. Wir bezeichnen eine Seite derselben als negativ, die andere als positiv und zwar derartig, dass die Richtung − nach + mit der Richtung des Vektorenflusses zusammenfällt. Nun müssen wir zur Bildung des Linienintegrals noch einen bestimmten Umkreisungssinn der Kurve festsetzen; wir wählen ihn so, dass wir, in der Richtung des Vektorflusses die Fläche anblickend, dieselbe uhrzeigermässig umkreisen. Wenn wir dann für die einzelnen Längenelemente dl den daselbst herrschenden und für alle Punkte innerhalb dl als gleich anzunehmenden Wert von $\mathfrak{B}$ bilden, so können wir an jeder Stelle die Projektion von $\mathfrak{B}$ auf die mit dl zusammenfallende Tangentenrichtung an die Kurve bilden; wir wollen sie $\mathfrak{B}_l$ nennen. Wir multiplizieren nun die Projektion $\mathfrak{B}_l$ des Vektors $\mathfrak{B}$ mit der Länge dl (Vektorprodukt) und denken uns diese Operation für alle einzelnen aufeinander folgenden Längenelemente der Kurve ausgeführt. Addiert man dann die sämtlichen Produkte $\mathfrak{B}_l \cdot dl$, so erhält man das „Linienintegral des Vektors $\mathfrak{B}$ längs der Kontur der Fläche ω". Der Vergleich mit §§ 169 und 239 zeigt, dass dies in der That

das Verfahren war, durch das wir zu den dort betrachteten Summen A bezw. E kamen.

Wir wollen das Linienintegral eines Vektors $\mathfrak{B}$ längs der Kontur einer Fläche ω (im positiven Sinne hin erstreckt) durch das Symbol

$$\underset{\omega}{L}\mathfrak{B} = \int_{+\omega} \mathfrak{B}_l \cdot dl \quad \ldots \ldots \quad 126)$$

bezeichnen.

Dann sagt das Resultat des § 169 verallgemeinert aus, dass

$$\underset{\omega}{L}\mathfrak{H} = 4\pi i \quad \ldots \ldots \quad 127)$$

ist; dabei kann ω als Querschnitt des Stromträgers selbst angesehen werden, da die in § 169 angestellte Arbeitsbetrachtung noch völlige Gültigkeit bis in unmittelbare Nähe an den Stromträger heran besitzt, vergl. Fig. 48. Ferner ergiebt sich aus § 239:

$$-\underset{\omega}{L}\mathfrak{E} = \frac{d}{dt}(\omega\mathfrak{B}) = \frac{d}{dt}(\omega\mu\mathfrak{H}) \quad \ldots \ldots \quad 128)$$

Die dim $\underset{\omega}{L}\mathfrak{H}$ ist als Summe von Produkten $\mathfrak{H}_l \cdot dl$ cm$^{-1/2}$ gr$^{1/2}$ sek^{-1} · cm = cm$^{1/2}$ gr$^{1/2}$ sek^{-1} in der That wie die von i oder $4\pi i$. Die dim $-\underset{\omega}{L}\mathfrak{E}$ muss cm$^{1/2}$ gr$^{1/2}$ sek^{-2} · cm sein. Da dim $\mathfrak{B}$ = cm$^{-1/2}$ gr$^{1/2}$ sek^{-1} nach § 107 ist, so ist dim der rechten Seite: sek^{-1} cm^2 cm$^{-1/2}$ gr$^{1/2}$ sek^{-1} = cm$^{3/2}$ gr$^{1/2}$ sek^{-2} wie links.

330. Verknüpfung der Feldvektoren untereinander. — Die Gleichung 128) setzt das Linienintegral der elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$ mit der zeitlichen Änderungsgeschwindigkeit der umschlossenen magnetischen Kraftlinienzahl in Beziehung. Die eine Grösse wird durch die andere bedingt. Im 13. und 14. Kapitel haben wir diese Wechselbeziehung nach den verschiedensten Richtungen hin verfolgt.

Erläuterung am Feldmodelle.

Wir setzen den in § 326 erwähnten Rahmen auf die Kurbeln der äusseren Rollen, die wir drehen, indem wir den Rahmen bewegen. Geschieht dies in gleichförmiger Weise, so sind in den Fäden keine Spannungsunterschiede vorhanden, sofern wir den Cykel als reibungslos betrachten dürfen; alle Rollen rotieren mit der gleichen Geschwindigkeit. Wir haben im Inneren des Rahmens eine Fläche ω abgegrenzt, durch welche eine gewisse Anzahl ($\mathfrak{H}$) Kraftlinien hindurch geht. Wollen wir diese Zahl steigern, so müssen wir mehr achsiale Elemente mit Drehbewegung auf die Fläche ω bringen. Direkt können wir dies nicht, weil unser Modell feste Achsen hat. Wohl aber können wir durch eine von aussen wirkende Ursache auf ω die Drehgeschwindigkeit und damit die Feldstärke $\mathfrak{H}$ selbst steigern (§ 125), indem wir mittels des Rahmens die äussere Rollenreihe stärker andrehen. Dadurch werden die auf der Innenlinie des Rahmens, d. h. auf der Kontur von ω liegenden Fäden gespannt bezw. entspannt und hierdurch tritt eine zeitliche Änderung $d\mathfrak{H}/dt$ in der Drehungsgeschwindigkeit auf ω ein. Diese

Änderung $d\mathfrak{H}/dt$ der sich drehenden magnetischen Elemente ist also untrennbar mit dem Auftreten von Spannungen (elektrischen Kräften) rings um ω herum verbunden wie es Gleichung 128) angiebt. Auch das Vorzeichen, d. h. der Richtungssinn dieser Spannungen (elektrischen Kraft) stimmt mit den früher getroffenen Festsetzungen überein. Wird z. B. eine Rechtsdrehung auf ω in dieser Weise gesteigert, so entspricht dies einer Vermehrung der Kraftlinienzahl durch eine von aussen her auf das System wirkende Ursache; die induzierte E.M.K. hat der Maxwellschen Regel § 213 gemäss eine inverse Umkreisungsrichtung, sie ist nach § 237 negativ in Rechnung zu ziehen. Prüft man die Fadenspannungen, so erkennt man, dass in diesem Falle, z. B. in der oberen Reihe, alle stärker gespannten Fadenteile links, alle schwächer gespannten rechts liegen, so dass die E.M.K. hier von rechts nach links hin wirkt; dieselbe Betrachtung auf die anderen Seiten angewandt, giebt eine dem Uhrzeiger entgegengesetzte Richtung der gesamten auf der ganzen Umfangslinie von ω geweckten E.M.K., des Linienintegrals von $\mathfrak{E}$. Hält man durch eine Gegenbewegung des Rahmens die inneren Rollen zurück ($-d/dt$), so entsteht eine elektrische Spannung rings um ω herum im entgegengesetzten, positiven Sinne (direkter Strom bei Verminderung von $\omega\mu\mathfrak{H}$).

Wir hatten für solche zeitliche Änderungen einer Vektorgrösse schon in § 239 die Bezeichnung „Strom", „Strömung" („flux" der englisch-amerikanischen Schule = Fluss) eingeführt (magnetischer Strom).

Noch geläufiger ist uns diese Bezeichnung bei dem Vorgange, welchen die Gleichung 127) darstellt.

Diese drückt einen elektrischen Vorgang an einer Stelle des Feldes, den sog. Strom durch ein um diese Stelle herum gezogenes Linienintegral der magnetischen Kraft aus. Der elektrische Vorgang besteht im allgemeinen aus zwei Teilen: Nach den Ausführungen des 17. Kapitels findet ein fortwährendes Niederbrechen elektrischer Spannung und damit eine Transformation von Feldenergie in Wärme statt, wenn das Medium sog. „Leitfähigkeit" besitzt; insofern es gleichzeitig dielektrisch polarisierbar ist, können zeitliche Änderungen des Polarisationszustandes eintreten, „Verschiebungsströme" § 315. Beide Vorgänge sind an das Auftreten und Bestehen magnetischer Kräfte in der Umgebung gebunden.

Erläuterung am Feldmodelle.

Wir setzen je eine Holzleiste § 326 auf die oberste und unterste Rollenreihe auf und bremsen die Rollen der beiden mittelsten Reihen. Drehen wir die beiden äussersten im umgekehrten Sinne, so bilden sich Spannungen aus, welche zusammen mit den Drehungen ganz Vorgängen entsprechen, wie sie durch das Längsschnittdiagramm durch ein Stromfeld, Fig. 132, Taf. III, dargestellt sind; denn, denken wir uns das Modell um eine durch seine Mitte gehende horizontale, seiner Grundfläche parallele Achse gedreht, so stellt es die Vorgänge um einen linearen, geraden Stromträger herum dar. Die Querschnittsfläche ω des Trägers liegt senkrecht zu dieser Achse; auf ihr befinden sich Elemente, welche den beiden innersten Rollenreihen entsprechen; diese bilden also Teile des Stromträgers. Bei der Bremsung derselben treten Spannungen in dem Systeme auf. Um diese gebremsten Elemente gehen Linien (die magnetischen Kraftlinien) herum, auf denen in Drehung

begriffene Elemente aufgereiht zu denken sind, wie sie die Rollen der obersten und untersten Reihe darstellen. Wenn auch im Inneren fortwährend Spannung verloren geht und Wärme dafür auftritt, so bleiben doch noch Spannungen bestehen, so lange die äusseren Rollen gedreht werden. Das Hinschwinden und fortwährende Erneuern dieser Spannungen, mit einem Worte das Stromphänomen in der Querschnittsfläche ω erfordert also geradezu das Vorhandensein von Drehungen rings um ω herum (Linienintegral der magnetischen Kraft). Sind einzelne oder alle Rollen vollkommen gebremst, so können zeitliche Änderungen der Spannungen wiederum nur eintreten, wenn sich die äusseren Rollen drehen. Die zeitliche Änderung irgend welcher „Verschiebungen", „Polarisationen" auf ω setzt also auch Drehungen, d. h. magnetische Kräfte voraus.

Findet beides statt, Transformation in Wärme und zeitliche Anderung von Verschiebung, so muss die Drehung ringsum $(\mathcal{L}\mathfrak{H})$ für beides aufkommen.
ω

Fassen wir das hier und vorhin Gesagte zusammen, so lehrt uns das Modell: „Die Störungen (Polarisationen) der elektrischen und der magnetischen Art sind so miteinander verknüpft, dass Störungen (Polarisationen) der einen Art unabhängig von denen der anderen dauernd zu bestehen vermögen, dass dagegen Störungen keiner der beiden Arten zeitliche Schwankungen erleiden können, ohne dadurch zugleich Störungen der anderen Art hervorzurufen."

Sollen unsere Betrachtungen genügend allgemein sein, so müssen wir voraussetzen, dass in jedem Volumenelement des Feldmediums zeitliche Änderungen des elektrischen Feldvektors sowohl infolge fortwährender Transformation in Wärme wie durch direkte zeitliche Änderung der dielektrischen Polarisation (Displacement, Verschiebung) eintreten könne. Das i der Gleichung 127) besteht demnach im allgemeinen immer aus zwei Teilen. Wir bezeichnen sie als den „Leitungsstrom" i_{leit} und den „Verschiebungsstrom" i_{versch}. Es ist

$$i = i_{\text{leit}} + i_{\text{versch}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 129)$$

331. Intensität des Leitungsstromes pro Flächeneinheit; Stromdichte. — Die am Ende des vorigen Paragraphen eingeführte Trennung der Grösse i für die Vorgänge im Felde bedarf noch einer Erläuterung. Auch im freien Felde kann dauernd elektrische Spannungsenergie hinschwinden und in Wärme verwandelt werden, wodurch zur Aufrechterhaltung eines stationären Zustandes fortwährend neue elektromagnetische Energie aus der Umgebung zufliessen muss. Die alte Theorie sagte: Mitten im Felde fliesst ein Strom, die betreffenden Stellen sind „leitend". Wir müssen jetzt aber den Begriff der Stromstärke erweitern, da wir hier annehmen, dass ausgedehnte Teile des Feldes an dem Prozesse beteiligt sein können und ein besonderer Stromträger nicht mehr erkennbar ist. Die Bezeichnung „Stromstärke" bezog sich auf den Querschnitt des Stromträgers. Wir denken uns nun eine Röhre vom Querschnitt ω aus dem Felde ausgeschnitten. Das Stromphänomen hat auch jetzt noch einen durch die Richtung der einwandernden Energie, d. h. durch $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ bestimmten Richtungssinn. In jeden

Kubikcentimeter, dessen Kanten wir der elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$ parallel legen, so dass die magnetischen Kraftlinien in Ebenen, die parallel zu den Endflächen liegen, verlaufen, wandert die Energie von der Seite her ein. Wir nennen Stromdichte die auf die Flächeneinheit bezogene Stromstärke und bezeichnen sie durch J_{leit}. In unserem Beispiele würden wir also von einer Stromdichte bezüglich der Endflächen des betrachteten Kubikcentimeters unseres Feldmediums zu sprechen haben. Für einen Leiter vom Querschnitte ω, wie er bei Aufstellung der Formel 127) vorausgesetzt wurde, ist also

$$i_{\text{leit}} = \omega J_{\text{leit}} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 130)$$

Auch für die Stromstärke J_{leit} pro Flächeneinheit muss das Verwandlungsgesetz von Ohm gelten. Beschränken wir unsere Betrachtung auf den Leitungsstrom innerhalb eines Kubikcentimeters, d. h. auf die Trägerlänge von 1 cm, so ist

$$J_{\text{leit}} = \lambda \mathfrak{E} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 131)$$

wo λ die spezifische Leitfähigkeit des Feldmediums an der betreffenden Stelle ist, § 286.

Demnach ist

$$i_{\text{leit}} = \omega \lambda \mathfrak{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 132)$$

Da $\dim \omega = \text{cm}^2$, $\dim \lambda = \text{cm}^{-2}\,\text{sek}$, § 286 (am Ende), $\dim \mathfrak{E} = \text{cm}^{1/2}\,\text{gr}^{1/2}\,\text{sek}^{-2}$ ist, so ist die Dimension des rechts stehenden Produktes in der That die einer Stromstärke $\text{cm}^{1/2}\,\text{gr}^{1/2}\,\text{sek}^{-1}$.

332. Gesamtstrom als Summe von Leitungs- und Verschiebungsstrom. — Für die Intensität des Verschiebungsstromes hatten wir bereits in § 321 den Wert

$$i_{\text{versch}} = \omega \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{d\mathfrak{E}}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 111)$$

abgeleitet. Ist es sowohl Leitung wie zeitliche Änderung der dielektrischen Polarisation, welche an einer Stelle ein Bestehen von Magnetkraftlinien (Drehung, spin) im Felde bedingt, so addieren sich beide Wirkungen. In die Gleichung 127) ist für i die Summe $i_{\text{leit}} + i_{\text{versch}}$, also

$$i = \omega \lambda \mathfrak{E} + \omega \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{d\mathfrak{E}}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 133)$$

einzuführen, wie schon am Ende des § 330 ausgeführt wurde. Wir nennen i den „Gesamtstrom".

Das hier benutzte Prinzip ist „Maxwells Superpositionsprinzip". Nach unseren Auseinandersetzungen ergiebt es sich als notwendige Folge aus der gegenseitigen Verknüpfung der Feldvektoren. Nicht immer ist aber seine Richtigkeit anerkannt worden, denn, wollte man es aus den Prinzipien der Fernewirkungs-

theorien, aus der Wechselwirkung von Molekülen und Äther herleiten, so traten Schwierigkeiten auf, auf die wir nicht stossen.

333. Die allgemeine Stromgleichung des elektromagnetischen Feldes. — Die Gesamtheit aller Erfahrungen über die Zustände in einem elektromagnetischen Felde und die Beziehungen, in welche die dasselbe bestimmenden Begriffe zu einander treten, lässt sich in zwei wichtige Fundamentalformeln zusammendrängen. Die eine ist die schon in § 169 abgeleitete, in § 329 umgeformte Gleichung 127), wenn wir in ihr für i den Wert der Formel 133) einsetzen, den wir im allgemeinsten Falle für den Gesamtstrom in einem Felde erhalten. Dadurch wird diese Gleichung

$$4\pi\omega\left(\lambda\mathfrak{E}+\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{d\mathfrak{E}}{dt}\right)=\underset{\omega}{L}\mathfrak{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{A)}$$

die erste Fundamentalgleichung des elektromagnetischen Feldes.

Wir wollen sie die „erste MAXWELL-HERTZsche Hauptgleichung" nennen. Sie drückt den elektrischen Kraftvektor und seine zeitlichen Änderungen durch ein Linienintegral der magnetischen Kraft aus. Mit Rücksicht auf die Bedeutung des linksseitigen Klammerausdruckes können wir sie auch als die „allgemeine Stromgleichung des elektromagnetischen Feldes" bezeichnen.

Ist die Leitfähigkeit des Mediums $\lambda = 0$ (Isolator), so kommt nur das zweite Glied, der Verschiebungsstrom, auf der linken Seite in Betracht. Für $\varepsilon = 0$ umfasst die Gleichung alle Beziehungen von Leitungsströmen zu den von ihnen getragenen Magnetfeldern, d. h. die Fälle, welche uns im II. Abschnitt und im 17. Kapitel beschäftigten.

334. Die allgemeine Induktionsgleichung des elektromagnetischen Feldes. — In § 239 zeigten wir, dass alle Einzelfälle der Magnetoinduktion durch die Gleichung 128) umfasst werden. Dieselbe drückt daher auch die allgemeinste Beziehung zwischen zeitlichen Änderungen der magnetischen Kräfte und der damit in Verbindung stehenden Verteilung der elektrischen Kraft im freien elektromagnetischen Felde aus, wenn wir das Linienintegral längs einer irgendwie im Felde gelegenen geschlossenen Kurve bilden und ω auf die von dieser Kurve umschlossene Fläche beziehen. Denken wir uns diese, sowie die Permeabilität des Feldes als unveränderlich und nur die Kraftlinien herein- oder hinauspulsieren, so können wir die Ableitung nach der Zeit auf $\mathfrak{H}$ allein beschränken. Die dadurch gewonnene Gleichung

$$\omega\mu\frac{d\mathfrak{H}}{dt}=-\underset{\omega}{L}\mathfrak{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{B)}$$

stellt uns die zweite Fundamentalgleichung des elektromagnetischen Feldes dar. Wir wollen sie die „zweite MAXWELL-HERTZsche Hauptgleichung“ nennen. Sie drückt zeitliche Änderungen des magnetischen Kraftvektors oder der magnetischen Polarisation durch ein (negativ genommenes) Linienintegral der elektrischen Kraft aus. Mit Rücksicht darauf, dass die Gleichung einen Induktionsvorgang beschreibt, können wir sie auch als die „allgemeine Induktionsgleichung des elektromagnetischen Feldes“ bezeichnen. Wie ein Vergleich der linken Seite von B) mit der rechten von Gleichung 41) zeigt, war letztere viel allgemeiner als B) namentlich insofern, als sie auch die elektrischen Kräfte mit umfasste, welche bei zeitlichen Änderungen der Permeabilität des Mediums auftreten. Betrachten wir dieses selbst aber als unveränderlich und durch seine beiden Konstanten ε und μ ein für allemal gegeben, so genügt die Aussage der Gleichung B).

335. Die Maxwellsche Theorie. — Die beiden Hauptgleichungen A) und B) bilden den wesentlichsten Inhalt der MAXWELLschen Theorie und damit der gesamten neueren Anschauungen. Wenn bei MAXWELL selbst diese Theorie nicht in dieser einfachen und abgeklärten Form erscheint, so liegt dies daran, dass er sich von den Fernewirkungstheorien und ihren Hilfsvorstellungen selbst noch nicht völlig frei gemacht hatte. Vor allem spielt bei ihm noch ein dritter Vektor $\mathfrak{A}$ eine Hauptrolle, das sog. „Vektorpotential“ oder „elektrokinetische Moment“, vergl. § 235. Dasselbe ist uns nirgends anschaulich gegeben, es ist eine mathematische Hilfsgrösse, die aus den Gleichungen wieder entfernt zu haben das grosse theoretische Verdienst von HERTZ ist.

Zur Kennzeichnung der Sachlage lassen wir HERTZ selbst reden: „Als eine rudimentäre Erscheinung mathematischer Natur nenne ich das Vorherrschen des Vektorpotentials in den Grundgleichungen (bei MAXWELL). Bei dem Aufbau der neuen Theorien dienten die Potentiale als Gerüst, indem durch ihre Einführung die unstetig an einzelnen Punkten auftretenden Fernkräfte ersetzt wurden durch Grössen, welche in jedem Punkte des Raumes nur durch die Zustände der benachbarten Punkte bedingt sind. Nachdem wir aber gelernt haben, die Kräfte selber als Grössen der letzteren Art anzusehen, hat ihr Ersatz durch Potentiale nur dann einen Zweck, wenn damit ein mathematischer Vorteil erreicht wird. Und ein solcher scheint mir mit der Einführung des Vektorpotentials in die Grundgleichungen nicht verbunden, in welchen man ohnehin erwarten darf, Beziehungen zwischen Grössen der physikalischen Beobachtung, nicht zwischen Rechnungsgrössen zu finden.“

Wir haben die Einführung nicht nur dieses Potentiales, sondern aller Potentiale überhaupt bei unserer Ableitung vermieden.

Die eigentliche MAXWELLsche Theorie, soweit sie sich auf die Herleitung derjenigen Gleichungen bezieht, welche die Zustände im elektromagnetischen Felde vollständig beschreiben, ist im wesentlichen enthalten in den Kapiteln VI bis IX des II. Bandes des Treatise. Sie ist auf Betrachtungen der reinen

Mechanik aufgebaut (Kap. V) und bringt zunächst die Induktionsgesetze und zwar diese als cyklische Bewegungen behandelt (Kap. VI und VII); der weitere Ausbau erfolgt in Kap. VIII, namentlich die Einführung des Begriffes des elektrokinetischen Momentes (Vektor $\mathfrak{A}$, mit den Komponenten F, G, H). In Kap. IX endlich werden sämtliche Formeln zusammengestellt, wobei zu den eben abgeleiteten noch einige früher gegebene hinzugezogen werden, welche wie die der Strömung oder dielektrischen Verschiebung aus den auch hier abgeleiteten Gesetzen oder einfachen Annahmen leicht erhalten werden.

Eine Abweichung der hier gegebenen Ableitung sowohl von der Maxwellschen selbst wie den meisten anderen wollen wir zum Schlusse nicht unerwähnt lassen. Wir haben grundsätzlich das Wort „Äther" vermieden. Dasselbe erinnert an eines der hypothetischen Fluida, deren Einführung wir gerade ausschliessen wollen. Wir können es auch sehr gut, da in allen Fällen, wo es zu setzen gewesen wäre und z. B. auch noch von Hertz gebraucht worden ist, doch nur die negative Begriffsbestimmung gemeint ist: „ein Raum, der nach Möglichkeit frei von den uns umgebenden Substanzen gemacht ist". Wir haben daher statt der mehr hypothetisierenden Bezeichnung „Äther" die den thatsächlichen Sinn der gemeinten Abstraktion mehr treffende „Vakuum" eingeführt, wobei wir uns wohl bewusst sind, dass es ein „absolutes" Vakuum nicht giebt, vergl. § 34 am Ende. Wir haben diese Fundamental-Gleichungen lediglich aus der Erfahrung abgeleitet (unser Modell war uns nur ein anschauliches „Bild"), ohne dabei irgend welche Beziehungen zu dem sog. „Äther" vorauszusetzen. Hertz bemerkt in diesem Sinne:

„Nachdem diese Gleichungen einmal gefunden sind, erscheint es nicht mehr zweckmässig, dieselben aus Vermutungen über die elektrische und magnetische Konstitution des Äthers und das Wesen der wirkenden Kräfte, als wären dies bekanntere Dinge herzuleiten, wie es allerdings dem historischen Gange entsprechen würde. Viel eher ist es zweckmässig, an diese Gleichungen die weiteren Vermutungen über die Konstitution des Äthers anzuknüpfen."

B) Die Maxwell-Hertzschen Fundamentalgleichungen des Feldes in Koordinatendarstellung.

Die beiden Fundamentalgleichungen A) und B) p. 389 enthalten alles, was man über das elektromagnetische Feld ruhender, isotroper, leitender oder nichtleitender Medien aussagen kann.

Nicht immer treten sie aber in der hier gegebenen einfachen Form auf. Aus rechnerischen Gründen hat man es oft bequemer gefunden, jede von ihnen in drei Gleichungen aufzulösen, indem man die Vektorengrössen in drei zu einander rechtwinklige Komponenten zergliederte und alles auf ein cartesisches Koordinatensystem bezog. Um den Leser in den Stand zu setzen, auch diese Darstellungen mit der hier gegebenen zu vergleichen und weiter zu verfolgen und namentlich die theoretischen Arbeiten von Maxwell, Helmholtz und Hertz selbst, die sich dieser Koordinatendarstellung vorwiegend bedienen, lesen zu können, wollen wir auch diese Auflösung der Fundamentalgleichungen geben. Wir bemerken ausdrücklich, dass physikalisch dabei nichts

neues hinzutritt, sondern dass diese Umformung eine rein mathematische Operation ist.

Wir bringen diese Operation in allen ihren Einzelheiten zur Darstellung, um so zugleich dem Leser diejenigen Hilfskenntnisse an die Hand zu geben, deren er beim Studium der Originalwerke bedarf.

336. Einführung des Koordinatensystems. — Wir legen unseren Betrachtungen ein rechtwinkliges cartesisches Koordinatensystem der x, y, z zu Grunde. Blicken wir in einem solchen in der Richtung von der $-z$-Achse zur $+z$-Achse auf die Ebene der xy, so können wir, bei gewissen Systemen von der $+x$-Achse zur $+y$-Achse durch eine Rechts-, bei anderen Systemen durch eine Linksdrehung gelangen. Es giebt daher zwei Arten von rechtwinkligen Koordinatensystemen, welche sich nicht miteinander zur Deckung bringen lassen: rechtswendige und linkswendige.

Sie sind zu einander symmetrisch wie rechte und linke Hand. Legen wir zwei ihrer Achsen, etwa ihre $+x$- und $+z$-Achsen in einander, so zeigen die dritten, die $+y$-Achsen, nach entgegengesetzten Richtungen. Wir sehen im Pflanzenreiche beide Arten von Drehungen (x nach y) mit einer Fortschreitungsrichtung ($+z$-Richtung) kombiniert. Rechtswendig steigt z. B. die Weinranke an ihrem Stab in die Höhe, linkswendig die Hopfenranke. Maxwell unterschied daher weinwendige und hopfenwendige Koordinatensysteme.

Wir fanden in den von uns behandelten Erscheinungsgebieten die rechtswendige Koordinatenverbindung zweckmässiger; denn unsere Vektoren von achsialem Charakter waren, wenn wir ihnen entlang blickten, mit einer Uhrzeigerbewegung, d. i. Rechtsdrehung kombiniert zu denken § 121, wenn alle folgenden Beziehungen sich möglichst einfach und den Thatsachen adaequat gestalten sollten. Wir legen daher unseren Betrachtungen mit Maxwell ein rechts- oder weinwendiges Koordinatensystem zu Grunde, wie es Fig. 135 von der $-x$- nach der $+x$-Achse gesehen darstellt.

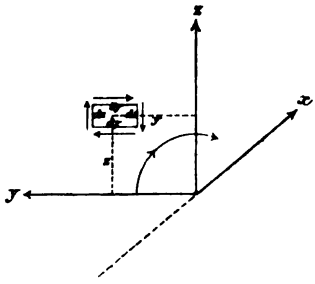


Fig. 135.

Die Zeichenebene ist dabei als mit der yz-Ebene zusammenfallend anzusehen; in dieser erscheint dann der Übergang von der $+y$- zur $+z$-Achse als positive (uhrzeigermässige, direkte § 212) Drehung. Wir können unser Koordinatensystem auch durch folgende Aussage charakterisieren: Wenn die Richtung der positiven x von uns fort, die der positiven z von uns aus nach oben geht, alsdann wachsen in unserem weinwendigen Koordinatensystem die y von rechts nach links hin.

Heetz verwendet im Gegensatze hierzu ein hopfenwendiges Koordinatensystem [bei ihm sind (Abhandlungen, Band II, p. 214) die hier gesperrten Worte vertauscht, die $+y$-Achse geht bei ihm von links nach rechts]. Darum erscheinen auch bei seinen Gleichungen die Zeichen vertauscht. Wir haben die

gebräuchlicheren rechtswendigen Koordinaten als natürlichere aus den oben genannten Gründen bevorzugt.

337. Einführung der Vektorkomponenten. — Jeden Vektor $\mathfrak{V}$ kann man auf die drei Koordinatenachsen projizieren. Wir wollen die entsprechenden Projektionen mit $\mathfrak{V}_x$, $\mathfrak{V}_y$ und $\mathfrak{V}_z$ bezeichnen. Für die Zustände in dem elektromagnetischen Felde sind im Speziellen zwei Vektoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ maassgebend. Wir nennen mit Hertz die Projektionen des magnetischen Kraftvektors $\mathfrak{H}$ auf die drei Koordinatenachsen L, M, N und diejenigen des elektrischen Kraftvektors $\mathfrak{E}$ bezw. X, Y, Z. Es ist $\mathfrak{V}^2=\mathfrak{V}_x^2+\mathfrak{V}_y^2+\mathfrak{V}_z^2$; analoges gilt für die Feldvektoren, so dass der Energievorrat in der Volumeneinheit im elektromagnetischen Felde

$$A_1 = \frac{s}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{\mu}{8\pi}(L^2 + M^2 + N^2) \quad . \quad . \quad 134)$$

ist.

Die Vektorkomponenten haben dieselben Dimensionen wie ihre Vektoren, weil sie aus letzteren durch Multiplikation mit den Richtungskosinus hervorgehen, die als Verhältniszahlen dimensionslos sind.

Zur späteren Verwendung stellen wir hier die einander entsprechenden Komponenten tabellarisch zusammen:

	x- Komponente	y- Komponente	z- Komponente
Allgemeiner Vektor $\mathfrak{V}$	$\mathfrak{V}_x$	$\mathfrak{V}_y$	$\mathfrak{V}_z$
Magnetische Kraft $\mathfrak{H}$	L	M	N
Elektrische Kraft $\mathfrak{E}$	X	Y	Z

338. Auflösung der Vektorengleichungen in Gleichungen für die Komponenten. — Die beiden Fundamentalgleichungen A) und B) sollen jetzt auf die einzelnen Komponenten der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ angewendet werden. Denkt man sich bei der Bildung der Linienintegrale rechts jedes Längenelement dl der Kontur von ω durch seine drei zu den Koordinatenachsen parallelen Projektionen ersetzt und jede mit der entsprechenden Vektorkomponente multipliziert, so kommen für die x-Komponente der linksseitigen Ausdrücke jedesmal nur die zu dieser senkrechten Komponenten in dem rechtsseitigen Linienintegral, also nur die Produkte der der y- und der z-Achse parallel gerichteten Projektionen von dl in die entsprechenden Vektorkomponenten in Betracht. Entsprechendes gilt für die anderen Komponenten.

Die magnetischen Kraftlinien liegen in Ebenen senkrecht zur Strom- (im genannten Falle der x-)Richtung § 145; andererseits ist bei einem der x-Richtung

parallelen magnetischen Strome die gesamte elektrische Induktion ringsum längs einer beliebigen Kurve ebenso gross wie die längs der Projektion derselben auf eine zur Stromrichtung senkrechte Ebene, da es nur auf die Zahl der im ganzen pulsierenden Kraftlinien ankommt § 239.

Wollen wir die x-Komponenten ausdrücken, so können wir also ω auf die yz-Ebene projizieren und uns damit begnügen, das zugehörige Linienintegral für diese Projektion zu bilden.

339. Komponenten der Linienintegrale von Vektoren. — Um ganz allgemein zu sein, wollen wir die im vorigen Paragraph angedeutete Zerlegung zuerst für einen beliebigen Vektor $\mathfrak{B}$ unter dem Linienintegral berechnen. Die Gestalt der in unseren Fundamentalgleichungen A) und B) auftretenden Fläche ω war beliebig. Wir wählen sie so klein, dass wir sie als eben ansehen können und zwar so, dass ihre Projektion auf die yz-Ebene, d. h. die Zeichnungsebene der Fig. 135, gleich dem kleinen Rechteck von der Breite dy und der Höhe dz ist, dessen Mittelpunkt gerade am Orte yz, der Projektion des ins Auge gefassten Feldpunktes auf diese Koordinatenebene liegt. Von unseren Vektorkomponenten kommt für diese Projektion nur $\mathfrak{B}_y$ und $\mathfrak{B}_z$ in Betracht. Multiplizieren wir die einzelnen in die Richtung der Rechteckseiten fallenden Komponenten mit den Längen derselben, so erhalten wir bei der Addition aller Beträge:

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial z}\right) dz\, dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad 135)$$

Denn unser Flächenelement erscheint uns von der − nach der + Seite gesehen, ist also nach § 329 uhrzeigermässig zu umlaufen. In die Richtung der obersten Seite fällt nur eine y-Komponente unseres Vektors. Am Orte x, y, z ist diese $\mathfrak{B}_y$. Die bezeichnete Seite liegt aber um die kleine Strecke $dz/2$ höher als unser Feldpunkt xyz. Nach den Regeln der partiellen Differentiation können wir also die y-Komponente an dieser Stelle schreiben: $\mathfrak{B}_y + \partial \mathfrak{B}_y / \partial z \cdot dz/2$. In ganz ähnlicher Weise kann man die in die anderen Seiten fallenden Komponenten schreiben:

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{B}_y + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} \cdot \frac{dx}{2} & \\ \mathfrak{B}_z + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} & & \mathfrak{B}_z - \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \\ & \mathfrak{B}_y - \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} & \end{array}$$

Multipliziert man jede Komponente mit der entsprechenden Seitenlänge, so ist, da man auf der linken und untersten Seite bei der angegebenen Umkreisungsrichtung mit den nach den positiven Koordinatenachsen gerichteten Vektorkomponenten, auf der obersten und rechten aber gegen dieselben voranschreitet, bei der Addition das erste und zweite Produkt negativ in Rechnung zu setzen. Man erhält von oben beginnend:

$$-\left(\mathfrak{B}_y + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2}\right) dy$$
$$-\left(\mathfrak{B}_z - \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2}\right) dx$$
$$+\left(\mathfrak{B}_y - \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2}\right) dy$$
$$+\left(\mathfrak{B}_z + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2}\right) dx$$

oder das Linienintegral um die yx- Projektion von ω herum ist:

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x}\right) dy\, dx,$$

wie oben angegeben.

Man findet also: Der Teil des Linienintegrals $L\mathfrak{B}$, welcher sich auf die senkrecht zur x-Achse stehende Flächenprojektion von ω bezieht, ist gleich der Differenz der Ableitungen der dritten (z-)Vektorkomponente nach der zweiten (y-)Koordinate minus der Ableitung der zweiten (y-)Vektorkomponente nach der dritten (z-)Koordinate multipliziert mit der betreffenden Projektion des Flächenelementes.

Die Dimension ist die des betreffenden Vektors, multipliziert mit einer Länge, also in der That die eines Linienintegrals, § 329. Heaviside nennt Differenzen von Ableitungen der eben gefundenen Art, den „Curl" des betreffenden Vektors, am besten wohl durch unser „Quirl" zu verdeutschen.

340. Cyklische Vertauschung. — Wir hatten die der x-Komponente der Strömung entsprechenden Anteile eines allgemeinen Linienintegrals längs ω berechnet. Man erkennt, dass die dieselben ausdrückenden Differenzen mit der der z-Koordinate entsprechenden Vektorkomponente $\mathfrak{B}_z$ beginnen, welche nach der y-Koordinate differenziert erscheint. Schreiben wir die drei Buchstaben x, y, z an drei äquidistante Punkte eines Kreises, Fig. 136, in einer der Uhrzeigerbewegung entsprechenden Ordnung und über und unter sie die zugehörigen Komponenten der hier in Betracht kommenden Vektoren (vergl. die kleine Tafel am Ende von § 337), so erkennt man, dass, um von x zu den in der Formel 135) in Betracht kommenden Grössen zu gelangen, der Cykel erst rückwärts, dann vorwärts zu durchlaufen ist. Bildet man die dem Ausdrucke 135) entsprechenden drei Differenzen für die y- und z-Komponente, so erhält man

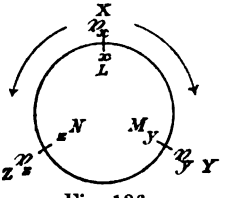


Fig. 136.

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x}\right) dx\, dz \quad \ldots\ldots\ldots \quad 136)$$

und

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y}\right) dy\, dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad 137)$$

Diese Ausdrücke werden durch die genannte Cykelregel unmittelbar erhalten, wenn man von der entsprechenden Koordinate ausgeht. Durch solche „cyklische Vertauschungen" erhält man nun für die auf die einzelnen Projektionen bezüglichen Linienintegrale unserer Feldvektoren analog

$$\left.\begin{aligned} \underset{\omega}{L}\mathfrak{H} \text{ für } x&: \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) dz\,dy \\ \text{für } y&: \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx\,dz \\ \text{für } z&: \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dy\,dx \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 138)$$

$$\left.\begin{aligned} \underset{\omega}{L}\mathfrak{E} \text{ für } x&: \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dz\,dy \\ \text{für } y&: \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) dx\,dz \\ \text{für } z&: \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dy\,dx \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 139)$$

341. Das erste Hertzsche Gleichungssystem. — Schreiben wir in der ersten Hauptgleichung A) statt der Vektoren selbst die einzelnen Komponenten derselben, so erhalten wir durch Gleichsetzen der entsprechenden Ausdrücke mit Rücksicht auf 138) und darauf, dass die drei Projektionen des Flächenelementes ω bezw. $dz\,dy$, $dx\,dz$, $dy\,dx$ sind:

$$4\pi\,dz\,dy\left(\lambda X + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{dX}{dt}\right) = \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) dz\,dy$$

$$4\pi\,dx\,dz\left(\lambda Y + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{dY}{dt}\right) = \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx\,dz$$

$$4\pi\,dy\,dx\left(\lambda Z + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{dZ}{dt}\right) = \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dy\,dx$$

Wie man sieht, heben sich die Flächenelemente, welche ja in der That willkürlich gewählt werden konnten, beiderseitig heraus und man erhält, wenn man noch die dem Leitungsstrome entsprechenden Glieder auf die rechte Seite zieht:

(6 b)
$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\frac{dX}{dt} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} - 4\pi\lambda X \\ \varepsilon\frac{dY}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} - 4\pi\lambda Y \\ \varepsilon\frac{dZ}{dt} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} - 4\pi\lambda Z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

Ist die Leitfähigkeit des Mediums verschwindend klein, so erhält man für isotrope Nichtleiter:

$$(4\,b)\qquad \left\{\begin{aligned} \varepsilon\frac{dX}{dt} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\\ \varepsilon\frac{dY}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\\ \varepsilon\frac{dZ}{dt} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ \text{I a)}$$

Für das Vakuum (oder den intrastellaren Raum), für welches $\varepsilon = 1$ gesetzt wurde, ist:

$$(3\,b)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\\ \frac{dY}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\\ \frac{dZ}{dt} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ \text{I b)}$$

wobei aber nicht zu vergessen ist, dass diese 1 die Dimension $\mathrm{cm}^{-2}\,\mathrm{sek}^2$ hat, § 321.

Wir wollen die Gesamtheit der Gleichungen I) I a) I b) das „erste Hertzsche Gleichungssystem" nennen.

Die Zahlen vor den Gleichungen geben die Nummern derselben in der Hertzschen Originalarbeit „Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper" an; seine Gleichungen stimmen bis auf einen Faktor A mit den unsrigen überein. Dieser kommt bei Hertz dadurch hinein, dass er die elektrischen Kräfte nach einem anderen (elektrostatischen, mechanischen oder Gaussschen) Maasse als wir, die wir durchweg elektromagnetisches Maass zu Grunde legten, misst. Die Grösse A ist die (reciproke) Verwandlungszahl beider Systeme ineinander. Bei Hertz sind dann die Konstanten μ und ε beide dimensionslos, während ja bei uns $\dim \varepsilon = \mathrm{cm}^{-2}\,\mathrm{sek}^2$ war. Bei ihm werden die das Medium charakterisierenden Eigenschaften zum Teil durch diese Zahl A mit bestimmt.

Ferner ist das Vorzeichen bei Hertz das Umgekehrte wie hier; dies erklärt sich, wie schon § 336 erwähnt wurde, dadurch, dass er im Gegensatz zu uns ein linkswendiges Koordinatensystem verwendet.

342. Das zweite Hertzsche Gleichungssystem. — Führt man in derselben Weise wie im vorigen Paragraphen die Zerlegung der zweiten Fundamentalgleichung B), § 334 aus, so erhält man mit Rücksicht auf 139), wenn man die einander gleichen Ausdrücke für die Projektionen des Flächenelementes ω weghebt:

$$\left\{\begin{aligned} \mu\frac{dL}{dt} &= -\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \quad (6\,a)\\ \mu\frac{dM}{dt} &= -\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) \quad (4\,a)\\ \mu\frac{dN}{dt} &= -\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ \text{II)}$$

Für Medien, deren magnetische Permeabilität man gleich 1 setzen darf, also insbesondere für Luft oder das Vakuum ist

$$(3\,a)\qquad \left.\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= -\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \\ \frac{dM}{dt} &= -\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) \\ \frac{dN}{dt} &= -\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{IIa)}$$

Wir nennen diese Gleichungen das „zweite HERTZsche Gleichungssystem".

Die beiden Systeme I) und II) waren es, zu denen HERTZ schon 1884 dadurch gelangte, dass er die alten Theorien soweit vervollkommnete, als es die Natur der Erscheinungen erforderte, indem er eine Reihe von Gliedern hinzufügte, welche bis dahin nicht berücksichtigt worden waren. Er zeigte zugleich schon damals, dass diese Systeme den Inbegriff der MAXWELLschen Theorie bildeten. Wir nannten sie daher nach diesen beiden Forschern, wiewohl auch HEAVISIDE und namentlich COHN das Verdienst zugesprochen werden muss, auf diese geläuterte Form der MAXWELLschen Theorie selbständig gelangt zu sein.

Bezüglich des fehlenden Faktors A sowie der Vorzeichendifferenz gilt das im vorigen Paragraphen Gesagte.

Die zeitlichen Änderungen der Vektorkomponenten links bezeichnet WIECHERT nicht unpassend als „Schwellung" der betreffenden Vektoren; rechts stehen ihre Quirle (§ 339), so dass man die Gesamtheit aller Gleichungen über das elektromagnetische Feld durch die einfache Aussage umfassen kann:

„Die Schwellung der elektrischen Kraft ist gleich dem Quirl der magnetischen, und die Schwellung der magnetischen Kraft gleich dem negativ genommenen Quirl (§ 339 am Ende) der elektrischen Kraft:

$$\left.\begin{aligned} \text{Schwellung } \mathfrak{E} &= \quad \text{Quirl } \mathfrak{H} \\ \text{Schwellung } \mathfrak{H} &= -\text{Quirl } \mathfrak{E} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots 140)$$

Dies ist der konzentrierteste Ausdruck der MAXWELLschen Theorie.

C) Elektrooptik.

Aus den Gleichungssystemen I) und II) lassen sich sämmtliche Gleichungen der Elektricitätslehre ohne Zuhilfenahme weiterer Erfahrungsthatsachen oder Hypothesen ableiten, wie HERTZ in seinen „Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper" gezeigt hat. Die Konsequenzen, welche aus diesen Systemen gezogen werden können, haben sich sämmtlich der Erfahrung gegenüber bewährt. Ihre Zahl ist so gross, dass es weit den Rahmen dieses Buches überschreiten würde, wollten wir auch nur einige von ihnen weiter verfolgen; wir könnten das gesamte im vorhergehenden dargestellte Material an Lehrsätzen und Formeln deduktiv aus diesen Gleichungen herleiten. Wir wollen uns aber damit begnügen, eine Reihe von Folgerungen zu ziehen, welche deshalb so wichtig sind, weil sie eine Beziehung zwischen zwei grossen physikalischen Agentien her-

stellen, auf deren innere Verknüpfung erst die MAXWELLsche Theorie hinwies, die Beziehungen zwischen Licht und den elektromagnetischen Erscheinungen. Die elektromagnetische Lichttheorie war eine der schönsten Früchte jener Studien über die Zustände in dem freien elektromagnetischen Felde, auf welche MAXWELL zuerst mit Nachdruck die Aufmerksamkeit lenkte.

343. Die allgemeinen Lichtgleichungen. — Die analytische Verbindung in Gleichungsform der Ortskoordinaten mit den von ihnen abhängigen Polarisationszuständen im Medium, welche irgend einen elektromagnetischen Vorgang in diesem beschreibt, nennen wir seine Gleichung. Wir wollen die Beziehungen zwischen den Polarisationen ableiten, welche zu periodischen Veränderungen nach Ort und Zeit im Felde führen und die mit denjenigen, die man den Lichterscheinungen zu Grunde zu legen sich gewöhnt hatte, vollkommene Identität besitzen. Dazu setzen wir ein isotropes nichtleitendes Feldmedium von den Konstanten μ und ε voraus. Für dieses gelten die Gleichungssysteme Ia) und II). Wir differenzieren die erste Gleichung von Ia) nach t und setzen in die dabei auf der rechten Seite auftretenden Zeitdifferentiationen der magnetischen Kraftkomponenten N und M die entsprechenden Werte aus II) ein:

$$\mu\varepsilon\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right)$$

Führen wir die Differentiationen aus, addieren und subtrahieren gleichzeitig zur Vervollständigung das Glied $\partial^2 X/\partial x^2$, so ergiebt sich nach dem Ordnen:

$$\mu\varepsilon\frac{d^2X}{dt^2} = \nabla^2 X - \frac{\partial J}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 141)$$

wenn wir zur Abkürzung setzen

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} = \nabla^2 X$$

und

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = J.$$

Der „Operator" ∇^2 stellt die „Raumvariation" des Vektors X dar. Verfahren wir in ähnlicher Weise der Reihe nach mit sämtlichen Gleichungen der Systeme Ia) und II), so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}\mu\varepsilon\frac{d^2X}{dt^2} &= \nabla^2 X - \frac{\partial J}{\partial x}\\ \mu\varepsilon\frac{d^2Y}{dt^2} &= \nabla^2 Y - \frac{\partial J}{\partial y}\\ \mu\varepsilon\frac{d^2Z}{dt^2} &= \nabla^2 Z - \frac{\partial J}{\partial z}\end{aligned}\right\} \quad 142) \qquad \left.\begin{aligned}\mu\varepsilon\frac{d^2L}{dt^2} &= \nabla^2 L - \frac{\partial K}{\partial x}\\ \mu\varepsilon\frac{d^2M}{dt^2} &= \nabla^2 M - \frac{\partial K}{\partial y}\\ \mu\varepsilon\frac{d^2N}{dt^2} &= \nabla^2 N - \frac{\partial K}{\partial z}\end{aligned}\right\} \quad 143)$$

wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = K$$

setzen.

Differenziert man die Gleichungen eines jeden dieser Systeme der Reihe nach nach x, y und z, so ergiebt sich nach dem Addieren bezw.

$$\mu\varepsilon\frac{d^2J}{dt^2} = \nabla^2 J - \nabla^2 J = 0, \quad \mu\varepsilon\frac{d^2K}{dt^2} = \nabla^2 K - \nabla^2 K = 0.$$

Die Grössen J und K sind also in Bezug auf die Zeit t nur linear, keinesfalls periodisch.

Denn hängt ein Vorgang so von der Zeit ab, dass diese Abhängigkeit durch eine Kreisfunktion cos oder sin eines die Zeit enthaltenden Argumentes dargestellt wird, ist er also periodisch, so führen beliebig oft wiederholte Differentiationen nach t immer wieder auf diese Kreisfunktionen, die im allgemeinen nicht für alle t-Werte verschwinden. Ist dagegen J oder K von der Form: $A + Bt$, wo A und B (Integrations-)Konstanten sind, so ist d^2J/dt^2 dauernd gleich 0.

Da wir jetzt lediglich die dem Lichte entsprechenden periodischen Zustandsänderungen im Felde ins Auge fassen wollen, so beschränken wir die Allgemeinheit unserer Betrachtungen nicht, wenn wir von den J und K enthaltenden Gliedern unserer allgemeinen Gleichungen 142) und 143) absehen und J sowohl wie K dauernd gleich 0 annehmen.

In der That vertragen sich die Annahmen $J = \partial X/\partial x + \partial Y/\partial y + \partial Z/\partial z = 0$ und $K = \partial L/\partial x + \partial M/\partial y + \partial N/\partial z = 0$ vollkommen mit unseren Gleichungen I a) und II). Denn differenziert man diese der Reihe nach nach x, y und z, so ergiebt sich beim Addieren rechts der Wert 0, links $\varepsilon\, dJ/dt$, bezw. $\mu\, dK/dt$; J und K sind also von der Zeit t unabhängige, willkürliche Konstanten; ihr Nullsetzen widerspricht nicht den Gleichungen $\varepsilon\, dJ/dt = 0$ und $\mu\, dK/dt = 0$.

Dadurch vereinfachen sich die Gleichungen 142) und 143) und wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \mu\varepsilon\frac{d^2X}{dt^2} &= \nabla^2 X \\ \mu\varepsilon\frac{d^2Y}{dt^2} &= \nabla^2 Y \\ \mu\varepsilon\frac{d^2Z}{dt^2} &= \nabla^2 Z \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 144) \qquad \left.\begin{aligned} \mu\varepsilon\frac{d^2L}{dt^2} &= \nabla^2 L \\ \mu\varepsilon\frac{d^2M}{dt^2} &= \nabla^2 M \\ \mu\varepsilon\frac{d^2N}{dt^2} &= \nabla^2 N \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 145)$$

Derartige Gleichungssysteme, in denen auf der einen Seite die mit Konstanten multiplizierte Zeitableitung 2. Ordnung einer Richtungsgrösse, auf der anderen die Raumvariation derselben Grösse steht, sind die Ausgangspunkte der theoretischen Optik; aus ihnen lassen sich alle Gesetze, welche sich auf die Verbreitung, Reflexion, Brechung, Interferenz und Beugung des Lichtes, kurz die ganze sogenannte geometrische Optik beziehen, herleiten. Wir wollen nur wenige für uns wichtige Konsequenzen aus diesen Gleichungen ziehen.

344. Begriff und Gleichungen des Strahles. — Wir denken uns die Quelle der durch die Gleichungen 144) und 145) beschriebenen Störungen des Gleichgewichtes der elektromagnetischen Feldzustände so weit in der Richtung der $-z$-Achse entfernt, dass wir die durch sie bedingten Vorgänge innerhalb eines, der $+z$-Achse benachbarten Gebietes als von x und y unabhängig und nur durch z und t bestimmt ansehen können.

Wir entfernen etwa den Oscillator § 325 so weit, dass seine Dimensionen klein im Verhältnis zu seiner Entfernung von dem betrachteten Feldpunkte sind und sorgen dafür, dass sich die von ihm erregten periodischen Zustände im Felde ungestört nach allen Seiten hin verbreiten können. Beim Licht würden wir die Lichtquelle genügend weit entfernen, so dass wir die etwa durch ein Diaphragma ausgeblendeten Strahlen als untereinander parallel ansehen können. Dann vereinfachen sich die Gleichungen Ia) II) 144) und 145) zu

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon \frac{dX}{dt} &= -\frac{\partial M}{\partial z} \\ \varepsilon \frac{dY}{dt} &= +\frac{\partial L}{\partial z} \\ \varepsilon \frac{dZ}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 146) \qquad \left.\begin{aligned} \mu \frac{dL}{dt} &= +\frac{\partial Y}{\partial z} \\ \mu \frac{dM}{dt} &= -\frac{\partial X}{\partial z} \\ \mu \frac{dN}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 147)$$

und, da wegen $J = K = 0$ auch $\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial z} = 0$ ist:

$$\left.\begin{aligned} \mu\varepsilon \frac{d^2X}{dt^2} &= \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \\ \mu\varepsilon \frac{d^2Y}{dt^2} &= \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \\ \mu\varepsilon \frac{d^2Z}{dt^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 148) \qquad \left.\begin{aligned} \mu\varepsilon \frac{d^2L}{dt^2} &= \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \\ \mu\varepsilon \frac{d^2M}{dt^2} &= \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} \\ \mu\varepsilon \frac{d^2N}{dt^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 149)$$

Wegen der Analogie mit der entsprechenden optischen Erscheinung bezeichnen wir den durch die obigen Gleichungen beschriebenen Vorgang als „Strahl elektromagnetischer Kraft". Wir wollen im Folgenden auf einige aus diesen Gleichungen herzuleitende Eigenschaften eines solchen Strahles hinweisen.

Hertz stellte sich einen solchen Strahl in der Weise her, dass er die von einem stabförmigen Oscillator § 325 von kleiner Kapazität und Induktanz ausgehenden Schwingungen an einem parabolisch gekrümmten Metall-Hohlspiegel reflektieren liess.

345. Transversalität der elektromagnetischen Strahlung. — Unter den im vorigen Paragraphen angegebenen Bedingungen werden zufolge der Gleichungen 146) und 147) Störungen erzeugt, bei denen die z-Komponente keine periodische Änderung erfährt, auch wenn der Vorgang selbst längs der Z-Achse mit der Zeit t fortschreitet; denn

sowohl dZ/dt wie dN/dt sind für alle t-Werte, also dauernd gleich 0 (vergl. auch § 343). Nur in den dazu senkrechten Richtungen, also innerhalb Ebenen, welche der xy-Ebene parallel bleiben, treffen wir von 0 verschiedene, mit Ort und Zeit periodisch variierende Komponenten X, Y, M und N an. Einem solchen periodischen Vorgange schreiben wir die Eigenschaft der „Transversalität" zu. Die zur Strahlrichtung senkrechte Fläche, in der sich in jedem Augenblick der Prozess der periodischen Vektorenänderung vollzieht, nennt man die „Wellenfläche". Wir haben hier nach den im vorigen Paragraphen gegebenen Erläuterungen eine ebene Wellenfläche vor uns.

346. Lage der Schwingungsvektoren zu einander. — Die beiden Komponenten der elektrischen Kraft X und Y gehören nach § 345 einem in die Ebene der xy fallenden Vektor an. Die Wahl des Koordinatensystems war völlig willkürlich. Wir können die zx-Ebene so wählen, dass der elektrische Kraftvektor gerade in sie hineinfällt. Dann stellt X den ganzen Vektor dar und Y ist dauernd gleich 0. Zufolge der ersten der Gleichungen 147) ist in diesem Falle aber auch $dL/dt = 0$, d. h. eine periodisch mit der Zeit variierende x-Komponente der magnetischen Kraft giebt es nicht; dagegen ist zufolge der zweiten Gleichung 147) dM/dt von 0 verschieden, d. h. die magnetische Kraft pulsiert in der zy-Ebene. Der elektrische und der magnetische Strahlungsvektor stehen immer senkrecht zu einander.

Dass die Art der Zuordnung beider Vektoren zu einander vollkommen der Poyntingschen Regel der Energiewanderung § 304 entspricht, werden wir weiter unten in § 350 zeigen. Wenn über einen Oscillator elektromagnetische Schwingungen hin- und herpulsieren, so schnüren sich fortwährend Kraftlinien ab und wandern in den freien Feldraum hinaus, wie dies Hertz für den Fall einer geradlinigen Schwingung besonders instruktiv sowohl experimentell, wie durch Diagramme erläutert hat. Die Energiestrahlung ist eine (besonders intensive) Energiewanderung. Der Umstand, dass bei dem elektromagnetischen Strahlungsvorgang ohne weiteres zwei zu einander senkrecht stehende Vektoren auftreten, hebt die „elektromagnetische Lichttheorie" von vornherein über eine Schwierigkeit hinaus, die bei den älteren, elastischen Lichttheorien bezüglich der Lage der Polarisationsebene des Lichtes in Bezug auf die Schwingungsebene zu lebhaften Kontroversen geführt hatte. Fresnel nahm an, dass sich die optisch verschieden verhaltenden Medien darin unterscheiden, dass bei gleicher Elasticität die Dichte des die Lichtschwingungen vermittelnden Mediums (Äther) eine verschiedene sei; dann mussten die Schwingungen senkrecht zur Polarisationsebene erfolgen. Fr. Neumann, Mac Cullagh, Kirchhoff suchten umgekehrt die optische Verschiedenheit in einem Unterschiede der Elasticität bei gleicher Dichte; diese Annahme führte dazu, die Schwingungen in der Polarisationsebene erfolgend zu denken. Beide Theorien vermochten alle Erscheinungen der geometrischen Optik gleich vollkommen zu erklären, eine Entscheidung über die Zulässigkeit der einen oder anderen Grundannahme war aber durch keine

Erfahrungsthatsache herbeizuführen. Von dem allgemeineren Standpunkte der elektromagnetischen Lichttheorie aus „lässt sich nicht allein von vornherein überblicken, dass beide Wege zum gleichen Ziele führen müssen, sondern auch erkennen, dass beide mit gleicher Berechtigung beschritten werden können". Da die Magnetisierungskonstanten für alle in Betracht kommenden Medien fast gleich und zwar gleich Eins sind, während die D.K. merklich verschieden sind, so bestimmen hauptsächlich die elektrischen Eigenschaften der Körper deren optisches Verhalten. Der elektrische Vektor scheint im allgemeinen senkrecht zu der Polarisationsebene zu stehen. Ob das Auge auf den elektrischen oder den magnetischen Zustandsvektor oder auf beide reagiert, ist noch nicht festgestellt. Ol. Lodge hat auf die beachtenswerte Thatsache aufmerksam gemacht, dass elektrische Oscillatoren, welche Schwingungen von der Ordnung der Lichtschwingungen (mehrere hundert Billionen) in der Sekunde aussenden und folglich auch absorbieren würden, etwa von der Grössenordnung der Zäpfchen und Stäbchen in unserem Auge sein müssten.

347. Begriff der elektromagnetischen Welle. — Wenn sich ein periodischer Vorgang von einer Stelle aus auf seine Umgebung überträgt und sich in dieser mit endlicher Geschwindigkeit weiter verbreitet, so resultiert hieraus eine räumliche Gruppierung zeitlich wechselnder Zustandsänderungen, die man als „Wellenbewegung" bezeichnet.

So werden die Wasserwellen dadurch erregt, dass die Auf- und Niederbewegung, welche an einer Stelle etwa durch einen durch die zunächst ruhende Wasseroberfläche geworfenen Stein hervorgerufen war, sich auf die Nachbarteilchen überträgt und von diesen in gleicher Weise weiter gegeben wird. Fände die Übertragung unendlich rasch statt, so würden wir nicht den Wechsel von Wellenbergen und Wellenthälern beobachten. Ähnlich verursacht die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Verdichtungen und Verdünnungen, welche in der Luft von einem unter der Wirkung elastischer Kräfte schwingenden Körper hervorgerufen werden, die Schallwellen. Als es Hertz gelungen war, elektrische Wellen nachzuweisen, war damit auch die theoretisch wichtigste Frage nach der endlichen Verbreitungsgeschwindigkeit von Zustandsänderungen im elektromagnetischen Felde endgültig entschieden.

Ist T die Periodendauer des erregenden Vorganges § 325 und V die Geschwindigkeit, mit der sich diese Erregungen von Stelle zu Stelle fortpflanzen, so ist augenscheinlich TV die Strecke, um die sich die Erregung in einer der Periodendauer gleichen Zeit durch den Raum hin verbreitet. Diese Strecke nennt man die Wellenlänge λ, so dass

$$\lambda = TV \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 150)$$

und folglich

$$V = \lambda/T \; . \; 150\,a) \quad T = \lambda/V \; . \; 150\,b) \quad u = 1/T = V/\lambda \; . \; 150\,c)$$

ist, wo u die „Schwingungszahl" bedeutet.

Dass unsere Strahlgleichungen (§ 344) thatsächlich auf solche elektromagnetische Wellen führen, ergeben die Gleichungen 148) und 149). Dieselben stellen die Komponenten X, Y, L, M als Funktionen von z und t dar, welche auf die Form

$$f(z - Vt)$$

gebracht werden können. Wie die hier eingeführte allgemeine Funktion f auch beschaffen sein mag, immer werden die zweiten Ableitungen von f einmal nach t, das andere Mal nach z genommen, die Gleichungen 148) bezw. 149) erfüllen, falls nur der Wert von V geeignet gewählt wird, vergl. den folgenden Paragraphen. Dass aber solche Funktionen mit einem derartigen Argumente $z - Vt$ thatsächlich eine Wellenbewegung darstellen und zwar eine, welche mit der Geschwindigkeit V voraneilt, lehrt eine einfache Überlegung: Gesetzt zur Zeit $t = 0$ habe am Orte $z = 0$ der durch f beschriebene Zustand den speziellen Wert f_0. Dann begegnen wir diesem Werte zu einer späteren Zeit t_1 an einem Orte z_1 wieder, für den $z_1 = Vt_1$ ist, denn dann ist das Argument von f wieder gerade $= 0$, und f selbst muss infolgedessen den speziellen Wert f_0 haben. Das heisst aber nichts anderes, als der durch f beschriebene Zustand pflanzt sich mit der Geschwindigkeit V in der Richtung z hin fort. Ist im speziellen $t_1 = T$ der Schwingungsdauer, so ist der Weg $z_1 = \lambda$, da nach 150) $VT = \lambda$ ist. Nach der doppelten Zeit $2T$ hat sich der Zustand um die Strecke von zwei ganzen Wellenlängen weiter verbreitet u. s. f.

Wir sprechen absichtlich von der Verbreitung und der Welle elektromagnetischer Zwangszustände, und nicht von derjenigen irgend einer Bewegung. Wenn wir an einer solchen Welle daher auch nicht Berg und Thal (ebensowenig wie an einer Schallwelle) unterscheiden können, so dürfen wir doch die Gesamtheit aller auf die Strecke λ entfallender Zustandsänderungen unter den Begriff der Welle subsummieren und von einer Wellenlänge reden, als der Entfernung, um die identische Zustände voneinander abstehen. Die nach der Zeit T sich immer wieder in der gleichen Weise reproduzierenden Zustandsänderungen spielen sich nach § 345 lediglich in der Richtung der xy-Ebene ab; insofern reden wir von „elektromagnetischen Transversalwellen".

348. Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen. — Für die elektrische Vektorkomponente X würde unsere allgemeine Lösung

$$X = f_x(z - Vt)$$

der ersten unserer Gleichungen 148) die Bedingung ergeben

$$\mu \varepsilon V^2 f_x'' = f_x'',$$

wenn wir mit f_x'' die zweimalige Ableitung der Funktion f_x nach ihrem Argumente bezeichnen. Ohne auf die Form der Vektorfunktion f_x irgend näher eingehen zu müssen, können wir daher ohne weiteres folgern, dass

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 151)$$

sein muss. Gleiches gilt für die anderen Komponenten; die durch sie

dargestellten Feldzustände werden alle mit der gleichen Geschwindigkeit übertragen.

Die Dimension von μ war die einer reinen Zahl § 109, diejenige von ε die eines reciproken Geschwindigkeitsquadrates § 321, also ist unsere Gleichung 151) in der That richtig dimensioniert.

Die Geschwindigkeit, mit der sich elektromagnetische Wellen durch das freie Feld verbreiten, sind umgekehrt proportional der Wurzel aus Permeabilität μ und Dielektricitätskonstante ε.

349. Elektromagnetischer Brechungsexponent. — Das Verhältnis der Verbreitungsgeschwindigkeit einer Wellenbewegung im freien Raume (Vakuum oder intrastellarer Raum) zu der in einem beliebigen Medium nennt man den Brechungsexponenten n. Denn dieses Verhältnis n ist für die bei einem Übergange aus dem Vakuum in das Medium auftretende Ablenkung (Brechung) maassgebend, da aus rein geometrischen Gründen n auch gleich dem Verhältnis des Sinus des Einfallswinkels zu dem des sog. Brechungswinkels ist.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit im Vakuum ($\mu = 1$, $\varepsilon = 1$) mit V_0, in einem beliebigen durch die Werte μ und ε der Feldkonstanten charakterisierten Medium durch V, so ist mit Rücksicht auf 151)

$$n = V_0/V = \sqrt{\mu\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 152)$$

Die meisten Substanzen unterscheiden sich bezüglich ihrer Permeabilität nur so wenig untereinander und von dem Vakuum, dass für sie $\mu = 1$ wie für dieses gesetzt werden kann. Dann ist

$$n = \sqrt{\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 152\,a)$$

Der Brechungsexponent n einer Substanz ist gleich der Wurzel aus ihrer Dielektricitätskonstante ε.

Dies ist die berühmte Relation, welche sich aus der MAXWELLschen Theorie ergab und durch die zum erstenmale auf eine innige Beziehung zwischen Licht und elektromagnetischer Wellenbewegung hingewiesen wurde.

350. Die Schwingungsgleichungen. — Nachdem wir im Vorhergehenden in ganz allgemeiner Weise die wichtigsten Eigenschaften der elektromagnetischen Strahlung abgeleitet haben, indem wir nichts über die spezielle Form der Funktion f voraussetzten, erübrigt es noch diejenige einfache Gestalt von f anzugeben, welche sich in allen Fällen der geometrischen Optik als ausreichend erwiesen hat. Setzt man

$$X = X_0 \cos\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi \quad \ldots\ldots \quad 153)$$

so erkennt man beim Einsetzen der entsprechenden Ableitungen in die erste der Gleichungen 148), dass dieser Ausdruck für X als Funktion von z und t diese Gleichung mit Rücksicht auf 150 a) befriedigt. Wir können also 153) als Integral unserer Differentialgleichung ansehen. Hier ist X_0 der Maximalwert, den X überhaupt annehmen kann. Legen wir wieder wie in § 346 die xz-Ebene in die Richtung des elektrischen Vektors, so folgt aus 153) in Verbindung mit der zweiten Gleichung 147) für M (bis auf eine Konstante) ein Wert von der Form

$$M = M_0 \cos\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi$$

Einem positiven Werte des elektrischen Vektors entspricht also an derselben Stelle zur selben Zeit ein positiver des magnetischen; ebenso entsprechen sich die negativen Werte. Blicken wir demnach in unserem weinwendigen Koordinatensystem in der Richtung der − nach der + Seite der z-Achse entlang (vergl. die Fig. 135), so würde der elektrische Vektor in den in unserer Transversalwelle immer gleichzeitig mit vorhandenen magnetischen stets durch eine Rechtsdrehung übergeführt werden. Dann schreitet aber nach der Poyntingschen Regel § 304 die Energie im Sinne der $+z$ fort. In gleichem Sinne war aber die hier betrachtete Wellenbewegung im Voraneilen begriffen. Die Energiestrahlung schliesst sich also ganz den Gesetzen der Energiewanderung an, vergl. § 346.

Erläuterung am Feldmodelle. Steckt man die Kurbeln einer am Rande des in § 326 beschriebenen Modelles liegenden Reihe von Rollen z. B. der untersten in die Löcher eines der daselbst erwähnten Brettchen, so kann man durch periodisches Hin- und Herbewegen desselben alle mit der Energiestrahluug nach oben hin (+ z-Richtung) verbunden zu denkenden Vorgänge sehr gut illustrieren. Geht man aus der Anfangsstellung, bei der die Kurbeln am höchsten stehen, nach einer Seite hin, etwa nach rechts, aus der Gleichgewichtslage heraus, so spannen sich die Gummifäden, dielektrische Polarisation (von links nach rechts gerichtet) tritt auf, aber untrennbar mit dieser verbunden Rotationsbewegungen der unmittelbar benachbarten zweiten Rollenreihe, und zwar im Uhrzeigersinne, also magnetische Polarisation mit einer von vorn nach rückwärts weisenden Kraftrichtung. Hierdurch werden aber die Nachbarfäden und damit die dritte Rollenreihe aus dem Gleichgewichtszustande gebracht; die Zustandsänderung ergreift die vierte Rollenreihe, und so wird die Energie von unten nach oben in der Strahlrichtung weiter gegeben. Elektrischer Vektor (Richtung entspannt — gespannt) und magnetischer (Drehungsachsen) stehen senkrecht zu einander, die Richtung der Energiestrahlung entspricht der Korkzieherregel § 304. Die Strahlung bleibt von unten nach oben gerichtet, auch wenn man die Richtung des Bewegungsimpulses wechselt, da sich dabei sowohl Spannung wie Drehung umkehren.

351. Stehende Wellen. — Fallen elektromagnetische Wellen senkrecht oder nahezu senkrecht auf eine ebene Metallwand, so werden sie so reflektiert, dass ihre x und y-Komponenten proportionale Schwächungen erleiden. Die reflektierten Wellen setzen sich dann mit den ankommenden zu sog. stehenden Wellen zusammen, bei denen sich an gewissen Stellen des Feldes dauernd die Kräfte der beiden Wellensysteme zum Teil oder vollkommen aufheben (Knoten), an anderen

(um eine viertel Wellenlänge davon entfernten) sich fortwährend verstärken (Bäuche). Stehende elektrische Wellen beobachtete zuerst HERTZ, stehende Lichtwellen wurden von WIENER nachgewiesen. Es lässt sich zeigen, dass an den Knotenstellen der elektrischen Kraft die Bäuche der magnetischen liegen und umgekehrt.

Denn bei der Reflexion wird die Richtung der Energiewanderung umgekehrt; da mit dieser Richtung diejenige der Kraftvektoren immer eindeutig verknüpft ist § 350, so fallen die magnetischen Vektoren der ankommenden und der reflektierten Welle dort in die entgegengesetzte Richtung, wo die elektrischen Vektoren gerade zusammenfallen; letztere verstärken sich, erstere heben sich auf; wo hingegen die Richtungen der magnetischen Polarisationen zusammenfallen, liegen die der elektrischen entgegengesetzt, wir finden einen Bauch der magnetischen, einen Knoten der elektrischen Kraft.

Wo die elektrischen Zustandsänderungen im Maximum ihrer Pulsationen begriffen sind, ist die magnetische Kraft gleich 0, wo die elektrischen Spannungen dauernd gleich 0 sind, hat man das Auftreten magnetischer Kraft zu suchen.

Da das Auftreten magnetischer Kräfte und damit von Kraftlinien mit dem Phänomen elektrischer Strömung verbunden ist, müssen, falls man die stehenden Wellen entlang einer Drahtbahn entstehen lässt, an den Spannungsknoten Bäuche der Strömung, an den Spannungsbäuchen aber Knoten der elektrischen Strömung liegen. Dadurch, dass nicht immer deutlich angegeben wird, ob sich die Bezeichnungen Knoten und Bäuche auf die elektrischen Spannungen oder aber auf die elektrischen Strömungen beziehen, die beide um $^1/_4\,\lambda$ auseinander liegen, kommt oft Unklarheit in die Darstellungen.

352. Experimentelle Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit. — Die experimentelle Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines wellenartig sich ausbreitenden Agens kann durch Messung der Länge stehender Wellen erfolgen; diese indirekte Methode ist bei den elektrischen Wellen die bequemste; sie wurde von HERTZ zuerst angewendet.

Bei dem Lichte hat die direkte Bestimmung des in einer Sekunde zurückgelegten Weges schon früher zu einer Geschwindigkeit von ca. 300000 km geführt (OLAF RÖMER: Jupitertrabanten, BRADLEY: Lichtaberration, FIZEAU und FOUCAULT: direkte terrestrische Bestimmung mittels eines rasch rotierenden Zahnrades oder des Drehspiegels). Ein der letztgenannten Methode entsprechendes direktes Verfahren wurde erst neuerdings (1896) von BLONDLOT auch für die Verbreitungsgeschwindigkeit von Störungen des elektrischen Spannungszustandes verwendet.

Es war HERTZ gelungen (§ 325) sehr rasche Schwingungen zu erhalten, denen selbst bei grosser Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine mässig grosse, in den Räumen des Laboratoriums beobachtbare Wellenlänge zukam. In dem Abschnitte B) des vorigen Kapitels zeigten wir, wie man die Schwingungsdauer T eines Oscillators bei gegebener Kapazität und Selbstinduktion berechnen kann. Wurde aus der Beob-

achtung stehender Wellen die zugehörige Wellenlänge λ ermittelt, so ergab sich V nach Formel 150 a).

Die Thomson-Kirchhoffsche Formel gilt nur streng, wenn die Länge des gesamten Schliessungskreises, in dem die Schwingung pulsiert, klein im Vergleiche zur Wellenlänge λ dieser Schwingung ist (so dass der Strömungsverlauf in allen Teilen dieses Kreises in jedem Momente als gleichphasig angesehen werden kann). Deshalb traf Blondlot die folgende Anordnung, welche von Einwänden frei ist, die die früheren Versuche bis zu einem gewissen Grade noch trafen: Ein Oscillator erregte Wellen von mehreren Metern Länge (bei Blondlot ein einfacher Drahtring mit einer Funkenstrecke an einer Stelle, und einem Plattenkondensator an der diametral gegenüber liegenden Stelle; um ihn war ein zweiter Ring isoliert gelegt, der an der der Funkenstrecke entsprechenden Stelle aufgebogen war und hier in Fernleitungsdrähte überging). Der Erreger wird an zwei Paralleldrähte angeschlossen. Diese halten die Energie zusammen und verhindern, dass sich dieselbe aus dem Zwischenraum zerstreut. Wird irgendwo auf die Drähte eine metallische Querverbindung gelegt („Brücke"), so wird an dieser der grösste Teil der an den Drähten entlang gleitenden Energie reflektiert, es kommt zur Bildung stehender Wellen vor der Brücke. In diese Wellen wird ein Resonator gebracht, der aus einem kleinen Plattenkondensator und einem rechteckig gebogenen einfachen Schliessungskreise von einer Länge besteht, die klein ist im Vergleich zu der Wellenlänge der dem Resonator entsprechenden Eigenschwingung. Dieser Resonator gerät in kräftiges Mitschwingen, wenn er sich in einem Schwingungsbauche der magnetischen Kraft befindet, und Magnetkraftlinien durch seinen Schliessungskreis pulsieren. Dieses Mitschwingen äussert sich durch das Auftreten kleiner Fünkchen in einer seine Kondensatorplatten überbrückenden Funkenstrecke. Befindet sich der Resonator in solcher Entfernung von der Brücke, dass er an einer Knotenstelle der magnetischen Kraft liegt, so erlischt das Funkenspiel. Man stellt den Resonator fest auf und verschiebt die Brücke auf den Drähten von einer Stelle, wo die Funken aussetzen oder sehr lebhaft sind, bis zur nächsten Stelle, wo dasselbe wieder stattfindet; die Verschiebung entspricht der halben Wellenlänge; die Schwingungsdauer des Resonators kann sehr genau berechnet werden. Sie wird am besten der des Primärerregers möglichst gleich gewählt. Das Verfahren entspricht der Wellenlängenbestimmung mittels eines akustischen Resonators, der von den an einer Wand durch Reflexion verursachten stehenden Schallwellen einer Tonquelle diejenige, die seiner Eigenschwingung entspricht, auswählt und verstärkt; an ihm kann man ein Anschwellen und Abnehmen des Eigentones wahrnehmen, wenn man sich successive von der Wand entfernt (Savart). Der reflektierenden Wand entspricht hier die leitende Brücke.

Durch diese Versuche wurden für V in Luft ca. 300000 km pro sek. gefunden, also dieselbe Geschwindigkeit wie für das Licht. Auch dieses Ergebnis hatte die Maxwellsche Theorie voraussehen lassen; das Zutreffen dieser Konsequenz mit den Beobachtungsthatsachen bildete eine weitere, wohl die glänzendste Bestätigung derselben.

353. Versuche mit Strahlen elektromagnetischer Kraft. — Wenn Strahlen elektromagnetischer Kraft denselben Verbreitungsgesetzen wie die Lichtstrahlen gehorchen, so muss man mit ihnen auch dieselben Versuche anstellen können wie mit den letzteren. Als Hertz den aus

seinem Hohlspiegel, § 344, kommenden Strahl gegen eine Metallwand richtete, wurde derselbe von dieser nach den Gesetzen der Lichtreflexion unter gleichen Winkeln zurückgeworfen; gegen ein Pechprisma gerichtet, wurde er gebrochen. Nach und nach gelangen alle Versuche der Interferenz, der Doppelbrechung, ja selbst der Beugung, mit denen man von dem Gebiete der Optik her vertraut war. Umgekehrt können elektromagnetische Strahlungserscheinungen gewisse Phänomene der Optik aufklären, welche beim Lichte wegen der Kleinheit der Wellenlänge schwieriger zu verfolgen sind.

Der Unterschied der Wellenlänge scheint der einzige zu sein, der zwischen Licht und strahlender Elektricität noch übrig bleibt. Die elektrischen Wellen messen nach Metern und Centimetern, die Lichtwellen nach zehntausendstel Millimetern. Doch fehlen uns in der Skala der Schwingungszahlen hier noch weite Bereiche. Sind die kleinsten zur Zeit erzeugten elektrischen Wellen (P. Lebedew) wenige Millimeter lang, so messen selbst die längsten Wärmewellen, welche Rubens und Nichols durch zahlreiche Reflexionen an Flussspathflächen aus einer Wärmequelle auszusondern vermochten, doch nur 24 tausendstel eines Millimeters und die längsten, dem Auge direkt wahrnehmbaren Wellen sind ca. 820 millionstel mm lang, die kürzesten 370 $\mu\mu$. Das Gemeinsame dieser Phänomene ist nach unseren bisherigen Kenntnissen in erster Linie die Wanderung, die Strahlung der Energie. Diese dürfte in den verschiedenen Fällen wesensgleich sein. Es wird dagegen von der Art des Empfängers abhängen, ob derselbe Zug periodischer Zustandsänderungen, welcher die Strahlungsenergie heranbringt, bei dem Übergang auf diesen in elektrische Schwingung, in Wärme oder Licht verwandelt wird. Es ist seither noch nicht gelungen, am Lichte direkt irgend eine magnetische oder elektrische Erscheinung selbst nachzuweisen, wiewohl wir die Energien dieser Agentien sich mannigfach ineinander verwandeln sehen.

Dagegen ist es jüngst Rubens und Nichols gelungen, für langwellige Wärmestrahlen stabförmige, auf einer Glasplatte untereinander parallel angeordnete Silberresonatoren zu konstruieren, die ähnliche Erscheinungen bezüglich der Intensität der reflektierten strahlenden Energie für die Wärme zeigten, wie sie Garbasso für Strahlen elektrischer Kraft erhalten hatte.

354. Die Absorptionserscheinungen. — Wenn wir die in § 343 angegebenen Operationen an den Gleichungssystemen I) und II) ausführen, so erhalten wir die allgemeinen Lichtgleichungen für ein isotropes leitendes Medium. Die mit der Leitfähigkeit λ multiplizierten Glieder bringen bei der Differentiation nach der Zeit t erste Ableitungen in die Endgleichungen hinein, die im übrigen den Gleichungen 144) und 145) entsprechen. Die Integrale solcher Gleichungen führen auf gedämpfte Schwingungen. Die Leitfähigkeit des Mediums bewirkt also das allmähliche Erlöschen der sich durch dasselbe verbreitenden elektromagnetischen Wellen. Wir nennen diese Erscheinung „Absorption“ und wissen aus Kapitel 17, dass sich die verloren gehende Strahlungsenergie in Wärme verwandelt. Unsere allgemeinen Gleichungssysteme I) und II) umfassen also auch diese Erscheinungen der Strahlungsabsorption.

355. Erscheinungen der Dispersion und elektiven Absorption vom Standpunkte der Maxwellschen Theorie. — Bei dem Lichte beobachten wir, dass der Brechungsexponent n, § 349, für Strahlungsarten verschiedener Wellenlänge einen verschiedenen Wert hat; die daraus folgende Zerlegung eines Strahlungskomplexes bei der Brechung nennt man Dispersion.

Ebenso werden bei der Absorption § 354 im allgemeinen immer gewisse Wellenlängen stärker als andere absorbiert. Es könnte scheinen, dass unsere Theorie hierfür keine Erklärung giebt, da die D.K. ε und die Leitfähigkeit λ in ihr als Konstanten behandelt wurden. Wenn man auch bei der D.K. ε andere Werte für rasch wechselnde als für statische Ladungen desselben Kondensators findet, und in Gleichung 152 a) natürlich derjenige Wert für ε gewählt werden muss, welcher der Wellenlänge des gerade betrachteten Brechungsindex n entspricht, so scheinen die allgemeinen Gleichungen doch weder für eine Abhängigkeit der Brechung noch der Absorption von der Periode der Schwingungen Raum zu lassen.

Doch ist nicht zu verkennen, dass gemäss unserer ganzen Herleitung dieser Theorie dieselbe dann einer Erweiterung bedarf, wenn die einzelnen Teile des Mediums nicht mehr befähigt sind, alle zeitlichen Änderungen der Zwangszustände in gleicher Weise anzunehmen und mitzumachen. Dies ist dann der Fall, wenn die periodischen Wechsel dieser Zustände so rasch erfolgen, dass sie vergleichbar werden mit den Eigenschwingungen der einzelnen Bausteine der Feldmedien selbst, wenn diese also als „Resonatoren" wirken. Dies ist bei den Lichtschwingungen durchweg, bei raschen elektrischen Schwingungen schon wenigstens bezüglich der molekularen Grundschwingungen der Fall, darum müssen sich hier individuelle Verschiedenheiten der Feldträger den verschiedenen Wellenlängen gegenüber äussern, wie sie in Dispersion und elektiver Absorption zum Ausdruck kommen. Die Moleküle führen dann unter der Einwirkung der periodischen Feldzustände zum Teil „erzwungene Schwingungen" aus und folgen hauptsächlich den zeitlichen Feldänderungen, deren Perioden ihren eigenen Schwingungsperioden entsprechen.

Es ist gewiss beachtenswert, dass die cyklische Theorie der elektrodynamischen Vorgänge gerade auf diejenigen Erweiterungen der Maxwellschen Theorie naturgemäss führt, welche wir an ihr anbringen müssen, damit sie auch die genannten Phänomene mit umfasst. Nach dieser ist ein beliebiger Feldpunkt i mit den anderen und durch diese mit einem Antriebspunkte so verbunden, dass in ihm eine Geschwindigkeit v_i hervorgerufen wird, welche der cyklischen Geschwindigkeit q des erregenden Vorganges proportional ist, § 141. Sowohl v_i wie q sind Funktionen der Zeit. Bei raschen Wechseln der Erregung und endlicher Fortpflanzungs-

geschwindigkeit V derselben kommt diese nun insofern in Betracht, als ein Wert v_i am Punkte i zur Zeit t einem Werte von q nicht mehr zur Zeit t, sondern zu einer etwas früheren Zeit $t - c_i/V$ entspricht, wo c_i von der Lage des Punktes im Felde, seiner Verknüpfung mit den anderen Punkten und von seiner individuellen Natur abhängt. Es ist dann

$$v_i(t) = a_i\, \mathfrak{q}\left(t - \frac{c_i}{V}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 154)$$

oder nach der TAYLORschen Reihe entwickelt

$$v_i(t) = a_i^{(1)}\, \mathfrak{q}(t) + a_i^{(2)}\, \dot{\mathfrak{q}}(t) + a_i^{(3)}\, \ddot{\mathfrak{q}}(t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 155)$$

wo die a für die verschieden gearteten Molekülgruppen individuell verschiedene Konstanten sind. Hier treten also höhere Ableitungen nach der Zeit der cyklischen Geschwindigkeit in die Gleichungen ein, die Erscheinung ist nicht mehr rein cyklisch, § 140.

Sowie bei periodischen Anderungen des Feldzustandes die Schwingungsdauer kommensurabel mit derjenigen der Eigenschwingungen der Moleküle selbst oder gewisser Gruppen in ihnen wird, muss folglich die durch 155) angedeutete Erweiterung eintreten. Dass man dadurch aber thatsächlich zu Gleichungen für die Dispersion und Absorption gelangt, welche durch die Erfahrung bestätigt werden, hat der Verf. a. a. O. (WIED. Ann., **48**, p. 1, 1893) ausführlicher dargelegt; fast gleichzeitig mit der genannten Arbeit erschien eine Abhandlung von H. VON HELMHOLTZ über den gleichen Gegenstand, in der er eine analoge Erweiterung der MAXWELLschen Theorie aber von spezielleren Annahmen ausgehend gab.

356. Krystalloptik. — Wir haben seither immer ein Medium vorausgesetzt, welches nach allen Richtungen hin vollkommen gleich beschaffen (isotrop) ist. Dann sind nicht nur die Polarisationen selbst, sondern auch ihre Komponenten mit den Kräften bezw. Kraftkomponenten durch je einen und zwar denselben Proportionalitätsfaktor miteinander verknüpft. Im isotropen Medium ist ausser

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\, \mathfrak{E} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \mu\, \mathfrak{H}$$

auch

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \varepsilon X & \mathfrak{L} &= \mu L \\ \mathfrak{Y} &= \varepsilon Y & \mathfrak{M} &= \mu M \\ \mathfrak{Z} &= \varepsilon Z & \mathfrak{N} &= \mu N \end{aligned}$$

wenn wir in Übereinstimmung mit HERTZ durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Komponenten des elektrischen, mit $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ die des magnetischen Polarisationszustandes bezeichnen.

Bei anisotropen (äolotropen) Medien ist dies anders. Hier müssen wir annehmen, dass das Medium nach verschiedenen Richtungen hin verschieden leicht zu polarisieren ist, gleich grossen Kräften also ver-

schieden leicht nachgiebt, vergl. § 313. Dies findet seinen einfachsten Ausdruck, wenn wir in den Proportionalitäten zwischen Polarisation und polarisierender Kraft den Proportionalitätsfaktoren ε verschiedene Werte geben. Bei der dadurch herbeigeführten Verallgemeinerung der Feldgleichungen umfassen dieselben dann auch die Erscheinungen der Doppelbrechung. Die Werte der D.K. und Magnetisierungskonstanten in den verschiedenen Richtungen hängen von dem molekularen Aufbaue der Substanzen, also der Krystallstruktur, ab. Die Behandlung der „Krystalloptik" vom Standpunkte der elektromagnetischen Lichttheorie aus im einzelnen zu entwickeln, würde hier zu weit führen; es möge der Hinweis genügen, wie sich auch dieses Gebiet unserer Systematik eingliedern lässt.

20. Kapitel.

Zur Energetik von Systemen, deren Zustand durch beliebig viele allgemeine Koordinaten (Parameter) bestimmt ist.

Die neueren Anschauungen haben die Erscheinungen in magnetischen, elektrischen und elektromagnetischen Kraftfeldern auf Zustandsänderungen in den kleinsten Teilchen der die Felder erfüllenden Medien zurückgeführt. Die älteren Anschauungen mit ihren fernewirkenden magnetischen und elektrischen Massen und Stromelementen besassen eine sehr allgemeine und weit ausgebildete Theorie in der auf der Hypothese unvermittelter Fernewirkungen aufgebauten Potentialtheorie. Um den neueren Anschauungen eine ähnliche theoretische Verallgemeinerung und Vertiefung zu geben muss man, ihren Grundideen entsprechend, von ihnen aus zu der Theorie allgemeiner Zustandsänderungen fortschreiten. Dieselbe wurde schon vor 100 Jahren von LAGRANGE in seiner „Mécanique analytique" entwickelt. Er lehrte den Zustand eines beliebigen Systems durch allgemeine Koordinaten oder Parameter für jeden Zeitmoment zu beschreiben und aus den gegenwärtigen Zuständen die vergangenen und zukünftigen durch Rechnungsoperationen herzuleiten; durch seine allgemeinen Gleichungen wurde also der ganze zeitliche Ablauf einer Zustandsreihe festgelegt. LAGRANGE ging dabei von der Mechanik aus. Seine Betrachtungen können indessen so verallgemeinert werden, dass sie zu einer von jeder speziellen Hypothese freien Phänomenologie führen, welche wir als „allgemeinste und einfachste Beschreibung der Beobachtungsthatsachen" im Sinne GUSTAV KIRCHHOFFS als das Ziel aller Theorie zu betrachten haben.

Wenn wir daher MAXWELL, HELMHOLTZ, BOLTZMANN und namentlich HEINRICH HERTZ auf diesem Wege voranschreiten sehen, so dürfen wir hierin nicht in erster Linie den Ausdruck eines Strebens, „Magnetismus und Elektricität auf Mechanik zurückzuführen" erblicken, sondern

die folgerichtige Weiterentwickelung und Verallgemeinerung jener Lehre von den allgemeinen Feldzuständen und Zustandsänderungen, welche wir in den vorangehenden Kapiteln im spezielleren dargestellt haben. Diese nun folgenden letzten Kapitel gehören also naturgemäss zur Abrundung und Vollendung des Bildes, welches wir von den neueren Anschauungen zu geben versucht haben, wenn sie sich auch, zunächst wenigstens, auf abliegenden Gebieten zu bewegen scheinen.

Um den Übergang zu vermitteln, geben wir zunächst eine gedrängte Theorie beliebig gearteter Systeme, deren Zustand durch allgemeine Parameter charakterisiert ist. Den wesentlichsten Begriff bildet auch hier wieder die Energie. Wenn wir zu ihrer Einführung von der kinetischen Form derselben ausgehen, so folgen wir nicht nur dem historischen Gange, sondern haben auch den Vorteil, an geläufige Vorstellungen anknüpfen zu können; denn wir haben vom 7. Kapitel an immer die kinetischen Interpretationen der Feldzustände mit Erfolg zur Erläuterung herangezogen und uns gewöhnt, auch die in den Magnet- und Stromfeldern angetroffenen Arbeitsvorräte mit der kinetischen Energie rotierender Elemente zu parallelisieren, § 265.

357. Die Zustandsparameter (allgemeine Koordinaten). — Wollen wir eine allgemeine Theorie eines Erscheinungsgebietes aufstellen, so müssen wir uns zunächst freimachen von jedem spezielleren, willkürlich eingeführten Bezugs- oder Koordinatensystem und uns direkt an die Änderungen solcher Grössen halten, von denen wir bemerken, dass sie den Verlauf der betrachteten Erscheinungen wesentlich bestimmen.

Ein rechtwinkliges Koordinatensystem der x, y, z ist uns nirgends direkt gegeben und nur in besonders einfachen Fällen lassen sich die Erscheinungen unmittelbar auf drei zu einander senkrechte Richtungen beziehen; meist muss dazu aber eine Zerlegung in entsprechende Komponenten vorausgehen. Aus diesem Grunde führten wir in Kapitel 19, A) die Rechnungen direkt an den Richtungsgrössen selbst durch und legten zur Charakterisierung des Zustandes eines cyklischen Systems eine Bogengrösse als Koordinate zu Grunde.

Ferner müssen wir uns von der direkten Bezugnahme auf die einzelnen der Erscheinung zu Grunde liegend gedachten Massen selbst freimachen. Bei gewissen Problemen der Mechanik kann der Zustand eines Systems durch Gleichungen dargestellt werden, in denen sowohl die Orte, wie die Geschwindigkeiten aller bewegten Massen selbst vorkommen („Punktmechanik"). Diese Auflösung der ganzen Erscheinung und das Vordringen bis zu den einzelnen Massen selbst gelingt aber nur selten.

Eigentlich finden wir nur in der Astronomie den Fall verwirklicht, dass man den Zustand eines ganzen Systems, z. B. des Sonnensystems, durch Darstellung der Bewegungen der einzelnen Massen nahezu vollkommen wiedergeben kann; hier sind die Körper klein im Vergleich zu ihren Abständen, sie können mit

grosser Annäherung als punktförmig betrachtet werden und daher ist es, freilich auch erst nach jahrhundertelangem Bemühen, gelungen, die Gleichungen soweit zu integrieren, dass man für jede einzelne Masse den relativen Ort im Systeme und ihre Geschwindigkeit für jeden beliebigen Zeitpunkt mit grosser Genauigkeit angeben kann.

Die Eigenschaften eines Gases vermag man mit einem gewissen Grade der Annäherung an die Wahrheit auf Bewegungen einer grossen Anzahl von einzelnen Massenteilchen zurückzuführen; wenn man aber dieses Bewegungssystem durch Gleichungen beschreiben will, aus denen neue Eigenschaften desselben abgeleitet werden sollen, so kann man nicht im entferntesten daran denken, die Orte und Geschwindigkeiten der einzelnen Moleküle für jeden Zeitmoment explicite darzustellen. Man muss auf diese Bestimmungsstücke verzichten und thut es auch, denn es interessieren thatsächlich ganz andere Grössen, nämlich solche, die der Kontrolle, der experimentellen Variation, der Beobachtung und Messung zugänglich sind, wie Volumen, Druck, Temperatur des Gases. Das sind aber Grössen, welche zwar von der Bewegung der Moleküle abhängig gedacht werden können, und umgekehrt wieder diese Bewegungen bestimmen, jedoch nicht in der Art, dass sie durch Ort und Geschwindigkeit eines jeden einzelnen Moleküles gegeben wären. Wollen wir also eine naturgemässe Darstellung solcher „physikalischer" Bewegungssysteme erreichen, so müssen wir uns an derartige „beobachtbare Bestimmungsstücke" halten.

Dies gilt in ganz besonderem Maasse von den hier zu behandelnden Erscheinungen, bei denen die durch ponderomotorische Kräfte bewegten sicht- und greifbaren Feldträger nur einen Teil der bewegten Körper bilden, und wir zur Erklärung „verborgene Massen" heranziehen müssen. Ja, Hertz geht noch weiter und behauptet: dass Gleiches ganz allgemein gelte sogar für das Gebiet der reinen Mechanik, in dem man seither lediglich mit den direkt zugänglichen Massen vollständig auszukommen vermeinte. Er sagt (p. 30 der Prinzipien der Mechanik):

„Versuchen wir die Bewegungen der uns umgebenden Körper zu verstehen und auf einfache und durchsichtige Regeln zurückzuführen, indem wir aber nur dasjenige berücksichtigen, was wir unmittelbar vor Augen haben, so schlägt unser Versuch im allgemeinen fehl. Wir werden bald gewahr, dass die Gesamtheit dessen, was wir sehen und greifen können, noch keine gesetzmässige Welt bildet, in welcher gleiche Zustände stets gleiche Folgen haben. Wir überzeugen uns, dass die Mannigfaltigkeit der wirklichen Welt grösser sein muss, als die Mannigfaltigkeit der Welt, welche sich unseren Sinnen unmittelbar offenbart. Wollen wir ein abgerundetes, in sich geschlossenes, gesetzmässiges Weltbild erhalten, so müssen wir hinter den Dingen, welche wir sehen, noch andere, unsichtbare Dinge vermuten, hinter den Schranken unserer Sinne noch heimliche Mitspieler suchen."

Wir wollen irgend eine der Beobachtung und Messung zugängliche Grösse, welche den Zustand eines Systems bestimmt oder mitbestimmt, ohne auf die besondere Natur der ins Spiel tretenden Massen Rücksicht zu nehmen, einen „Zustandsparameter oder eine allgemeine Koordinate", eine „Lagrangesche Koordinate", im Gegensatz zu der ein bestimmtes Bezugssystem voraussetzenden „Cartesischen Koordinate" nennen.

So war bei dem einfachen Monocykel, § 137, die Bogenentfernung des Antriebspunktes von der nach oben gerichteten Vertikalen eine den Zustand des Systems vollkommen bestimmende solche Koordinate. Durch eine gleiche Koordinate dachten wir uns aber auch den Zustand eines beliebig gekoppelten Cykels,

§ 141, oder den des monocyklischen Mechanismus eines Stromfeldes, § 267, dargestellt. Bei einem Gase haben wir Volumen, Druck und Temperatur, bei einem elektrischen Strom ausser der (cyklischen) Intensität die die Lage und Gestalt des Leiters und den magnetischen Feldzustand bestimmenden Grössen als solche allgemeine Koordinaten aufzufassen.

Diese brauchen also durchaus nicht immer Raumabmessungen zu sein; die rechtwinkeligen „Cartesischen" Koordinaten sind ein spezieller Fall der LAGRANGEschen Koordinaten; sie bestimmen den Zustand (Lage und Geschwindigkeit) eines einzelnen Massenpunktes.

Wir bezeichnen eine allgemeine Koordinate wie bisher mit p. Ausser in speziellen Fällen werden zur vollständigen Charakterisierung eines Systems immer mehrere, z. B. r solche Parameter nötig sein. Wir wollen einen beliebigen derselben durch den allgemeinen Index ϱ hervorheben, so dass

$$p_\varrho,\ \varrho = 1,\ 2, \cdots,\ \varrho, \cdots\ r$$

die r-LAGRANGEschen Koordinaten des Systems sein sollen.

Die Ableitung einer solchen Koordinate p nach der Zeit t, ihre Änderungsgeschwindigkeit, oder kurz die „allgemeine Geschwindigkeit", soll mit q bezeichnet werden.

Da wir solche Zeitableitungen im folgenden häufig einzuführen haben werden, wollen wir sie durch einen übergesetzten Punkt bezeichnen (NEWTONS Bezeichnungsweise), so dass also $\dot{x}$ den Quotienten dx/dt bedeutet und

$$\frac{dp_\varrho}{dt} = \dot{p}_\varrho = q_\varrho \text{ und } dp_\varrho = q_\varrho\, dt$$

ist. Dabei sind, im allgemeinen wenigstens, sowohl die p von q und umgekehrt, als auch die p und die q untereinander unabhängig.

Wir hatten schon in § 144 Parameter p und ihre Ableitungen q eingeführt, aber mit der beschränkenden Bedingung, dass sie langsam veränderliche Grössen sein sollten; diese Bedingung wollen wir unseren Grössen p und q jetzt zunächst noch nicht, sondern erst im folgenden Kapitel auferlegen. Damit unsere Betrachtungen von vornherein möglichst allgemein seien, werde hier nichts über die Variabilität der Systemparameter vorausgesetzt.

A) Ausdrücke für die Energie.

Es wird uns zunächst obliegen, den Ausdruck für den Energieinhalt eines Systems, dessen Zustand durch allgemeine Parameter beschrieben ist, zu bestimmen. Um von Bekannterem auszugehen, knüpfen wir an die Punktmechanik und rechtwinkelige Koordinaten an. Wir gewinnen dadurch zugleich die Möglichkeit, wichtige Sätze, welche wir über die allgemeine Energieform ableiten wollen, zunächst an einem einfachen Falle erläutern zu können.

358. Ausdruck für die kinetische Energie in cartesischen Koordinaten. — Ein materielles System bestehe aus n Massenpunkten m_h, $h = 1, 2, 3, \ldots, h, \ldots, n$, welche sich zur Zeit t an den Orten x_h, y_h, z_h befinden. Die Komponenten der Geschwindigkeiten der einzelnen Massen nach den drei Koordinatenrichtungen sind dann $\dot{x}_h$, $\dot{y}_h$, $\dot{z}_h$.

Ausser den Geschwindigkeiten wollen wir in unsere Betrachtungen die sog. Momente einführen, das sind die Produkte der Massen in ihre Geschwindigkeiten multipliziert; die Momente der Masse m_h sind also

$$u_h = m_h \dot{x}_h, \quad v_h = m_h \dot{y}_h, \quad w_h = m_h \dot{z}_h.$$

Sowohl die Geschwindigkeiten wie die ihnen proportionalen Momente sind untereinander unabhängig.

Die kinetische Energie des Systems ist dann je nachdem die einen oder anderen Grössen eingeführt werden:

$$L_{\text{Geschw}} = \frac{1}{2} \sum_1^n m_h (\dot{x}_h^2 + \dot{y}_h^2 + \dot{z}_h^2) \quad \ldots\ldots \quad 156)$$

oder

$$L_{\text{Mom}} = \frac{1}{2} \sum_1^n \frac{1}{m_h} (u_h^2 + v_h^2 + w_h^2). \quad \ldots\ldots \quad 157)$$

Man nennt solche Funktionen, welche sämtliche Grössen, von denen sie abhängen, hier alle $\dot{x}_h$, $\dot{y}_h$, $\dot{z}_h$ oder alle u_h, v_h, w_h, in derselben Potenz, bei uns der zweiten, enthalten, „homogene Funktionen". Die kinetische Energie ist eine homogene Funktion II. Grades der Geschwindigkeiten oder der Momente.

Für die beiden Ausdrücke der kinetischen Energie gelten nun augenscheinlich die folgenden Differentialausdrücke:

$$\frac{\partial L_{\text{Geschw}}}{\partial \dot{x}_h} = m_h \dot{x}_h = u_h \quad \ldots\ldots \quad 158)$$

$$\frac{\partial L_{\text{Mom}}}{\partial u_h} = \frac{u_h}{m_h} = \dot{x}_h \quad \ldots\ldots \quad 159)$$

Die Ableitung der durch die Geschwindigkeiten ausgedrückten kinetischen Energie nach irgend einer Geschwindigkeitskomponente liefert das entsprechende Moment; und umgekehrt ist die nach einem Momente genommene Ableitung des Ausdruckes in den Momenten gleich der entsprechenden Geschwindigkeitskomponente.

Bildet man die Gleichungen 158) für alle Geschwindigkeitskomponenten und multipliziert jede mit der Komponente, nach welcher

differenziert wurde, so giebt die Addition der Glieder rechts von der Form $\dot{x}_h u_h = m \dot{x}_h^2$ das Doppelte der kinetischen Energie wieder, so dass

$$\sum_1^n \left(\dot{x}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_h} + \dot{y}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_h} + \dot{z}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_h} \right) = 2L \quad . \quad . \quad . \quad 160)$$

ist; ebenso findet man:

$$\sum_1^n \left(u_h \frac{\partial L}{\partial u_h} + v_h \frac{\partial L}{\partial v_h} + w_h \frac{\partial L}{\partial w_h} \right) = 2L \quad . \quad . \quad . \quad 161)$$

Diese Sätze sind spezielle Formen des Eulerschen Satzes über homogene Funktionen.

Die einzigen Parameter, welche der Ausdruck L enthält, sind die n Massenparameter m_h. Auch sie sind als voneinander unabhängig zu betrachten. Differenziert man daher nach irgend einem derselben, so erhält man:

$$\frac{\partial L_{\text{Geschw}}}{\partial m_h} = \frac{1}{2} (\dot{x}_h^2 + \dot{y}_h^2 + \dot{z}_h^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 162)$$

$$\frac{\partial L_{\text{Mom}}}{\partial m_h} = -\frac{1}{2} \frac{1}{m_h^2} (u_h^2 + v_h^2 + w_h^2) \quad . \quad . \quad . \quad 163)$$

Die Ausdrücke rechts sind aber mit Rücksicht auf die Bedeutung der Momente bis auf das Vorzeichen einander gleich, es ist also

$$\frac{\partial L_{\text{Geschw}}}{\partial m_h} = -\frac{\partial L_{\text{Mom}}}{\partial m_h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 164)$$

Diese Sätze und Formeln, welche sich hier ganz unmittelbar ergeben, wollen wir jetzt auch für den Fall allgemeiner Koordinaten ableiten.

359. Einführung allgemeiner Koordinaten. — Soll durch die r voneinander unabhängigen Parameter

$$p_1, p_2, p_3 \cdots, p_\varrho, \cdots, p_r$$

§ 357 ein materielles System vollkommen bestimmt sein, so muss für jeden Zeitmoment t der Ort (x_h, y_h, z_h) eines jeden Bestandteiles m_h des Systemes durch die r Grössen p eindeutig angebbar sein, etwa derart, dass die Ortskoordinaten x_h, y_h, z_h als eindeutige Funktionswerte der Parameter p gegeben sind:

$$\left.\begin{aligned} x_h &= f_h(p_1, p_2, p_3, \cdot\cdot, p_\varrho, \cdot\cdot, p_r) \\ y_h &= g_h(p_1, p_2, p_3, \cdot\cdot, p_\varrho, \cdot\cdot, p_r) \\ z_h &= h_h(p_1, p_2, p_3, \cdot\cdot, p_\varrho, \cdot\cdot, p_r) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 165)$$

Hierbei sind die $x\ y\ z$ insofern auch Funktionen der Zeit t, als

die Parameter p Funktionen dieser Grösse sind. Alle p sind zunächst und im allgemeinen immer als voneinander völlig unabhängig zu betrachten.

Die Geschwindigkeitskomponenten in Bezug auf drei zu einander senkrechte Koordinatenachsen sind dann für jeden Augenblick durch Ausdrücke von der Form gegeben:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_h &= \frac{\partial f_h}{\partial p_1}\cdot q_1 + \frac{\partial f_h}{\partial p_2}\cdot q_2 + \cdots + \frac{\partial f_h}{\partial p_\varrho}\cdot q_\varrho + \cdots + \frac{\partial f_h}{\partial p_r}\cdot q_r \\ \dot{y}_h &= \frac{\partial g_h}{\partial p_1}\cdot q_1 + \frac{\partial g_h}{\partial p_2}\cdot q_2 + \cdots + \frac{\partial g_h}{\partial p_\varrho}\cdot q_\varrho + \cdots + \frac{\partial g_h}{\partial p_r}\cdot q_r \\ \dot{z}_h &= \frac{\partial h_h}{\partial p_1}\cdot q_1 + \frac{\partial h_h}{\partial p_2}\cdot q_2 + \cdots + \frac{\partial h_h}{\partial p_\varrho}\cdot q_\varrho + \cdots + \frac{\partial h_h}{\partial p_r}\cdot q_r \end{aligned}\right\} \quad 166)$$

Diese Geschwindigkeitskomponenten sind also lineare homogene Ausdrücke in den q. Dabei sind die $\frac{\partial f}{\partial p}$, $\frac{\partial g}{\partial p}$, $\frac{\partial h}{\partial p}$ nur Funktionen der p. Wir wollen sie mit α, β, γ bezeichnen, so dass ist:

$$\frac{\partial f_h}{\partial p_\varrho} = \alpha_{h\varrho},\quad \frac{\partial g_h}{\partial p_\varrho} = \beta_{h\varrho},\quad \frac{\partial h_h}{\partial p_\varrho} = \gamma_{h\varrho}. \quad 167)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_h &= \alpha_{h1}\cdot q_1 + \alpha_{h2}\cdot q_2 + \cdots + \alpha_{h\varrho}\cdot q_\varrho + \cdots + \alpha_{hr}\cdot q_r \\ \dot{y}_h &= \beta_{h1}\cdot q_1 + \beta_{h2}\cdot q_2 + \cdots + \beta_{h\varrho}\cdot q_\varrho + \cdots + \beta_{hr}\cdot q_r \\ \dot{z}_h &= \gamma_{h1}\cdot q_1 + \gamma_{h2}\cdot q_2 + \cdots + \gamma_{h\varrho}\cdot q_\varrho + \cdots + \gamma_{hr}\cdot q_r \end{aligned}\right\} \quad 168)$$

Die Geschwindigkeitskomponenten im cartesischen System sind also homogene lineare Funktionen der verallgemeinerten Geschwindigkeiten q.

Nicht jedes x u. s. w. braucht alle Parameter p zu enthalten. Im Gegenteil wird mit einem bestimmten Parameter meist nur eine gewisse Anzahl von Massenpunkten derart verknüpft sein, dass sich die x, y, z aller dieser Massen ändern, wenn sich das betreffende p ändert. Nur in den x_h, y_h, z_h dieser Massen m_h kommt dann das betreffende p, z. B. p_ϱ vor, und bei der Differenzierung der cartesischen Koordinaten nach den Lagrangeschen (bei der Bildung der α) geben nur diese Differentiationen von 0 verschiedene Werte.

Wir machen schon hier auf einige sehr wichtige, später zu benutzende Relationen aufmerksam. Da die q von den p völlig unabhängig sind, so erhält man bei einer Differentiation einer der Gleichungen 168) nach einem bestimmten q immer nur das eine in dieses multiplizierte Glied; so ist z. B. nach 168) und 167)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_h}{\partial q_\varrho} &= \alpha_{h\varrho} = \frac{\partial f_h}{\partial p_\varrho} = \frac{\partial x_h}{\partial p_\varrho} \\ \frac{\partial \dot{y}_h}{\partial q_\varrho} &= \beta_{h\varrho} = \frac{\partial g_h}{\partial p_\varrho} = \frac{\partial y_h}{\partial p_\varrho} \\ \frac{\partial \dot{z}_h}{\partial q_\varrho} &= \gamma_{h\varrho} = \frac{\partial h_h}{\partial p_\varrho} = \frac{\partial z_h}{\partial p_\varrho} \end{aligned}\right\} \quad 169)$$

360. Ausdruck für die Energie in allgemeinen Koordinaten. — Setzt man die Werte für die rechtwinkligen Komponenten $\dot{x}_h$, $\dot{y}_h$, $\dot{z}_h$ 168) der Geschwindigkeiten in den allgemeinen Ausdruck für die kinetische Energie eines Systems 156) ein, so erhält man einen Ausdruck von der Form:

$$
\left.\begin{aligned}
L = \tfrac{1}{2}\,[\; & m_1(\alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \cdots + \alpha_{1\varrho}q_\varrho + \cdots + \alpha_{1r}q_r)^2 \\
& + m_1(\beta_{11}q_1 + \beta_{12}q_2 + \cdots + \beta_{1\varrho}q_\varrho + \cdots + \beta_{1r}q_r)^2 \\
& + m_1(\gamma_{11}q_1 + \gamma_{12}q_2 + \cdots + \gamma_{1\varrho}q_\varrho + \cdots + \gamma_{1r}q_r)^2 \\
& \\
& + m_2(\alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \cdots + \alpha_{2\varrho}q_\varrho + \cdots + \alpha_{2r}q_r)^2 \\
& + m_2(\beta_{21}q_1 + \beta_{22}q_2 + \cdots + \beta_{2\varrho}q_\varrho + \cdots + \beta_{2r}q_r)^2 \\
& + m_2(\gamma_{21}q_1 + \gamma_{22}q_2 + \cdots + \gamma_{2\varrho}q_\varrho + \cdots + \gamma_{2r}q_r)^2 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + m_h(\alpha_{h1}q_1 + \alpha_{h2}q_2 + \cdots + \alpha_{h\varrho}q_\varrho + \cdots + \alpha_{hr}q_r)^2 \\
& + m_h(\beta_{h1}q_1 + \beta_{h2}q_2 + \cdots + \beta_{h\varrho}q_\varrho + \cdots + \beta_{hr}q_r)^2 \\
& + m_h(\gamma_{h1}q_1 + \gamma_{h2}q_2 + \cdots + \gamma_{h\varrho}q_\varrho + \cdots + \gamma_{hr}q_r)^2 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + m_n(\alpha_{n1}q_1 + \alpha_{n2}q_2 + \cdots + \alpha_{n\varrho}q_\varrho + \cdots + \alpha_{nr}q_r)^2 \\
& + m_n(\beta_{n1}q_1 + \beta_{n2}q_2 + \cdots + \beta_{n\varrho}q_\varrho + \cdots + \beta_{nr}q_r)^2 \\
& + m_n(\gamma_{n1}q_1 + \gamma_{n2}q_2 + \cdots + \gamma_{n\varrho}q_\varrho + \cdots + \gamma_{nr}q_r)^2\,]
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \; 170)
$$

Derselbe stellt augenscheinlich eine homogene Funktion II. Grades in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten q dar. Führt man die Quadrierungen aus, so erhält man nach dem Ordnen der Glieder eine Form:

$$
\left.\begin{aligned}
L_q = \tfrac{1}{2}\,[\; & A_{11}q_1q_1 + A_{12}q_1q_2 + \cdots + A_{1\varrho}q_1q_\varrho + \cdots + A_{1r}q_1q_r \\
& + A_{21}q_2q_1 + A_{22}q_2q_2 + \cdots + A_{2\varrho}q_2q_\varrho + \cdots + A_{2r}q_2q_r \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + A_{\sigma 1}q_\sigma q_1 + A_{\sigma 2}q_\sigma q_2 + \cdots + A_{\sigma\varrho}q_\sigma q_\varrho + \cdots + A_{\sigma r}q_\sigma q_r \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + A_{r1}q_rq_1 + A_{r2}q_rq_2 + \cdots + A_{r\varrho}q_rq_\varrho + \cdots + A_{rr}q_rq_r\,]
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \; 171)
$$

bei der das eben Gesagte noch deutlicher hervortritt Hierin haben die Koeffizienten A die Bedeutung:

$$
\left.\begin{aligned}
& A_{11} = m_1(\alpha_{11}\alpha_{11} + \beta_{11}\beta_{11} + \gamma_{11}\gamma_{11}) + m_2(\alpha_{21}\alpha_{21} + \beta_{21}\beta_{21} + \gamma_{21}\gamma_{21}) \\
& \cdots + m_h(\alpha_{h1}\alpha_{h1} + \beta_{h1}\beta_{h1} + \gamma_{h1}\gamma_{h1}) + \cdots + m_n(\alpha_{n1}\alpha_{n1} + \beta_{n1}\beta_{n1} + \gamma_{n1}\gamma_{n1}) \\
& A_{12} = m_1(\alpha_{11}\alpha_{12} + \beta_{11}\beta_{12} + \gamma_{11}\gamma_{12}) + m_2(\alpha_{21}\alpha_{22} + \beta_{21}\beta_{22} + \gamma_{21}\gamma_{22}) \\
& \cdots + m_h(\alpha_{h1}\alpha_{h2} + \beta_{h1}\beta_{h2} + \gamma_{h1}\gamma_{h2}) + \cdots + m_n(\alpha_{n1}\alpha_{n2} + \beta_{n1}\beta_{n2} + \gamma_{n1}\gamma_{n2}) \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad 172)
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
A_{1\varrho} = m_1(\alpha_{11}\alpha_{1\varrho} + \beta_{11}\beta_{1\varrho} + \gamma_{11}\gamma_{1\varrho}) + m_2(\alpha_{21}\alpha_{2\varrho} + \beta_{21}\beta_{2\varrho} + \gamma_{21}\gamma_{2\varrho}) \\
\cdots + m_h(\alpha_{h1}\alpha_{h\varrho} + \beta_{h1}\beta_{h\varrho} + \gamma_{h1}\gamma_{h\varrho}) + \cdots + m_n(\alpha_{n1}\alpha_{n\varrho} + \beta_{n1}\beta_{n\varrho} + \gamma_{n1}\gamma_{n\varrho}) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_{21} = m_1(\alpha_{12}\alpha_{11} + \beta_{12}\beta_{11} + \gamma_{12}\gamma_{11}) + m_2(\alpha_{22}\alpha_{21} + \beta_{22}\beta_{21} + \gamma_{22}\gamma_{21}) \\
\cdots + m_h(\alpha_{h2}\alpha_{h1} + \beta_{h2}\alpha_{h1} + \gamma_{h2}\gamma_{h1}) + \cdots + m_n(\alpha_{n2}\alpha_{n1} + \beta_{n2}\beta_{n1} + \gamma_{n2}\gamma_{n1}) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_{\sigma 1} = m_1(\alpha_{1\sigma}\alpha_{11} + \beta_{1\sigma}\beta_{11} + \gamma_{1\sigma}\gamma_{11}) + m_2(\alpha_{2\sigma}\alpha_{21} + \beta_{2\sigma}\beta_{21} + \gamma_{2\sigma}\gamma_{21}) \\
\cdots + m_h(\alpha_{h\sigma}\alpha_{h1} + \beta_{h\sigma}\beta_{h1} + \gamma_{h\sigma}\gamma_{h1}) + \cdots + m_n(\alpha_{n\sigma}\alpha_{n1} + \beta_{n\sigma}\beta_{n1} + \gamma_{n\sigma}\gamma_{n1}) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_{\sigma\varrho} = m_1(\alpha_{1\sigma}\alpha_{1\varrho} + \beta_{1\sigma}\beta_{1\varrho} + \gamma_{1\sigma}\gamma_{1\varrho}) + m_2(\alpha_{2\sigma}\alpha_{2\varrho} + \beta_{2\sigma}\beta_{2\varrho} + \gamma_{2\sigma}\gamma_{2\varrho}) \\
\cdots + m_h(\alpha_{h\sigma}\alpha_{h\varrho} + \beta_{h\sigma}\beta_{h\varrho} + \gamma_{h\sigma}\gamma_{h\varrho}) + \cdots + m_n(\alpha_{n\sigma}\alpha_{n\varrho} + \beta_{n\sigma}\beta_{n\varrho} + \gamma_{n\sigma}\gamma_{n\varrho})
\end{array}\right\} \quad 172)
$$

Dem Buchstaben L wurde der Index q beigefügt, um auszudrücken, dass die kinetische Energie L in den (verallgemeinerten) Geschwindigkeiten q ausgedrückt ist, vergl. § 358. Die Koeffizienten A enthalten die Massen m und die Funktionen α, β, γ. Da diese Funktionen der Parameter p sind, so sind dies auch die Faktoren A. Diese A enthalten aber nicht mehr die Geschwindigkeiten q. Von der Zeit t sind sie insofern abhängig, als die p Funktionen der Zeit sind. Ausserdem lassen die Klammerausdrücke in 172) ohne weiteres noch folgende Eigenschaften dieser Parameterfunktionen A erkennen: Die A mit gleichen Indices A_{11}, A_{22}, ... A_{rr} sind als Summen von lauter Quadraten reeller Grössen stets positive Grössen. Ferner sind die Koeffizienten $A_{12} = A_{21}$, $A_{13} = A_{31}$, allgemein

$$A_{\varrho\sigma} = A_{\sigma\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 173)$$

Denn wenn man in dem ersten A die Indices miteinander vertauscht, stehen dieselben Faktoren α, β und γ nur in umgekehrter Reihenfolge nebeneinander, der Wert ihres Produktes bleibt ungeändert.

361. Einführung der verallgemeinerten Momente. — Wir lernten in § 358 Formeln 158) und 159) eine eigentümliche Eigenschaft der Momente kennen, dass sie nämlich als Ableitungen der Energie nach den Geschwindigkeiten erscheinen. Da wir hier die verallgemeinerten Momente nicht wie in § 358 als Produkte der Massen mit den allgemeinen Geschwindigkeiten einführen können (diese letzteren zeichnen ja gar nicht mehr besondere Massen aus), so steht es uns frei, bei den verallgemeinerten Betrachtungen, die wir hier anstellen, die Momente durch irgend eine Eigenschaft des Systems einzuführen. Wir wählen die genannte und definieren die verallgemeinerten Momente — wir

nennen sie s — als die Ableitungen der kinetischen Energie L_q nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten q:

$$s = \frac{\partial L_q}{\partial q} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 174)$$

Im speziellen haben wir also entsprechend den r voneinander unabhängigen Grössen q mit Rücksicht auf 173) die r voneinander unabhängigen Definitionsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L_q}{\partial q_1} &= s_1 = A_{11} q_1 + A_{12} q_2 + \cdots + A_{1\varrho} q_\varrho + \cdots + A_{1r} q_r \\
\frac{\partial L_q}{\partial q_2} &= s_2 = A_{21} q_1 + A_{22} q_2 + \cdots + A_{2\varrho} q_\varrho + \cdots + A_{2r} q_r \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial L_q}{\partial q_\sigma} &= s_\sigma = A_{\sigma 1} q_1 + A_{\sigma 2} q_2 + \cdots + A_{\sigma\varrho} q_\varrho + \cdots + A_{\sigma r} q_r \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial L_q}{\partial q_r} &= s_r = A_{r1} q_1 + A_{r2} q_2 + \cdots + A_{r\varrho} q_\varrho + \cdots + A_{rr} q_r
\end{aligned}\right\} \quad 175)$$

Die r Momente s sind also homogene lineare Funktionen der r Geschwindigkeiten q. Ferner sind sie Funktionen der r Parameter p, welche in den Koeffizienten A enthalten sind. Auch sie sind im allgemeinen voneinander unabhängig.

362. Der Eulersche Satz. — Multiplizieren wir die einzelnen Gleichungen des Systems 175) der Reihe nach mit $q_1, q_2, \ldots, q_\sigma, \ldots, q_r$ und addieren alles, so erhalten wir links:

$$q_1 s_1 + q_2 s_2 + \cdots + q_\sigma s_\sigma + \cdots + q_r s_r$$
$$= \sum_1^r{}^\sigma q_\sigma s_\sigma = \sum_1^r{}^\sigma q_\sigma \frac{\partial L_q}{\partial q_\sigma}.$$

Rechter Hand wird offenbar der Ausdruck in der eckigen Klammer der Gleichung 171) erhalten, also L_q ohne den Faktor $\frac{1}{2}$ oder $2 L_q$, so dass wir haben:

$$\sum_1^r{}^\sigma q_\sigma s_\sigma = \sum_1^r{}^\sigma q_\sigma \frac{\partial L_q}{\partial q_\sigma} = 2 L_q \quad \ldots \ldots \quad 176)$$

Dies ist die Verallgemeinerung der Formel 160), welche sich als Anwendung des Eulerschen Satzes über homogene Funktionen auf unsere homogene Funktion L vom II. Grade darstellte.

363. Ausdruck für die Energie in verallgemeinerten Momenten. — Das Gleichungssystem 175) liefert uns die Möglichkeit, die q und

damit die kinetische Energie L selbst als Funktion der Momente s darzustellen. Wir haben dazu nur diese r Gleichungen 175) nach den r Grössen q aufzulösen. Dazu bedürfen wir einiger einfacher Sätze aus der Lehre von den Determinanten, die wir hier als bekannt voraussetzen. Bezeichnen wir die (im allgemeinen nicht verschwindende) Determinante aus den r^2 Koeffizienten A mit Δ, also den Ausdruck

$$\Delta = \begin{Vmatrix} A_{11} A_{12} \cdots A_{1\varrho} \cdots A_{1r} \\ A_{21} A_{22} \cdots A_{2\varrho} \cdots A_{2r} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{\sigma 1} A_{\sigma 2} \cdots A_{\sigma\varrho} \cdots A_{\sigma r} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{r1} A_{r2} \cdots A_{r\varrho} \cdots A_{rr} \end{Vmatrix} \quad \ldots\ldots 177)$$

so können wir bekanntlich die r unbekannten Grössen q in der Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= B_{11} s_1 + B_{12} s_2 + \cdots + B_{1\varrho} s_\varrho + \cdots + B_{1r} s_r \\ q_2 &= B_{21} s_1 + B_{22} s_2 + \cdots + B_{2\varrho} s_\varrho + \cdots + B_{2r} s_r \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_\sigma &= B_{\sigma 1} s_1 + B_{\sigma 2} s_2 + \cdots + B_{\sigma\varrho} s_\varrho + \cdots + B_{\sigma r} s_r \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_r &= B_{r1} s_1 + B_{r2} s_2 + \cdots + B_{r\varrho} s_\varrho + \cdots + B_{rr} s_r \end{aligned}\right\} \quad . \quad 178)$$

wo die B die durch Δ dividierten Unterdeterminanten der entsprechenden A sind, also die Werte haben:

$$\left.\begin{aligned} &B_{11} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial A_{11}},\ B_{12} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial A_{12}},\ \cdots B_{1\varrho} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial A_{1\varrho}},\ \cdot\cdot \\ &B_{21} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial A_{21}},\ B_{22} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial A_{22}},\ \cdots B_{2\varrho} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial A_{2\varrho}},\ \cdot\cdot \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &B_{\sigma 1} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial A_{\sigma 1}},\ B_{\sigma 2} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial A_{\sigma 2}},\ \cdots B_{\sigma\varrho} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial A_{\sigma\varrho}},\ \cdot\cdot \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &B_{r1} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial A_{r1}},\ B_{r2} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial A_{r2}},\ \cdots B_{r\varrho} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial A_{r\varrho}},\ \cdot\cdot \end{aligned}\right\} \quad . \quad 179)$$

wobei wieder $B_{\varrho\sigma} = B_{\sigma\varrho}$ ist.

Die Geschwindigkeiten q sind also lineare homogene Funktionen der Momente s. Die Koeffizienten B sind Funktionen der Parameter p.

Multiplizieren wir die einzelnen Gleichungen des Systems 178) der Reihe nach mit $s_1, s_2, \ldots, s_\sigma, \ldots, s_r$, so erhält man bei der Addition aller Gleichungen links nach 176) den Wert $2L$, rechts einen Ausdruck, welcher ausser den B nur noch die s enthält. Er ist homogen vom II. Grade in den Momenten s, wir haben also die kinetische Energie L durch die Momente s ausgedrückt.

Dieser Ausdruck für L, der mit L_s zu bezeichnen ist, vergl. § 358, Formel 157) und § 360, Formel 171) hat also die Form:

$$\left.\begin{aligned} L_s = \tfrac{1}{2}[\, & B_{11}\, s_1 s_1 + B_{12}\, s_1 s_2 + \cdots + B_{1\varrho}\, s_1 s_\varrho + \cdots + B_{1r}\, s_1 s_r \\ & + B_{21}\, s_2 s_1 + B_{22}\, s_2 s_2 + \cdots + B_{2\varrho}\, s_2 s_\varrho + \cdots + B_{2r}\, s_2 s_r \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + B_{\sigma 1}\, s_\sigma s_1 + B_{\sigma 2}\, s_\sigma s_2 + \cdots + B_{\sigma\varrho}\, s_\sigma s_\varrho + \cdots + B_{\sigma r}\, s_\sigma s_r \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + B_{r1}\, s_r s_1 + B_{r2}\, s_r s_2 + \cdots + B_{r\varrho}\, s_r s_\varrho + \cdots + B_{rr}\, s_r s_r\,] \end{aligned}\right\} . \quad 180)$$

Durch Differentiation nach den einzelnen s erhält man wieder homogene lineare Ausdrücke in den Momenten, welche sich bei dem Vergleiche mit den Formeln 178) als identisch mit den einzelnen q erweisen. Dem Gleichungssystem 175) entsprechend erhält man also:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L_s}{\partial s_1} = q_1 &= B_{11}\, s_1 + B_{12}\, s_2 + \cdots + B_{1\varrho}\, s_\varrho + \cdots + B_{1r}\, s_r \\ \frac{\partial L_s}{\partial s_2} = q_2 &= B_{21}\, s_1 + B_{22}\, s_2 + \cdots + B_{2\varrho}\, s_\varrho + \cdots + B_{2r}\, s_r \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial L_s}{\partial s_\sigma} = q_\sigma &= B_{\sigma 1}\, s_1 + B_{\sigma 2}\, s_2 + \cdots + B_{\sigma\varrho}\, s_\varrho + \cdots + B_{\sigma r}\, s_r \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial L_s}{\partial s_r} = q_r &= B_{r1}\, s_1 + B_{r2}\, s_2 + \cdots + B_{r\varrho}\, s_\varrho + \cdots + B_{rr}\, s_r \end{aligned}\right\} . \quad 181)$$

Durch Multiplizieren der Reihe nach mit $s_1, s_2, \ldots, s_\sigma, \ldots, s_r$ und Addieren erhält man wieder

$$\sum_1^r{}_\sigma\, q_\sigma\, s_\sigma = \sum_1^r{}_\sigma\, s_\sigma \frac{\partial L_s}{\partial s_\sigma} = 2\, L_s$$

den Eulerschen Satz.

364. Beziehungen der Koeffizienten A und B zu einander. — Da die B die (noch durch Δ dividierten) Unterdeterminanten der A sind, § 363, so gilt für sie der Determinantensatz: Multipliziert man die A einer, z. B. der σ ten Horizontalreihe mit den B einer anderen, z. B. der $\varkappa$ ten Horizontalreihe, so ist die Summe aller der entstehenden Produkte immer gleich Null, wenn σ und $\varkappa$ verschieden sind, und nur von 0 verschieden, nämlich gleich 1, wenn $\sigma = \varkappa$ ist:

$$\left.\begin{aligned} M_{\sigma\varkappa} &= A_{\sigma 1} B_{\varkappa 1} + A_{\sigma 2} B_{\varkappa 2} + \cdots + A_{\sigma\varrho} B_{\varkappa\varrho} + \cdots + A_{\sigma r} B_{\varkappa r} \\ &= \sum_1^r{}_\varrho A_{\sigma\varrho} B_{\varkappa\varrho} = \begin{cases} 0 \text{ für } \sigma \neq \varkappa \\ 1 \text{ für } \sigma = \varkappa \end{cases} \end{aligned}\right\} . \quad 182)$$

Da $B_{\varkappa\varrho} = B_{\varrho\varkappa}$, so gilt Gleiches auch für

$$M_{\sigma\varkappa} = \sum_1^r{}_\varrho A_{\sigma\varrho} B_{\varrho\varkappa}.$$

Bildet man also die r-Grössen $M_{\sigma\varkappa}$ für $\sigma = 1, 2, \ldots, \sigma, \ldots, r$, multipliziert jede mit $B_{\sigma\iota}$ und addiert sie sämtlich, so wird nur dasjenige M, bei dem $\sigma = \varkappa$ ist, einen von 0 verschiedenen Wert (nämlich den Wert 1) aufweisen, die Gesamtsumme ist also gleich $B_{\varkappa\iota} = B_{\iota\varkappa}$:

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^r{}_\sigma M_{\sigma\varkappa} \cdot B_{\sigma\iota} &= \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\varrho A_{\sigma\varrho} B_{\varrho\varkappa} B_{\sigma\iota} \\ &= \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\varrho A_{\sigma\varrho} B_{\sigma\iota} B_{\varrho\varkappa} = B_{\iota\varkappa} \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \quad 183)$$

Gleiches wie für die Summen von Produkten der Glieder je zweier Horizontalreihen gilt auch für die entsprechenden Grössen je zweier Kolonnen; führen wir z. B. in dem letzten Ausdruck zunächst die Summation nach den σ entsprechenden Indices durch, so verschwinden die Summen aller Produkte, bei denen ϱ und ι verschieden sind, und nur, wenn die Glieder einer Kolonne der A mit den Gliedern derselben Kolonne der B multipliziert werden, d. h. $\varrho = \iota$ ist, hat die entsprechende Summe den Wert 1. Die Doppelsumme reduziert sich also auf $B_{\iota\varkappa}$ wie vorhin.

Wir wollen jedes Glied der letzten Doppelsumme nach irgend einem Parameter, z. B. p_i differenzieren. Da jedes Glied aus drei Faktoren besteht, werden wir drei Doppelsummen erhalten:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\varrho A_{\sigma\varrho} B_{\sigma\iota} \frac{\partial B_{\varrho\varkappa}}{\partial p_i} + \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\varrho A_{\sigma\varrho} B_{\varrho\varkappa} \frac{\partial B_{\sigma\iota}}{\partial p_i} \\ &+ \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\varrho B_{\sigma\iota} B_{\varrho\varkappa} \frac{\partial A_{\sigma\varrho}}{\partial p_i} = \frac{\partial B_{\iota\varkappa}}{\partial p_i} \end{aligned}\right\} \quad . \quad 184)$$

Führen wir bei der ersten Doppelsumme zuerst die Summation nach σ aus, wobei sich $\partial B_{\varrho\varkappa}/\partial p_i$ als gemeinsamer Faktor beteiligt, so verschwinden alle Summen $\sum_1^r{}_\sigma A_{\sigma\varrho} B_{\sigma\iota}$ mit Ausnahme der einen, bei der ϱ den speziellen Wert ι hat. Damit ist nun aber auch schon die zweite Summation erledigt, und die ganze Doppelsumme reduziert sich auf $\frac{\partial B_{\iota\varkappa}}{\partial p_i}$ (alle anderen Glieder sind in 0 multipliziert). Analog giebt die zweite Doppelsumme, bei der man mit der Summation nach ϱ beginnt, nur ein Glied, bei dem σ den speziellen Wert $\varkappa$ hat, also $\partial B_{\varkappa\iota}/\partial p_i$, oder wiederum $\frac{\partial B_{\iota\varkappa}}{\partial p_i}$, so dass schliesslich

$$\sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\varrho B_{\sigma\iota} B_{\varrho\varkappa} \frac{\partial A_{\sigma\varrho}}{\partial p_i} = -\frac{\partial B_{\iota\varkappa}}{\partial p_i} \quad \ldots \quad 185)$$

erhalten wird. Von dieser eigentümlichen Beziehung werden wir sogleich Gebrauch machen.

365. Beziehung der Ableitungen der Energie nach den Parametern. — Sowohl die A wie die B sind Funktionen der Parameter. Wir können also sowohl den Ausdruck L_q, § 360, wie den Ausdruck L_s, § 363, für die kinetische Energie nach jedem der Parameter p ableiten. Dabei werden Ableitungen der A bezw. der B nach dem betreffenden p auftreten. Wir wollen zeigen, dass für die entsprechenden Ausdrücke auch bei Anwendung allgemeiner Koordinaten eine der Formel 164) entsprechende Beziehung gilt, d. h. dass

$$\frac{\partial L_q}{\partial p_i} = -\frac{\partial L_s}{\partial p_i}$$

ist.

Dazu wollen wir diese Ausdrücke wirklich bilden und ineinander überführen. Es ist:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_q}{\partial p_i} = \tfrac{1}{2}\Big[& \frac{\partial A_{11}}{\partial p_i} q_1 q_1 + \frac{\partial A_{12}}{\partial p_i} q_1 q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{1\varrho}}{\partial p_i} q_1 q_\varrho + \cdots + \frac{\partial A_{1r}}{\partial p_i} q_1 q_r \\
& + \frac{\partial A_{21}}{\partial p_i} q_2 q_1 + \frac{\partial A_{22}}{\partial p_i} q_2 q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{2\varrho}}{\partial p_i} q_2 q_\varrho + \cdots + \frac{\partial A_{2r}}{\partial p_i} q_2 q_r \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{\partial A_{\sigma 1}}{\partial p_i} q_\sigma q_1 + \frac{\partial A_{\sigma 2}}{\partial p_i} q_\sigma q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{\sigma\varrho}}{\partial p_i} q_\sigma q_\varrho + \cdots + \frac{\partial A_{\sigma r}}{\partial p_i} q_\sigma q_r \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{\partial A_{r1}}{\partial p_i} q_r q_1 + \frac{\partial A_{r2}}{\partial p_i} q_r q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{r\varrho}}{\partial p_i} q_r q_\varrho + \cdots + \frac{\partial A_{rr}}{\partial p_i} q_r q_r \Big]
\end{aligned}$$

oder setzen wir für die q aus 178) ihre durch die Grössen s ausgedrückten Werte ein:

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2}\Big[\frac{\partial A_{11}}{\partial p_i}(B_{11}s_1 + B_{12}s_2 + \cdots)\,(B_{11}s_1 + B_{12}s_2 + \cdots) \\
&\quad + \frac{\partial A_{12}}{\partial p_i}(B_{11}s_1 + B_{12}s_2 + \cdots)\,(B_{21}s_1 + B_{22}s_2 + \cdots) \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + \frac{\partial A_{1\varrho}}{\partial p_i}(B_{11}s_1 + B_{12}s_2 + \cdots)\,(B_{\varrho 1}s_1 + B_{\varrho 2}s_2 + \cdots) \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + \frac{\partial A_{21}}{\partial p_i}(B_{21}s_1 + B_{22}s_2 + \cdots)\,(B_{11}s_1 + B_{12}s_2 + \cdots) \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + \frac{\partial A_{\sigma\varrho}}{\partial p_i}(B_{\sigma 1}s_1 + B_{\sigma 2}s_2 + \cdots)\,(B_{\varrho 1}s_1 + B_{\varrho 2}s_2 + \cdots) \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

oder nach den s geordnet:

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2}\Big[\Big(B_{11}B_{11}\frac{\partial A_{11}}{\partial p_i} + B_{11}B_{21}\frac{\partial A_{12}}{\partial p_i} + \cdots + B_{11}B_{\varrho 1}\frac{\partial A_{1\varrho}}{\partial p_i} + \cdots \\
&\quad + B_{21}B_{11}\frac{\partial A_{21}}{\partial p_i} + B_{21}B_{21}\frac{\partial A_{22}}{\partial p_i} + \cdots + B_{21}B_{\varrho 1}\frac{\partial A_{2\varrho}}{\partial p_i} + \cdots \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + B_{\sigma 1}B_{\varrho 1}\frac{\partial A_{\sigma\varrho}}{\partial p_i} + \cdots\Big)s_1 s_1 \\
&\quad + \Big(B_{11}B_{12}\frac{\partial A_{11}}{\partial p_i} + B_{11}B_{22}\frac{\partial A_{12}}{\partial p_i} + \cdots + B_{11}B_{\varrho 2}\frac{\partial A_{1\varrho}}{\partial p_i} + \cdots \\
&\quad + B_{21}B_{12}\frac{\partial A_{21}}{\partial p_i} + B_{21}B_{22}\frac{\partial A_{22}}{\partial p_i} + \cdots + B_{21}B_{\varrho 2}\frac{\partial A_{2\varrho}}{\partial p_i} + \cdots \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + B_{\sigma 1}B_{\varrho 2}\frac{\partial A_{\sigma\varrho}}{\partial p_i} + \cdots\Big)s_1 s_2 + \cdots
\end{aligned}
$$

Das allgemeine Glied dieses Ausdruckes ist:

$$\left(\sum_1^r{}_{\sigma}\sum_1^r{}_{\varrho} B_{\sigma\iota}B_{\varrho\varkappa}\frac{\partial A_{\sigma\varrho}}{\partial p_i}\right)s_\iota s_\varkappa.$$

Nach 185) ist der Klammerausdruck aber $= -\frac{\partial B_{\iota\varkappa}}{\partial p_i}$. Also ist unsere Summe

$$\frac{\partial L_q}{\partial p_i} = -\frac{1}{2}\Big[\frac{\partial B_{11}}{\partial p_i} s_1 s_1 + \frac{\partial B_{12}}{\partial p_i} s_1 s_2 + \cdots + \frac{\partial B_{1\varrho}}{\partial p_i} s_1 s_\varrho + \cdots + \frac{\partial B_{1r}}{\partial p_i} s_1 s_r$$
$$+ \frac{\partial B_{21}}{\partial p_i} s_2 s_1 + \frac{\partial B_{22}}{\partial p_i} s_2 s_2 + \cdots + \frac{\partial B_{2\varrho}}{\partial p_i} s_2 s_\varrho + \cdots + \frac{\partial B_{2r}}{\partial p_i} s_2 s_r$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{\partial B_{\sigma 1}}{\partial p_i} s_\sigma s_1 + \frac{\partial B_{\sigma 2}}{\partial p_i} s_\sigma s_2 + \cdots + \frac{\partial B_{\sigma\varrho}}{\partial p_i} s_\sigma s_\varrho + \cdots + \frac{\partial B_{\sigma r}}{\partial p_i} s_\sigma s_r$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{\partial B_{r1}}{\partial p_i} s_r s_1 + \frac{\partial B_{r2}}{\partial p_i} s_r s_2 + \cdots + \frac{\partial B_{r\varrho}}{\partial p_i} s_r s_\varrho + \cdots + \frac{\partial B_{rr}}{\partial p_i} s_r s_r\Big];$$

das ist aber nach 180), § 363, nichts anderes als

$$-\frac{\partial L_s}{\partial p_i}.$$

Wir finden also in der That:

$$\frac{\partial L_q}{\partial p_i} = -\frac{\partial L_s}{\partial p_i} \quad \cdots\cdots\cdots \quad 186)$$

B) Die allgemeinen Parameterkräfte (verallgemeinerte Bewegungsgleichungen).

Schon in §§ 232 und 233 erwähnten wir, dass wir in den Ausdrücken aller Energieformen zwei Faktoren unterscheiden können, die bestimmte charakteristische Eigenschaften aufweisen: Intensitätsfaktor und Kapazitäts- oder Quantitätsfaktor. Fassen wir die an den allgemeinen Koordinaten eines Systems verrichteten Arbeiten ins Auge, so können wir auch sie in zwei Faktoren zerlegen. Am natürlichsten ist es, als einen Faktor die Anderung des betreffenden Parameters selbst abzusondern. Hat der Parameter z. B. die spezielle Form einer Raumabmessung (gewöhnliche Koordinate), so repräsentiert jene Änderung (Weg des Angriffspunktes) die Kapazitätsgrösse der verrichteten Arbeit. Es bleibt dann ein anderer Faktor übrig, der demnach durch das Verhältnis der geleisteten Arbeit zu der vor sich gegangenen Parameteränderung stets eindeutig definiert ist. In speziellen Fällen, z. B. dem eben genannten, stellt er die sog. „Kraft" dar. Der Kraftbegriff an sich ist für unsere allgemeinen Betrachtungen zu eng. Doch lässt die energetische Betrachtungsweise die Einführung eines allgemeinen Begriffes zu, den wir durch die genannte Faktorenzerlegung erhalten. Helmholtz, der sich bei seinen „Prinzipien der Statik monocyklischer Systeme" zuerst zu der Einführung dieses verallgemeinerten Kraft-

begriffes veranlasst sah, bezeichnete diesen Energiefaktor als „Kraftmoment“.[1])

366. Begriff des Kraftmomentes. — Wenn sich im Verlaufe der Zustandsänderungen eines Systems eine der Koordinaten, z. B. p_ϱ, um den Betrag dp_ϱ ändert, so dass sie aus dem Werte p_ϱ in den Wert $p_\varrho + dp_\varrho$ übergeht, so wird dabei im allgemeinen immer von dem System eine Arbeit geleistet. In dem genannten Falle werde sie mit dA_ϱ bezeichnet. Den Wert dieser Arbeit dA_ϱ wollen wir derart in zwei Faktoren zerlegen, dass ein Faktor gleich der Änderung dp_ϱ selbst wird. Dann berechnet sich der andere Faktor, den wir mit P'_ϱ bezeichnen wollen, durch einfache Division von dp_ϱ in dA_ϱ:

$$P'_\varrho = \frac{dA_\varrho}{dp_\varrho} \text{ und } P'_\varrho \cdot dp_\varrho = dA_\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 187)$$

Diesen Faktor nennt Helmholtz das „Kraftmoment der inneren Kräfte“, welches auf Vergrösserung des Parameters p_ϱ hinwirkt. Wenn p_ϱ eine einfache Längengrösse von bestimmter Richtung ist, z. B. eine cartesische Koordinate, so würde dieser Faktor die in die Richtung von p_ϱ fallende Kraftkomponente sein, welche diese Koordinate zu vergrössern strebt. Dabei ist vorausgesetzt, dass P'_ϱ ein solches Aggregat von Kraftkomponenten ist, dass es keine Arbeit leistet, wenn sich irgend eine andere Koordinate des Systems ändert.

Das Kraftmoment ist also ein allgemeinerer Begriff, der den der gewöhnlichen Kraft als speziellen Fall in sich begreift. Wir brauchen diesen verallgemeinerten Kraftbegriff, weil unsere Koordinaten ja durchaus nicht immer von der Natur einfacher Raumabmessungen sind. Was man in jedem einzelnen Falle unter dem Kraftmomente zu verstehen habe, ergiebt sich durch die angedeuteten Arbeitsbetrachtungen. In der That sind es ja in den meisten Fällen in erster Linie die geleisteten oder verbrauchten Arbeiten, welche bei irgend welchen Zustandsänderungen der Beobachtung zugänglich sind, sei es in Form von mechanischen Arbeitsleistungen oder von Wärmemengen (Wärmetönungen u. s. w.). Dehnt sich ein Gas aus, so leistet es eine Arbeit dA_ϱ; der Quotient dieser Arbeit durch die Parameteränderung (Volumenveränderung) (dp_ϱ) giebt das Kraftmoment des Parameters: den Druck P'_ϱ. Bei einer Lösungs- oder Verbrennungswärme kann die Quantität der gelösten oder verbrannten Substanz als Parameter, ihr Verhältnis zur verbrauchten oder entwickelten Wärmemenge (in mechanischem Maasse) als Helmholtzsches „Kraftmoment“ in der Richtung des fortschreitenden Prozesses angesehen werden.

Das Kraftmoment kann sowohl Intensitäts- wie Kapazitätsgrösse sein, je nach der speziellen Natur des Parameters, auf welchen es sich bezieht. Ist dieser eine Raumabmessung, so ist P' als Kraft im gewöhnlichen Sinne Intensitätsfaktor § 233.

Helmholtz ist geneigt, jenen Energiefaktor P'_ϱ, den wir zunächst als Kraftmoment bezeichnet haben, ganz allgemein kurzweg Kraft zu nennen. Er sagt:

[1]) Crelles Journal für Mathematik, 97, p. 112, 1884.

„Es wäre, wie mir scheint, nichts dagegen einzuwenden, dass man P'_ϱ als Kraft in Richtung von p_ϱ bezeichnete, wie dies schon in vielen Beispielen der Anwendung geschehen ist.“ [1])

Wir bezeichnen mit Hertz durch accentuierte Buchstaben P' die von dem System selbst nach aussen hin an den Parametern p ausgeübten Kräfte. Durch nicht accentuierte P wollen wir die von aussen auf das System ausgeübt gedachten Kräfte bezeichnen, welche diesen Systemkräften gerade das Gleichgewicht halten würden; es ist dann

$$P'_\varrho = -P_\varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad 188)$$

367. Beziehung der Kraftmomente zu den rechtwinkeligen Komponenten der Kräfte. — In der Punktmechanik betrachtet man die auf die einzelnen Massen des Systems ausgeübten Kräfte, welche man durch ihre rechtwinkeligen Komponenten nach den rechtwinkelig zu einander stehenden Koordinaten ausdrückt, die auf die Masse m_h wirkende Gesamtkraft also etwa durch die drei voneinander unabhängigen Grössen:

$$X_h,\ Y_h,\ Z_h.$$

Die Wirkung dieser äusseren Kräfte tritt in der Abänderung der Beschleunigungen zu Tage und man misst die Komponenten geradezu durch das Produkt von Masse m_h in die betreffenden Beschleunigungskomponenten:

$$X_h = m_h \ddot{x}_h, \quad Y_h = m_h \ddot{y}_h, \quad Z_h = m_h \ddot{z}_h \quad \ldots\ldots \quad 189)$$

Bei einer Verrückung des Angriffspunktes (m_h) um die Strecken ∂x_h, ∂y_h, ∂z_h leisten diese Kräfte die Arbeit

$$X_h \cdot \partial x_h + Y_h \cdot \partial y_h + Z_h \cdot \partial z_h.$$

Wirkt das Kraftmoment P_ϱ von aussen her an dem Parameter p_ϱ, so werden von einer Änderung desselben, etwa um ∂p_ϱ, im allgemeinen eine ganze Reihe von Einzelmassen m_h, vielleicht sogar alle Massen betroffen. Die Arbeit dieser Kraft

$$\partial A_\varrho = P_\varrho \cdot \partial p_\varrho$$

ist also als Summe der Arbeiten zu betrachten, welche die Kräfte X, Y, Z an den einzelnen Massen leisten. Sind die Grössen ∂x_h, ∂y_h, ∂z_h die durch die Änderung des Paramaters p_ϱ um ∂p_ϱ hervorgerufenen Verrückungen der Masse m_h, so ist folglich:

$$\partial A_\varrho = P_\varrho \cdot \partial p_\varrho = \sum_1^n (X_h \cdot \partial x_h + Y_h \cdot \partial y_h + Z_h \cdot \partial z_h) \quad . \quad 190)$$

[1]) A. a. O., p. 112, vergl. S. 429.

Die Summe rechts wird im allgemeinen nicht über alle Massen m_h des Systems zu erstrecken sein, sondern nur über diejenigen, deren rechtwinkelige Koordinaten x_h, y_h, z_h von dem betreffenden Parameter p_ϱ abhängen. Das werden in den einzelnen Fällen immer nur einige sein, nämlich gerade die, welche speziell mit dem Antriebspunkte, dessen Lage durch p_ϱ bestimmt ist, verknüpft sind. In dem Ausdruck 190) werden dann immer eine Reihe von den Faktoren ∂x_h u. s. w. verschwinden.

Dividiert man durch die willkürliche, aber endliche Grösse ∂p_ϱ, so erhält man mit Rücksicht auf 190) und 189)

$$P_\varrho = \sum_1^n{}_h \left(m_h \ddot{x}_h \frac{\partial x_h}{\partial p_\varrho} + m_h \ddot{y}_h \frac{\partial y_h}{\partial p_\varrho} + m_h \ddot{z}_h \frac{\partial z_h}{\partial p_\varrho} \right) \quad . \quad . \quad 191)$$

368. Ableitung der allgemeinen Lagrangeschen Bewegungsgleichungen. — Wir denken uns in L_{Geschw} § 358, Formel 156) für die rechtwinkeligen Komponenten $\dot{x}_h$, $\dot{y}_h$, $\dot{z}_h$ die Werte in den allgemeinen Koordinaten p und q nach Gleichungssystem 166) eingesetzt, differenzieren die Energie partiell einmal nach irgend einem p, dann nach dem entsprechenden q und finden:

$$\frac{\partial L_q}{\partial p_\varrho} = \sum_1^n{}_h m_h \left(\dot{x}_h \frac{\partial \dot{x}_h}{\partial p_\varrho} + \dot{y}_h \frac{\partial \dot{y}_h}{\partial p_\varrho} + \dot{z}_h \frac{\partial \dot{z}_h}{\partial p_\varrho} \right) \quad . \quad . \quad 192)$$

$$\frac{\partial L_q}{\partial q_\varrho} = s_\varrho = \sum_1^n{}_h m_h \left(\dot{x}_h \frac{\partial \dot{x}_h}{\partial q_\varrho} + \dot{y}_h \frac{\partial \dot{y}_h}{\partial q_\varrho} + \dot{z}_h \frac{\partial \dot{z}_h}{\partial q_\varrho} \right) \quad . \quad . \quad 193)$$

für den letzten Ausdruck können wir mit Rücksicht auf die Gleichungen 169) § 359, auch schreiben:

$$\frac{\partial L_q}{\partial q_\varrho} = s_\varrho = \sum_1^n{}_h m_h \left(\dot{x}_h \frac{\partial x_h}{\partial p_\varrho} + \dot{y}_h \frac{\partial y_h}{\partial p_\varrho} + \dot{z}_h \frac{\partial z_h}{\partial p_\varrho} \right) \quad . \quad . \quad 193\,a)$$

Differenzieren wir noch einmal nach der Zeit, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L_q}{\partial q_\varrho}\right] = \frac{d s_\varrho}{dt} = \dot{s}_\varrho = & \sum_1^n{}_h m_h \left(\ddot{x}_h \frac{\partial x_h}{\partial p_\varrho} + \ddot{y}_h \frac{\partial y_h}{\partial p_\varrho} + \ddot{z}_h \frac{\partial z_h}{\partial p_\varrho} \right) \\ & + \sum_1^n{}_h m_h \left(\dot{x}_h \frac{d}{dt}\frac{\partial x_h}{\partial p_\varrho} + \dot{y}_h \frac{d}{dt}\frac{\partial y_h}{\partial p_\varrho} + \dot{z}_h \frac{d}{dt}\frac{\partial z_h}{\partial p_\varrho} \right) \end{aligned}\right\} 194)$$

Nach einem Satze aus der Differentialrechnung kann man in der letzten Summe die Reihenfolge der Differentiationen umkehren, so dass man z. B. erhält

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_h}{\partial p_\varrho} = \frac{\partial\left(\frac{d x_h}{dt}\right)}{\partial p_\varrho} = \frac{\partial \dot{x}_h}{\partial p_\varrho}.$$

Freilich sind hier die Variablen, nach denen differenziert werden soll, nicht voneinander unabhängig, denn die p sind ja sämtlich Funktionen der Zeit t. Es lässt sich aber zeigen, dass dennoch die hier vorgenommene Umkehrung der Differentiation statthaft ist.

Es ist nämlich

$$\frac{\partial x_h}{\partial p_\varrho} = \lim\left[\frac{1}{\Delta p_\varrho}\left(x_h(p_1, p_2, \cdots, p_\varrho + \Delta p_\varrho, \cdots, p_r) - x_h(p_1, p_2, \cdots, p_\varrho, \cdots, p_r)\right)\right],$$

und da alle p Funktionen der Zeit sind:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial x_h}{\partial p_\varrho} = \lim\Bigg[\frac{1}{\Delta p_\varrho \cdot dt}\Big(&x_h(p_1 + dp_1, p_2 + dp_2, \cdots, p_\varrho + \Delta p_\varrho + dp_\varrho, \cdots p_r + dp_r)\\ &- x_h(p_1 + dp_1, p_2 + dp_2, \cdots, p_\varrho + dp_\varrho, \cdots, p_r + dp_r)\\ &- x_h(p_1, p_2, \cdots, p_\varrho + \Delta p_\varrho, \cdots, p_r) + x_h(p_1, p_2, \cdots, p_\varrho, \cdots, p_r)\Big)\Bigg].\end{aligned}$$

Andererseits ist:

$$\begin{aligned}\dot{x}_h = \frac{dx_h}{dt} = \lim\Bigg[\frac{1}{dt}\Big(&x_h(p_1 + dp_1, p_2 + dp_2, \cdots, p_\varrho + dp_\varrho, \cdots, p_r + dp_r)\\ &- x_h(p_1, p_2, \cdots, p_\varrho, \cdots, p_r)\Big)\Bigg]\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{x}_h}{\partial p_\varrho} = \lim\Bigg[\frac{1}{dt \cdot \Delta p_\varrho}\Big(&x_h(p_1 + dp_1, p_2 + dp_2, \cdots, p_\varrho + dp_\varrho + \Delta p_\varrho, \cdots, p_r + dp_r)\\ &- x_h(p_1, p_2, \cdots, p_\varrho + \Delta p_\varrho, \cdots, p_r)\\ &- x_h(p_1 + dp_1, p_2 + dp_2, \cdots, p_\varrho + dp_\varrho, \cdots, p_r + dp_r)\\ &+ x_h(p_1, p_2, \cdots, p_\varrho, \cdots, p_r)\Big)\Bigg].\end{aligned}$$

Dieser Grenzwert muss aber auf dieselbe Grösse wie der für $\frac{d}{dt}\frac{\partial x_h}{\partial p_\varrho}$ führen, da er sich von diesem nur durch die Umstellung der Mittelglieder unterscheidet.

Somit erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L_q}{\partial \dot{q}_\varrho}\right] = \frac{ds_\varrho}{dt} = \dot{s}_\varrho = \sum_1^n{}_h\Big(&m_h \ddot{x}_h \cdot \frac{\partial x_h}{\partial p_\varrho} + m_h \ddot{y}_h \cdot \frac{\partial y_h}{\partial p_\varrho}\\ &+ m_h \ddot{z}_h \cdot \frac{\partial z_h}{\partial p_\varrho}\Big) + \sum_1^n{}_h m_h\Big(\dot{x}_h \frac{\partial \dot{x}_h}{\partial p_\varrho} + \dot{y}_h \frac{\partial \dot{y}_h}{\partial p_\varrho} + \dot{z}_h \frac{\partial \dot{z}_h}{\partial p_\varrho}\Big)\end{aligned}\right\} 194\,a)$$

Das erste Glied rechts ist nach 191), § 367, nichts anderes als P_ϱ, das zweite nach 156) §§ 358 und 359) oder 192) am Anfange dieses Paragraphen $\frac{\partial L_q}{\partial p_\varrho}$; somit ist

$$\dot{s}_\varrho - \frac{\partial L_q}{\partial p_\varrho} = P_\varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad 195\,a)$$

oder nach 188), § 366:

$$P'_\varrho = \frac{\partial L_q}{\partial p_\varrho} - \dot{s}_\varrho \quad \ldots \ldots \ldots \quad 195\,b)$$

Mit Rücksicht auf Formel 186), § 365, welche für alle p, also auch für p_ϱ wie für p_i gilt, kann man dafür auch schreiben

$$P_\varrho' = -\frac{\partial L_a}{\partial p_\varrho} - \dot{s}_\varrho \quad \ldots \ldots \ldots \quad 196)$$

Das sind die allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen in der sog. II. Form von Zustandsänderungen für die einzelnen dieselben bestimmenden Parameter und die an ihnen auftretenden Kraftmomente.

Um einer späteren Anwendung willen wollen wir die Gleichung

$$P_i = \dot{s}_i - \frac{\partial L_q}{\partial p_i}$$

etwas ausführlicher hinschreiben. s_i enthält die Zeit t, nach der zu differenzieren ist, in den p sowohl wie in den q; also ist

$$P_i = \sum_1^r{}^\varrho \frac{\partial^2 L_q}{\partial q_i \cdot \partial p_\varrho} q_\varrho + \sum_1^r{}^\varrho \frac{\partial^2 L_q}{\partial q_i \cdot \partial q_\varrho} \dot{q}_\varrho - \frac{\partial L_q}{\partial p_i}.$$

Für einen beliebigen anderen Parameter k würde sein:

$$P_k = \sum_1^r{}^\varrho \frac{\partial^2 L_q}{\partial q_k \cdot \partial p_\varrho} q_\varrho + \sum_1^r{}^\varrho \frac{\partial^2 L_q}{\partial q_k \cdot \partial q_\varrho} \dot{q}_\varrho - \frac{\partial L_q}{\partial p_k}.$$

Wir wollen bilden $\partial P_i / \partial q_k$ und $\partial P_k / \partial q_i$; da die q_ϱ sowohl untereinander wie von den $\dot{q}_\varrho$ unabhängig sind, so erhalten wir:

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \sum_1^r{}^\varrho \frac{\partial^3 L_q}{\partial q_i \cdot \partial p_\varrho \cdot \partial q_k} q_\varrho + \frac{\partial^2 L_q}{\partial q_i \cdot \partial p_k} + \sum_1^r{}^\varrho \frac{\partial^3 L_q}{\partial q_i \cdot \partial q_\varrho \cdot \partial q_k} \dot{q}_\varrho - \frac{\partial^2 L_q}{\partial p_i \cdot \partial q_k}$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial q_i} = \sum_1^r{}^\varrho \frac{\partial^3 L_q}{\partial q_k \cdot \partial p_\varrho \cdot \partial q_i} q_\varrho + \frac{\partial^2 L_q}{\partial q_k \cdot \partial p_i} + \sum_1^r{}^\varrho \frac{\partial^3 L_q}{\partial q_k \cdot \partial q_\varrho \cdot \partial q_i} \dot{q}_\varrho - \frac{\partial^2 L_q}{\partial p_k \cdot \partial q_i}$$

Addieren wir beide Gleichungen, so erhalten wir:

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_k} + \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 L_q}{\partial q_i \cdot \partial q_k} \right) \quad \ldots \ldots \quad 196\,a)$$

subtrahieren wir sie voneinander, so erhalten wir:

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_k} - \frac{\partial P_k}{\partial q_i} = 2 \left(\frac{\partial^2 L_q}{\partial q_i \cdot \partial p_k} - \frac{\partial^2 L_q}{\partial p_i \cdot \partial q_k} \right) \quad \ldots \ldots \quad 196\,b)$$

21. Kapitel.

Zur Energetik polycyklischer Systeme.

Die Betrachtungen des vorigen Kapitels waren ganz allgemein; wir wollen nun diejenigen spezielleren Fälle aus den daselbst abgeleiteten Gleichungssystemen der Theorie der Zustandsänderungen näher betrachten, welche für unsere Feldtheorien von besonderer Bedeutung sind. Alle bisherigen Sätze über Kraftfelder werden umfasst von der Theorie eines polycyklischen Systems, welches ausser den Feldträgern (Magneten, Leitungsdrähten u. s. w.) noch damit gekoppelte „verborgene" Massen enthält, die den Energieinhalt der Felder wesentlich mitbestimmen, vergl. namentlich die Betrachtungen der Kapitel 7, 16 und 19.

A) Einführung der Bezeichnungen und Beispiele mechanischer Cykelbewegungen.

Zunächst wollen wir die hier zu verwendenden und in möglichst engem Anschluss an die grundlegenden Arbeiten von Helmholtz und Hertz gewählten Bezeichnungen für die Bestimmungsstücke eines cyklischen Systems einführen und deren Eigenschaften erläutern. Damit diese möglichst anschaulich und klar hervortreten und um für die folgenden, etwas schwierigeren Betrachtungen immer einfache Beispiele zur Verfügung zu haben, an denen wir die Bedeutung der allgemeinen Lehrsätze illustrieren können, wollen wir ferner einige bekannte mechanische Cykelbewegungen zum Vergleich heranziehen. Namentlich wird es sich um Klarstellung der Bedeutung jener langsam veränderlichen Parameter handeln, welche den Ablauf der Cykelbewegungen modifizieren, und denen wir in unseren vorläufigen Betrachtungen dieser Bewegungen in den früheren Kapiteln noch keine eingehende Aufmerksamkeit geschenkt haben. Die in §§ 136 und 141 erwähnten

Cykel sowie das Feldmodell § 326 hatten feste Achsen, sie waren „starr", d. h. Veränderungen ausser den in sich zurücklaufenden Cykelbewegungen selbst kamen nicht vor. Und doch sahen wir bei dem Stromphänomen, dass Lagen- und Grössenparameter der Träger, deren Änderungen als langsam vor sich gehend im Vergleiche zu den cyklischen Geschwindigkeiten anzusehen sind, § 144, von grösster Bedeutung sind; denn die an ihnen zu Tage tretenden, von dem Cykel nach aussen hin ausgeübten Kräfte sind die elektroponderomotorischen Antriebe (vergl. §§ 158 und 189).

369. Langsam und schnell veränderliche Koordinaten. — Die polycyklischen Bewegungen gehen aus den allgemeinen kinematischen Systemen mit beliebig vielen Parametern, wie wir sie im vorigen Kapitel behandelten, dadurch hervor, dass wir den besonderen Eigenschaften der Parameter bei diesen cyklischen Systemen Rechnung tragen. Wie schon in den §§ 136 bis 147 auseinander gesetzt wurde, zerfallen hier die Parameter in zwei Klassen, in die schnell veränderlichen oder eigentlichen cyklischen Koordinaten und die näher bestimmenden langsam veränderlichen Koordinaten oder kurz die Parameter des Systems. Die ersteren beschreiben periodisch in sich zurücklaufende Bewegungszustände, die letzteren die allmählichen Abänderungen, welche mit diesen Cykeln vor sich gehen können, ohne dass ihr eigentlich cyklischer Charakter dabei geändert wird. Das Maass des „langsam" im Vergleich zum „schnell" der Cykelbewegungen selbst ist dabei durch die Periodenlänge der letzteren bestimmt, § 144.

Wir wollen die cyklischen Koordinaten, wie wir es auch schon früher thaten, im Anschluss an Hertz durch gothische Lettern bezeichnen und annehmen, der Polycykel besitze $\mathfrak{h}$ in sich zurücklaufende Einzelcykel, die in beliebiger Weise miteinander gekoppelt sind:

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdot\cdot, \mathfrak{p}_\vartheta, \cdot\cdot, \mathfrak{p}_\eta, \cdot\cdot, \mathfrak{p}_\mathfrak{h}.$$

Die cyklischen Geschwindigkeiten, oder die „cyklischen Intensitäten", wie wir in Rückerinnerung an diese Grössen in der Elektrodynamik, wo sie Stromstärken bedeuteten, §§ 267 und 275, mit Hertz sagen wollen, sind dann

$$\dot{\mathfrak{p}}_\vartheta = \frac{d\,\mathfrak{p}_\vartheta}{d\,t} = \mathfrak{q}_\vartheta$$

$$\vartheta = 1, 2, \cdot\cdot, \vartheta, \cdot\cdot, \eta, \cdot\cdot, \mathfrak{h}.$$

Die Momente, welche diesen Intensitäten entsprechen, sind (vergl. § 138)

$$\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \cdot\cdot, \mathfrak{f}_\vartheta, \cdot\cdot, \mathfrak{f}_\eta, \cdot\cdot, \mathfrak{f}_\mathfrak{h}.$$

Die Kräfte, welche das System an den cyklischen Koordinaten nach aussen hin ausübt, bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}'_\vartheta$. Dann sind nach 188) § 366 die äusseren Kräfte, welche auf die Koordinaten $\mathfrak{p}_\vartheta$ wirkend, deren Änderung hindern könnten,

$$\mathfrak{P}_\vartheta = -\mathfrak{P}'_\vartheta \text{ oder } \mathfrak{P}'_\vartheta = -\mathfrak{P}_\vartheta \quad \ldots\ldots \quad 197)$$

Für die Parameter des Systems wollen wir lateinische Buchstaben beibehalten. Das System habe k langsam veränderliche Parameter

$$p_1, p_2, \cdots, p_r, \cdots, p_s, \cdots, p_k,$$

deren zeitliche Änderungsgeschwindigkeiten

$$\dot{p}_r = \frac{dp_r}{dt} = q_r$$

und deren Momente

$$s_1, s_2, \cdots, s_r, \cdots, s_s, \cdots, s_k$$

sind. Die an ihnen thätigen inneren vom System ausgeübten Kräfte seien P'_r, die entsprechenden äusseren dagegen

$$P_r = -P'_r \text{ oder } P'_r = -P_r \quad \ldots\ldots \quad 198)$$

Die Cykel werden wesentlich durch ihre Intensitäten $\mathfrak{q}_\vartheta$ beherrscht, ihre Koordinaten spielen bei ihrem Ablaufe gar keine Rolle, sie kommen in den entsprechenden Ausdrücken gar nicht mit vor, § 137; die Änderungen der Intensitäten mit der Zeit erfolgen so langsam, dass alle $\mathfrak{q}_\vartheta$ klein von erster Ordnung sind, § 140. Die Parameter dagegen treten nur mit ihren eigenen Werten p_r ein; sie ändern sich so langsam, dass die q_r klein von erster, die $\dot{q}_r$ klein von zweiter Ordnung sind. Somit haben die verallgemeinerten Koordinaten jetzt die folgenden Eigenschaften, vergl. §§ 140 und 144.

a) Cyklische Koordinaten.	b) Langsam veränderliche Parameter.
$\mathfrak{p}_\vartheta$: kommen in den zu bildenden Ausdrücken nicht vor	p_r: kommen in den zu bildenden Ausdrücken vor
$\mathfrak{q}_\vartheta = \dot{\mathfrak{p}}_\vartheta$: bestimmen den Zustand des Systems	$q_r = \dot{p}_r$: sind klein von erster Ordnung
$\dot{\mathfrak{q}}_\vartheta$: sind klein gegen $\mathfrak{q}_\vartheta$ selbst.	$\dot{q}_r$: sind klein von zweiter Ordnung
$\vartheta = 1, 2, \cdots, \eta, \cdots, \vartheta, \cdots, \mathfrak{h}$	$r = 1, 2, \cdots, r, \cdots, s, \cdots, k$

Aus diesen Eigenschaften ergeben sich wesentliche Umformungen aller für die Bewegung maassgebenden Grössen, sowie der Zustandsgleichungen, Umformungen, welche zuerst H. v. Helmholtz vorgenommen hat. Ehe wir sie, anknüpfend an die Ergebnisse des vorigen Kapitels, in ihrer ganzen Allgemeinheit vornehmen, wollen wir sie an einer Reihe von einfachen Beispielen erläutern.

370. Monocykel mit einem Parameter: Beispiel des einfachen Centrifugalregulators. — Das erste Beispiel cyklischer Bewegung, welches wir wählen wollen, ist dasjenige des Centrifugalregulators, wie er bei Dampfmaschinen verwendet wird, und von dem sich ein auf die Centrifugalmaschine zu befestigendes Modell wohl in jeder physikalischen Lehrsammlung vorfindet. Die Kurbel der grossen Scheibe der Maschine ist der Antriebspunkt des Cykels, wir wollen ihn uns in der Entfernung 1 von der Achse angebracht denken. Dann ist die Bogenentfernung $\mathfrak{p}$ desselben von einer beliebigen Anfangslage die cyklische Koordinate § 137, $\mathfrak{q}$, die Winkelgeschwindigkeit, mit der die Scheibe gedreht wird, die cyklische Geschwindigkeit oder Intensität. Wir haben einen unechten Cykel, § 142, vor uns.

Das Trägheitsmoment der Antriebsscheibe sei t_1. Mit ihr ist die zweite kleinere Scheibe der Centrifugalmaschine durch einen Riemen oder eine Schnur gekoppelt, § 141. Auf dieser ist das Modell des aus zwei schweren Kugeln mit dem entsprechenden Stangenwerk bestehenden Regulators befestigt. Das Trägheitsmoment des koppelnden Zugkraftorgans können wir vernachlässigen, das der zweiten Rolle mit ihrer Achse und den mit dieser fest verbundenen Teilen des Regulators sei t_2; die Stangen seien so leicht, dass ihre Trägheitsmomente gegen die der Kugeln, von denen jede die Masse m habe, ebenfalls vernachlässigt werden können. Die Kugeln haben zwei Grade der Bewegungsfreiheit, p. 22. Sie können sich erstens bei bestimmtem Abstande von der Drehungsachse auf der Kreislinie, deren Ebene senkrecht zur Drehungsachse steht, bewegen. Die Winkelgeschwindigkeit dieser Bewegung ist $n\mathfrak{q}$, wo n das Übersetzungsverhältnis des Riemensystems ist (die von $\mathfrak{q}$ abhängige Riemengleitung setzen wir als sehr klein voraus).

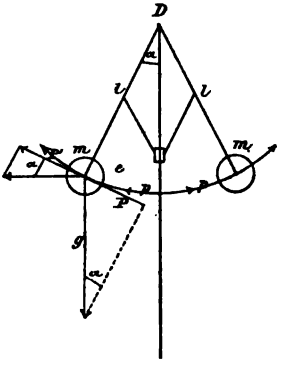


Fig. 137.

Die Kugeln können sich aber zweitens auch auf den, um die Drehpunkte D, Fig. 137, der sie tragenden Arme geschlagenen Kreisbögen bewegen. Die Bogenentfernung ihrer Mittelpunkte von der Rotationsachse werde als variabler Parameter p eingeführt. Er ist der einzige langsam veränderliche Parameter des Systems, daher seine Bezeichnung durch eine lateinische Type ohne Index.

Beide Kugelmittelpunkte können vermöge der Stangenverbindungen als Antriebspunkte von dem Parameter p betrachtet werden; die Richtung von p ist die der Tangente an die um den Drehpunkt D, Fig. 137, mit der Armlänge l geschlagenen Kreisbögen; p hat also hier die Natur einer Raumabmessung, vergl. §§ 357 u. 366. Wegen der völligen Symmetrie der ganzen Anordnung brauchen wir die weiteren Betrachtungen nur an eine Kugel anzuknüpfen.

Setzen wir den von uns betrachteten Mechanismus als reibungslos voraus, so nimmt der Centrifugalregulator bei einer bestimmten Umdrehungsgeschwindigkeit $\mathfrak{q}$ eine bestimmte Konfiguration an. Die in dem Cykel aufgespeicherte kinetische Energie bleibt erhalten, ebenso die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ und die ihr entsprechende Stellung der Kugeln. An der cyklischen Koordinate braucht keine Kraft $\mathfrak{P}$ mehr

zu wirken. Nur wenn wir die cyklische Intensität des Systems irgendwie abändern wollen, müssen wir eine Kraft $\mathfrak{P}$ am Antriebspunkte angreifen lassen.

An dem Parameter p, also den Kugeln m, übt das System vermöge seiner cyklischen Natur eine Kraft aus, welche den Lagenparameter p zu vergrössern strebt, die sog. Centrifugalkraft. Wir haben also eine positiv zu nehmende Kraft P'. Ihre Grösse berechnet sich leicht. Nach Fig. 137 ist

$$\alpha = \frac{p}{l}, \qquad e = l \sin \alpha .$$

Die Centrifugalbeschleunigung ist, wenn der Achse die Winkelgeschwindigkeit $n\,\mathfrak{q}$ erteilt ist:

$$e\,(n\,\mathfrak{q})^2 \text{ cm sek}^{-2} \text{ (denn dim Winkelgeschwindigkeit } \mathfrak{q} \text{ ist sek}^{-1}).$$

Die in die Tangentenrichtung an den Kreisbogen fallende Komponente hiervon ist $e\,(n\,\mathfrak{q})^2 \cos \cdot \alpha$, die Kraft selbst $m\,e\,(n\,\mathfrak{q})^2 \cos \alpha$, und da es zwei miteinander durch das Stangenwerk verbundenen Massen m sind, so ist die innere Systemkraft P', welche den Parameter p zu vergrössern strebt:

$$P' = 2\,m\,e\,(n\,\mathfrak{q})^2 \cos \alpha = 2\,m\,(n\,\mathfrak{q})^2\,l \sin \frac{p}{l} \cdot \cos \frac{p}{l} = m\,n^2 \mathfrak{q}^2\,l \sin 2\,\frac{p}{l} .$$

Die ihr das Gleichgewicht haltende äussere Kraft würde nach 188), § 366, $P = -P'$ sein.

Wir wollen jetzt die Bewegungsgleichungen dieses Cykels aus den allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen herleiten.

Bei der zu Grunde gelegten Bezeichnungsweise ist die Energie des Systems

$$\mathfrak{L}_\mathfrak{q} = \tfrac{1}{2}\left[t_1 + t_2\,n^2 + 2\,n^2\,m\,l^2 \sin^2 \frac{p}{l}\right] \mathfrak{q}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 199)$$

da $\frac{1}{2}\,t_1\,\mathfrak{q}^2$ die Energie der ersten, $\frac{1}{2}\,t_2\,(n\,\mathfrak{q})^2$ die der zweiten Scheibe mit allen mit ihr fest verbundenen Teilen des Regulators, $2\,m\,e^2 = 2\,m\,l^2 \sin^2 \frac{p}{l}$, aber das Trägheitsmoment der beiden Kugeln, also $\frac{1}{2} \cdot 2\,m\,l^2 \sin^2 \frac{p}{l}\,(n\,\mathfrak{q})^2$ der durch sie in das System hineingebrachte Betrag an kinetischer Energie ist.

Die Momente sind

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{f} &= \frac{\partial\,\mathfrak{L}_\mathfrak{q}}{\partial\,\mathfrak{q}} = \left[t_1 + t_2\,n^2 + 2\,n^2\,m\,l^2 \sin^2 \frac{p}{l}\right] \mathfrak{q} \\ s &= \frac{\partial\,\mathfrak{L}_\mathfrak{q}}{\partial\,q} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 200)$$

Weder $\mathfrak{L}$, noch die Momente enthalten die cyklische Koordinate $\mathfrak{p}$, sondern nur die cyklische Intensität $\mathfrak{q}$; umgekehrt kommt die zeitliche Änderung q des langsam veränderlichen Parameters p nicht vor, sondern nur dieser selbst. Mit Rücksicht hierauf vereinfachen sich die allgemeinen Lagrangeschen Bewegungsgleichungen, § 368, für die Kraftmomente. Bei der Ermittelung von $\mathfrak{P}$ fällt das Glied $\partial\,\mathfrak{L}_\mathfrak{q}/\partial\,\mathfrak{p}$ weg, bei der von P das Glied $\dot{s}$, weil $s = 0$ ist.

Die Lagrangeschen Gleichungen geben hier also:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P} = \dot{\mathfrak{f}} &= \left[t_1 + t_2 n^2 + 2 n^2 m l^2 \sin^2 \frac{p}{l}\right] \dot{\mathfrak{q}} \\ &+ 4 n^2 m l \mathfrak{q} \sin \frac{p}{l} \cos \frac{p}{l} \cdot q \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 201)$$

und

$$\left.\begin{aligned} P = -\frac{\partial \mathfrak{L}_\mathfrak{q}}{\partial p} &= -2 (n \mathfrak{q})^2 m l \sin \frac{p}{l} \cos \frac{p}{l} \\ &= -m n^2 \mathfrak{q}^2 l \sin 2 \frac{p}{l} = -P'. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 202)$$

371. Elimination von Parametern; unvollständige Systeme. — Die soeben angestellten Betrachtungen geben zu einer sehr wichtigen Bemerkung allgemeinerer Natur Veranlassung, welche wir am besten an dem von uns betrachteten Beispiele des Centrifugalregulators erläutern. Das kinematische System desselben ist nicht vollkommen frei; es ist dauernd mit einem anderen Systeme gekoppelt, dem System aller Massen unseres gesamten Planeten. Denn dauernd werden die Kugeln des Regulators ausser von den aus dem Inneren des Systems herauswirkenden Centrifugalkräften von der Schwere beeinflusst. Diese übt eine äussere Kraft P aus und wir wissen: die Stellung der Kugeln und damit die Grösse des Parameters p reguliert sich automatisch immer so ein, dass die Komponente der Schwerkraft entgegengesetzt gleich der in die Bahn des Angriffspunktes fallenden Komponente der Centrifugalkräfte ist: $P = -P'$ oder $P + P' = 0$.

Die sämtlichen auf den Antriebspunkt des langsam veränderlichen Parameters wirkenden inneren und äusseren Kräfte halten sich beim Centrifugalregulator dauernd das Gleichgewicht, die resultierende Gesamtkraft ist für alle Zeiten gleich 0.

Die Grösse der kompensierenden äusseren Kraft P ist mit Rücksicht auf Fig. 137 leicht zu berechnen. Die Beschleunigung der Schwere ist g; davon kommt hier die Komponente $g \sin \alpha$ in Betracht; die äussere Kraft, welche den Parameter p fortwährend zu verkleinern strebt, ist also:

$$-2 m g \sin \alpha = -2 m g \sin \frac{p}{l}.$$

Bei Verwendung unseres Cykels zur Regulierung des Ganges eines anderen Cykels mit hin- und hergehenden Teilen (z. B. der Dampfmaschine) greift das untere Stück des Stangenwerkes, welches sich beim Emporsteigen der Kugeln bei gesteigerter Winkelgeschwindigkeit mit hebt, und sich mit senkt, wenn die Kugeln sich senken, in ein Hebelwerk ein, welches etwa den Dampfzufluss durch die Drosselklappe reguliert. Hier haben wir eine neue äussere, in das Spiel des

Regulators eingreifende und von diesem zu überwindende Kraft. Bei unserem Modelle entfernen wir diese Kuppelung mit anderen Systemen; es bleibt dann nur die mit der Erde übrig.

Die gesamte auf den Parameter wirkende Kraft ist also:

$$P' + P = 2\,m\,l \sin\frac{p}{l}\cos\frac{p}{l}\,n^2\mathfrak{q}^2 - 2\,m\,g\,\sin\frac{p}{l} = 0 \quad . \quad . \quad 203)$$

Hier haben wir eine Gleichung, welche uns dazu dienen kann, den Parameter p überhaupt aus den sämtlichen Bewegungsgleichungen des Systems zu eliminieren und diese nur durch $\mathfrak{q}$ und die Konstanten des Systems (m, n, l) auszudrücken.

Solche Systeme, in deren Gleichungen Parameter fehlen, nachdem sie durch Elimination daraus entfernt worden sind, nennt Helmholtz: „Unvollständige Systeme". Die hinreichende Bedingung für die Unvollständigkeit ist die, dass die auf den betreffenden Parameter wirkenden Kräfte sich dauernd, d. h. bei allen Phasen der cyklischen Bewegung gegenseitig das Gleichgewicht halten.

Die Elimination selbst kann bei unserem Beispiele sehr einfach bewerkstelligt werden; aus Gleichung 203) folgt:

$$g = l\cos\frac{p}{l}\cdot n^2\mathfrak{q}^2$$

und daher

$$\cos\frac{p}{l} = \frac{g}{l\,n^2\mathfrak{q}^2}, \quad \sin\frac{p}{l} = \frac{\sqrt{l^2 n^4 \mathfrak{q}^4 - g^2}}{l\,n^2\mathfrak{q}^2}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Bewegungsgleichungen werden diese von p frei.

Die Energie nimmt die Form an:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L}_\mathfrak{q} &= \tfrac{1}{2}[t_1 + n^2 t_2]\,\mathfrak{q}^2 + \frac{m}{n^2\mathfrak{q}^2}(l^2 n^4 \mathfrak{q}^4 - g^2) \\ &= \tfrac{1}{2}[t_1 + n^2 t_2 + 2\,n^2 m\,l^2]\,\mathfrak{q}^2 - \frac{m\,g^2}{n^2}\cdot\frac{1}{\mathfrak{q}^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 204)$$

Jetzt ist $\mathfrak{L}_\mathfrak{q}$ also nicht mehr homogen vom II. Grade in Bezug auf die cyklische Intensität $\mathfrak{q}$. Dies ist eine Eigentümlichkeit aller unvollständigen Systeme.

Bei unvollständigen Systemen ist die kinetische Energie nicht notwendigerweise eine homogene Funktion II. Grades in den Geschwindigkeiten.

372. Monocykel mit willkürlicher Parameterkoppelung. — Der Centrifugalregulator in seiner einfachsten Form, wie wir ihn in den vorhergehenden Paragraphen betrachteten, gestattet nicht das willkürliche Eingreifen in den Ablauf der cyklischen Bewegung von seiten des langsam veränderlichen Parameters aus. Da aber die Betrachtung von Zustandsänderungen, welche durch Veränderung auch der Parameter

in einem System hervorgerufen werden, für die weitere Entwickelung unserer Theorie von grosser Bedeutung ist, wollen wir ein einfaches und leicht herzustellendes Modell eines Centrifugalregulators beschreiben, bei dem dieses Eingreifen ermöglicht ist. Dasselbe ist aus der wirklichen Ausführung eines höchst instruktiven Schemas hervorgegangen, welches BOLTZMANN an die Spitze seiner Vorlesungen über die MAXWELLsche Theorie stellt.

Dasselbe zeigt besonders schön, wie durch denselben einfachen Mechanismus Erscheinungen aus sehr verschiedenen Gebieten abgebildet werden können. Denn an dem Modell können ebensowohl die Eigenschaften eines mechanischen Monocykels mit einem Parameter illustriert werden, wie die elektromagnetischen Induktionsgesetze als auch die Hauptsätze der Thermodynamik (II. Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, Kreisprozesse, ökonomischer Koeffizient u. s. w.). Die letzterwähnte Analogie ist bereits von BOLTZMANN a. a. O. durchgeführt worden. Bezüglich dieser Verwendung des Modells werden wir uns hier nur mit Hindeutungen begnügen.

Das Modell ist ein in Bezug auf die Rotationsachse völlig symmetrischer Centrifugalregulator mit vier Gewichten, welche, auf horizontalen Schienen gleitend, einen mittleren in der Vertikalrichtung beweglichen Teil heben. Dadurch, dass man an demselben direkt angreift, kann man den Parameter des Systems willkürlich während der cyklischen Bewegung selbst abändern.

Die Ausführung im einzelnen zeigt Fig. 138 in der Seitenansicht, Fig. 138a stellt den oberen Teil des rotierenden Stückes im Querschnitte dar. Auf dem Grundbrette $A\,A$ erhebt sich das vertikale Brett B, welches das horizontale C trägt. Auf A ist zunächst die Antriebsscheibe $U\,U$ mit der Kurbel K leicht um einen Zapfen drehbar befestigt. Von U geht ein Zugkraftorgan in Gestalt des durch das Schlösschen s geschlossenen Riemens $z\,z$ nach der kleinen Scheibe $u\,u$, welche mit dem Zapfen h in einer metallisch ausgelegten Vertiefung des Brettes $A\,A$ mit möglichst geringer Reibung beweglich ist; das Brett B ist unten etwas ausgeschnitten, um dem Riemen $z\,z$ den Vorbeitritt zu gestatten. Auf der kleinen Riemenscheibe $u\,u$ ist ein Gestell aus vier vertikalen Stäben S_1, S_2, S_3, S_4 (vergl. auch Fig. 138a), welche unten und oben durch je ein kreisscheibenförmiges Querstück Q_u bezw. Q_0 zusammengehalten werden, befestigt. Das obere Verbindungsstück $Q_0\,Q_0$ läuft zwischen den drei Friktionsrollen f_1, f_2, f_3, (f_3 ist in der Figur nicht sichtbar), so dass das ganze Gestell beim Drehen an der Kurbel K in Rotation versetzt werden kann.

Durch jeden der Holzstäbe S geht unten und oben je ein schmaler Ausschnitt hindurch; in denselben ist je eine flache, am Rande mit eingetiefter Riefe versehene Holzrolle r_u^1 bis r_u^4 und r_0^1 bis r_0^4 um eine Horizontalachse leicht drehbar. Alle acht Rollen haben den gleichen Durchmesser und ihre Achsen liegen so, dass ihre Ränder im Inneren einen kreiscylindrischen Raum umgrenzen. In diesem steht das unten durch einen Boden verschlossene, oben offene Rohr $R\,R$, welches sich demnach zwischen den zur Führung dienenden Rollen auf und ab bewegen kann; das untere Viertel von R ist mit Blei ausgegossen. Das Rohr ist so lang, dass, wenn es mit seinem Boden auf der Scheibe $u\,u$ aufsteht, sein oberes Ende, welches durch einen kreisförmigen Ausschnitt in $Q_0\,Q_0$ und einen entsprechenden O in C hindurchragt, sich mit seinem Rande mit der Oberfläche von C gerade vergleicht.

Oberhalb der Rollen r_0^1 bis r_0^4 sind an den Holzstangen S_1 bis S_4 horizontale, gleich lange, messingene Träger T_1 bis T_4 von kreisförmigem Querschnitte durch Widerlager und Gegenmuttern befestigt; an den Enden tragen sie kleine Knöpfchen. Auf diesen Trägern können die Bleigewichte G_1 bis G_4 leicht hin- und hergleiten. Sie tragen an ihren Seiten kleine Ösen, in welche Fäden F_1 bis F_4 geknüpft sind. Diese gehen über die oberen Rollen r_0^1 bis r_0^4 hinunter und sind unten in kleinen Drahtösen befestigt, welche an das Rohr R gelötet sind. Die Fadenlänge ist so bemessen, dass die Gewichte gerade bis an die Rollen r_0^1 bis r_0^4 herangezogen sind, wenn das Rohr R unten aufsteht. Setzt man den Apparat in Bewegung, und fliegen die Gewichte infolge der Centrifugalkraft nach aussen, so heben sie das Rohr, welches um ein beliebiges, nur durch die Trägerlänge T begrenztes Stück über C herausragen kann, ohne dass die Rotation irgendwie gestört würde. Man

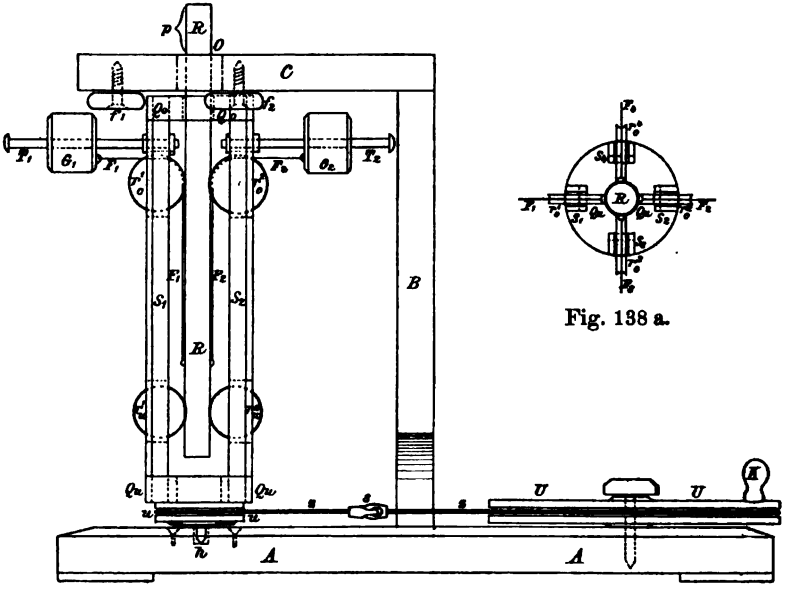


Fig. 138.

Fig. 138 a.

vermag nun aber auch das der Centrifugalkraft das Gleichgewicht haltende Gewicht zu variieren, während die Maschine im Gange ist.

Denn durch Einfüllen von Schrot oder durch Herablassen oder Herausziehen einer schweren Metallkette, die an einem Faden befestigt ist, in das Rohr R oder aus ihm heraus kann man diese Kraft stetig vergrössern oder verkleinern. Alle unsere Formeln beziehen sich auf solche stetige Änderungen. Um den Effekt derselben an dem Modelle noch deutlicher hervortreten zu lassen, empfiehlt es sich, grössere Änderungen plötzlich vorzunehmen (um ein teilweises Festhängen der Gewichte zu überwinden). Zu diesem Zwecke steckt man mehr oder weniger lange massive, unten zugespitzte, oben mit einer Öse an ungedrillten Fäden befestigte Bleicylinder in die Röhre R. Beim Herausnehmen derselben wird die Kraft P wieder vermindert.

Da der Apparat völlig symmetrisch angeordnet ist, und die Gewichtsänderung in der Achse des rotierenden Gestelles erfolgt, so kann man an ihm den Einfluss

einer willkürlichen Parameteränderung auf den Ablauf der Cykelbewegung studieren.

Als langsam veränderlichen Parameter p des durch das Modell Fig. 138 dargestellten Monocykels führen wir die Entfernung der vier Massen m der Gewichte G_1 bis G_4 (vergl. Fig. 138a) von der vertikalen Drehungsachse ein.

Da die Gewichte nicht bis zur Achse selbst herangezogen werden können, so kann p nicht 0 werden und die an unserem Cykel möglichen Parameterwerte sind sowohl zwischen eine untere wie eine obere Grenze eingeschlossen. Die den Parameter p verändernde Schwere ist nach unten gerichtet, durch die Fäden wird die Richtung dieser Parameterkraft dort, wo sie an den Gewichten angreift, in die horizontale verwandelt.

Als cyklische Geschwindigkeit (Intensität) q wählen wir die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich das die Gewichte tragende Gestell dreht. Wir stellen die Bewegungsgleichungen erst ganz allgemein auf und lassen dann die der cyklischen Natur unseres Mechanismus entsprechenden Vereinfachungen eintreten.

Das Trägheitsmoment des Holzgestelles und dasjenige der der Achse nahen Rohrteile kann gegen das Moment der vier Gewichte $T = 4\,m\,p^2$ vernachlässigt werden. Diese haben zwei Grade der Bewegungsfreiheit: erstens können sie sich auf den Kreisbögen vom Radius p bewegen; die in dieser Richtung treibende Kraft rührt von der am Antriebspunkte angreifenden Cykelkraft her; zweitens können sie sich auf den Trägern T_1 bis T_4 nach aussen und nach innen bewegen. Diese Bewegung wird durch den Parameter p bestimmt; die in seine Richtung fallende Kraft ist gleich der Schwere des Rohres R und seiner Belastungen, deren Massen zusammen M sein mögen. Die Kraft wird durch das Produkt der von ihr bewegten Massen $4\,m + M$ in die diesen in ihrer Richtung erteilte Beschleunigung d^2p/dt^2 oder $\ddot{p}$ gemessen, also durch

$$-(4\,m + M)\ddot{p},$$

da sie p zu verkleinern strebt. Infolge der Centrifugalkraft erhalten die Gewichte gleichzeitig eine nach aussen gerichtete, p vergrössernde Beschleunigung $p\,q^2$, d. h. infolge der Cykelbewegung wirkt auf sie die Kraft $+\,4\,m\,p\,q^2$. Wir führen nun die äussere Parameterkraft P durch die Festsetzung ein, dass sie an dem Parameter p wirkend gerade das Gleichgewicht herstelle, dass also

$$-(4\,m + M)\ddot{p} + 4\,m\,p\,q^2 + P = 0$$

oder

$$P = (4\,m + M)\ddot{p} - 4\,m\,p\,q^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 205)$$

sei.

Sobald das System für eine bestimmte Lage der Massen m (für ein bestimmtes p) eine konstante Winkelgeschwindigkeit q erlangt hat, so braucht im Antriebspunkte keine Kraft mehr zu wirken; da das System als reibungslos vorausgesetzt wird, hält es sich von selbst in gleichförmiger Bewegung. In diesem Zustande bewegen sich die Massen m mit der Lineargeschwindigkeit $p\,q$ gleichförmig weiter, sie haben also das gesamte Bewegungsmoment $4\,m\,p\,q$. Wenn man aber q zu vergrössern strebt, so setzt sich dieser Vergrösserung eine der Trägheit des Systems entspringende Kraft entgegen, welche hier also negativ einzuführen ist.

Denkt man sich diese Kraft in den Massen m selbst, also im Abstande p angreifend, so ist ihre Grösse durch

$$-\frac{d(4\,m\,p\,\mathfrak{q})}{d\,t}$$

gegeben. Um diese zurückhaltende Kraft zu überwinden, müsste man eine Kraft $\mathfrak{P}_m$ an einer der Massen m angreifen lassen, für welche $\mathfrak{P}_m - \frac{d(4\,m\,p\,\mathfrak{q})}{d\,t} = 0$ ist.

Soll diese Zusatzkraft aber nicht in der Entfernung p von der Achse, sondern, wie wir es bei den Cykelkräften immer vorausgesetzt haben, in der Entfernung 1 angreifen, so muss sie der zeitlichen Änderung eines p mal grösseren Momentes entgegenwirken; hier bedürfen wir also einer Kraft $\mathfrak{P}$, für welche

$$\mathfrak{P} - \frac{d(4\,m\,p^2\,\mathfrak{q})}{d\,t} = 0$$

ist, d. h. der Kraft

$$\mathfrak{P} = 4\,m\,p^2\,\dot{\mathfrak{q}} + 2\cdot 4\,m\,p\,q\,\mathfrak{q} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 206)$$

Jetzt mögen die allgemeinen Gleichungen des vorigen Kapitels auf unseren Spezialfall Anwendung finden.

Im allgemeinen haben die Massen m neben der Geschwindigkeit $p\,\mathfrak{q}$ im Bogen noch eine von der Änderung von p herrührende: $\dot{p} = q$.

Beide Geschwindigkeitskomponenten liefern Beiträge zur kinetischen Energie $\mathfrak{L}_\mathfrak{q}$; diese selbst ist:

$$\mathfrak{L}_\mathfrak{q} = \tfrac{1}{2}\cdot(4\,m + M)\,q^2 + \tfrac{1}{2}\cdot 4\,m\,p^2\,\mathfrak{q}^2. \quad \ldots\ldots \quad 207)$$

Die kinetische Energie enthält gar nicht die cyklische Koordinate $\mathfrak{p}$, sondern nur ihre Ableitung $\mathfrak{q}$ nach der Zeit.

Die Momente sind:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{f} &= \frac{\partial\,\mathfrak{L}_\mathfrak{q}}{\partial\,\mathfrak{q}} = 4\,m\,p^2\,\mathfrak{q} \\ s &= \frac{\partial\,\mathfrak{L}_\mathfrak{q}}{\partial\,q} = (4m + M)\,q \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 208)$$

Die an den Gewichten m angreifenden Kräfte sind nach den Lagrangeschen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \dot{\mathfrak{f}} - \frac{\partial\,\mathfrak{L}_\mathfrak{q}}{\partial\,\mathfrak{p}} = 4\,m\,p^2\,\dot{\mathfrak{q}} + 2\cdot 4\,m\,p\,q\,\mathfrak{q} \\ P &= \dot{s} - \frac{\partial\,\mathfrak{L}_\mathfrak{q}}{\partial\,p} = (4\,m + M)\,\ddot{p} - 4\,m\,p\,\mathfrak{q}^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 209)$$

wie oben.

Nun wollen wir diejenigen Vereinfachungen in den Gleichungen eintreten lassen, welche für ein cyklisches System charakteristisch sind, vergl. § 369.

Das System wird ein cyklisches, wenn wir voraussetzen, dass die Änderungen des Parameters p so langsam vor sich gehen, dass $q = \dot{p}$ und $\ddot{p}$ klein im Vergleich mit p sowohl als wie mit $\mathfrak{q}$ ist, die im

allgemeinen nicht klein sind; im Zusammenhange mit der dadurch bedingten nur langsamen Änderung in dem Bewegungszustande des ganzen Systems steht es, dass dann auch $\dot{q}$ sehr klein wird im Vergleich zu q selbst. Für das cyklische System ist also:

$$\left.\begin{aligned} P &= -4mpq^2 \\ \mathfrak{P} &= 4mp^2\dot{q} + 2\cdot 4mpqq \\ \mathfrak{L}_{q_1} &= \tfrac{1}{2}4mp^2q^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 210)$$

$\mathfrak{L}_q$ enthält von der cyklischen Koordinate nur die erste Ableitung nach der Zeit q, nicht aber diese selbst oder höhere Ableitungen derselben, von den langsam veränderlichen Parametern nur p; die Glieder, aus denen $\mathfrak{P}$ zusammengesetzt ist, sind beide klein von der I. Ordnung (der Ordnung von q und $\dot{q}$).

Gehen wir von der cyklischen Energie direkt aus, so ist zunächst das cyklische Moment:

$$\mathfrak{f} = \frac{\partial \mathfrak{L}_q}{\partial \dot{q}} = 4mp^2q \quad \ldots\ldots\ldots \quad 208)$$

Da $\partial \mathfrak{L}_q / \partial p$ sowie $\partial \mathfrak{L}_q / \partial q = s$ gleich 0 sind, so vereinfachen sich die LAGRANGEschen Gleichungen 195) § 368.

Die Kräfte sind:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P} &= -\mathfrak{P}' = \dot{\mathfrak{f}} = 4mp^2\dot{q} + 2\cdot 4mpqq \\ P &= -\frac{\partial \mathfrak{L}_q}{\partial p} = -4mpq^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 210)$$

genau übereinstimmend mit den obigen Gleichungen.

373. Monocykel mit zwei Parametern: Beispiel des Gyroskopes. — Wir wollen noch einen Monocykel besprechen, welcher ausser seiner cyklischen Koordinate noch zwei langsam veränderliche Parameter besitzt, und die an diesen zu Tage tretenden Systemkräfte P_1' und P_2' berechnen; daran anschliessend soll namentlich die Grössenordnung der in Frage kommenden analytischen Bestimmungsstücke und der Einfluss dieser Ordnung auf die Gestaltung der die Bewegung bestimmenden Ausdrücke um des folgenden willen besonders betont werden. Wir wählen das berühmte mechanische Beispiel des frei sich drehenden Rotationskörpers, das wir schon in § 210 zur Erläuterung der Reciprocität zwischen elektromagnetischen Bewegungserscheinungen und Induktionsgesetzen (Linke- und Rechte-Handregel) heranzogen.

Dasselbe finden wir im grossen bei der Bewegung der Erde um ihre Achse mit den dieser eigentümlichen Präcessions- und Nutationsbewegungen.

Wir wollen das Trägheitsmoment des Rotationskörpers in Bezug auf die Polarachse mit Π, das äquatoriale Trägheitsmoment mit A bezeichnen. Dann können wir die Energie einer irgendwie gearteten freien Bewegung dieses Rotationskörpers, der etwa wie die Erde eine Rotationsbewegung um die Polarachse mit periodischen Schwankungen

der Präcession und Nutation ausführen mag, in sehr einfacher Weise durch die Summe zweier kinetischer Energien ausdrücken, von denen sich die eine auf die Drehungskomponente um die Polarachse, die andere auf die Komponente um irgend eine der Äquatorialachsen bezieht.

Wir haben schon in § 123 erwähnt, dass man kleine Drehungen um Achsen und damit vor allem Drehungsgeschwindigkeiten durch Vektoren darstellen und diese nach dem Parallelogramm der Vektoren zerlegen und zusammensetzen kann. Ist in einem Augenblicke die Achse, um die sich der Rotationskörper momentan dreht, irgendwie in ihm gelegen, so können wir durch diese „instantane Achse" und die Polarachse des Körpers eine Ebene legen; diese schneidet in der Äquatorialebene eine bestimmte Äquatorialachse aus. Ist $\mathfrak{q}$ die Grösse der Rotationsgeschwindigkeit um die instantane Achse, so können wir durch Projizieren der sie geometrisch darstellenden Strecke auf die Achsen die Drehungskomponenten in Bezug auf die Polar- und auf die Äquatorialachse erhalten; wir wollen sie mit $\mathfrak{q}_\pi$ und $\mathfrak{q}_a$ bezeichnen. Dann ist

$$\mathfrak{q}^2 = \mathfrak{q}_\pi^2 + \mathfrak{q}_a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 211)$$

Wir erhalten nach § 138 bei rotierenden Körpern die kinetische Energie der Rotationsbewegung, wenn wir das Trägheitsmoment des rotierenden Körpers in Bezug auf die Rotationsachse mit dem Quadrat der Drehungsgeschwindigkeit um diese Achse multiplizieren und durch 2 dividieren. Da Π und A die Trägheitsmomente unseres Körpers in Bezug auf die Polarachse und jede beliebige Äquatorialachse waren, so sind $\frac{1}{2}\Pi\mathfrak{q}_\pi^2$ und $\frac{1}{2}A\mathfrak{q}_a^2$ die kinetischen Energien der Partialdrehungen, und da nach Gleichung 211) die Gesamtdrehung nur aus diesen beiden Teilen besteht, so giebt uns

$$\tfrac{1}{2}\Pi\mathfrak{q}_\pi^2 + \tfrac{1}{2}A\mathfrak{q}_a^2$$

die gesamte kinetische Energie $\mathfrak{L}_\mathfrak{q}$ des sich irgendwie bewegenden Rotationskörpers:

$$\mathfrak{L}_\mathfrak{q} = \tfrac{1}{2}\Pi\mathfrak{q}_\pi^2 + \tfrac{1}{2}A\mathfrak{q}_a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 212)$$

Das Gyroskopmodell (Bohnenbergerscher Kreisel), Fig. 95, stellt uns diesen Fall dar. Meist ist bei ihm ein abgeplattetes Elfenbeinellipsoid um die kürzeste Achse drehbar. Beide Trägheitsmomente, das polare Π und das äquatoriale A, unterscheiden sich sehr wesentlich voneinander; letzteres ist erheblich kleiner. Den Winkel, den die Ebene des Ringes r_1 in jedem Augenblicke mit der Ebene von R bildet, wollen wir mit p_1 bezeichnen, so dass $dp_1/dt = \dot{p}_1 = q_1$ die Winkelgeschwindigkeit ist, mit der sich der Ring r_1 um seine vertikale Drehungsachse bewegt; p_1 ist also hier eine allgemeine Koordinate und zwar ein langsam veränderlicher Parameter, vergl. § 210. Wir wollen die äussere Kraft, welche auf den Ring auszuüben ist, um diesen Winkel p_1 konstant zu erhalten, wenn durch Vorgänge in seinem Inneren eine Drehung angestrebt wird, mit P_1 bezeichnen. Wir haben uns also die Kraft P_1 in der Einheit der Entfernung von der Rotationsachse senkrecht zur Ringebene r_1 angreifend zu denken.

Der Winkel, den in irgend einem Augenblick die Ebene von r_2 mit der Ebene von r_1 nach einer Seite hin bildet, sei p_2, so dass $dp_2/dt = \dot{p}_2 = q_2$ die Änderungsgeschwindigkeit dieses Winkels mit der Zeit, d. h. die Drehungsgeschwindigkeit des Ringes r_2 um seine allezeit horizontale Achse ist. Der Winkel p_2 ist also wieder eine allgemeine Koordinate und der zweite (langsam veränderliche) Parameter des Systems; wir wollen die äussere Kraft, welche in jedem Falle aufzuwenden ist, um eine Änderung von p_2 zu verhindern, mit P_2 bezeichnen.

Durch die beiden Koordinaten p_1 und p_2 zusammen ist in jedem Augenblicke die Lage des Ringes r_2 im Raume bestimmt.

In dem Ringe r_2 ist das Elfenbeinellipsoid K so befestigt, dass die Polarachse senkrecht zur Befestigungsachse des Ringes r_2 in der Ringebene liegt. Hält man sonach den Ring r_1 fest und dreht den Ring r_2, so bewegt sich die Polarachse in einer vertikalen Ebene auf und nieder, wobei sie mit der Drehungsachse von Ring r_1 in jeder Lage einen dem Winkel p_2 gleichen Winkel bildet. Auf dem Ellipsoid K denken wir uns einen Meridian markiert. Der Winkel, den dieser in irgend einem Augenblicke mit der Ebene von Ring r_2 bildet, heisse $\mathfrak{p}$. Dann ist $d\mathfrak{p}/dt = \dot{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}$ die Drehungsgeschwindigkeit von K um die Polarachse in Bezug auf Ring r_2. Diese Koordinate ist die cyklische Koordinate des Systems. Die äussere Kraft, welche einer Änderung von $\mathfrak{q}$ entgegenstrebt, sei $\mathfrak{P}$; wir können sie uns etwa an dem Umfange der Rolle u Fig. 95 angreifend denken, wenn wir dieser einen Radius von 1 cm geben.

Durch die Werte der drei Koordinaten, der beiden langsam veränderlichen p_1 und p_2 und der cyklischen $\mathfrak{q}$ (nicht $\mathfrak{p}$ wegen der Homogenität des Materiales)

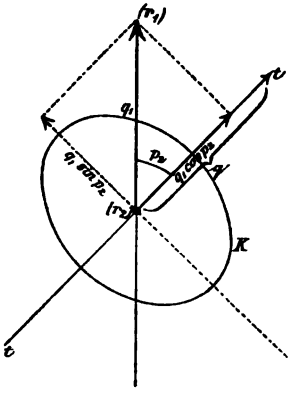


Fig. 139.

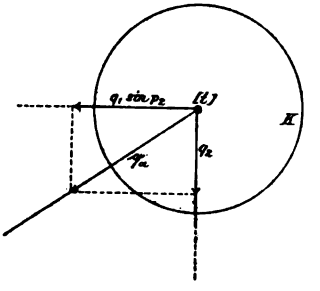


Fig. 140.

ist die Lage der Rotationsachse und der Bewegungszustand des Körpers K, d. h. Achsenrichtung und Geschwindigkeit für jeden Augenblick festgelegt.

Wir wollen annehmen, die Ringe seien so leicht, dass ihr Trägheitsmoment gegen das des Körpers K vernachlässigt werden könne; dann brauchen wir nur das polare und äquatoriale Trägheitsmoment Π und A von K einzuführen.

Es handelt sich bei der Berechnung des Energieinhaltes $\mathfrak{L}_\mathfrak{q}$ nur noch darum, mit welchen Geschwindigkeiten die Achsen, auf die sich Π und A beziehen, rotieren. Bei einer ganz beliebigen Bewegung werden in unserem Falle ganz allgemein Drehungen um alle drei Achsen beteiligt sein; wir müssen $\mathfrak{L}_\mathfrak{q}$ also durch die drei Grössen q_1, q_2 und $\mathfrak{q}$ ausdrücken.

1. Berechnung der Drehungskomponente in Bezug auf die Polarachse. In Fig. 139 sind aus dem Modell Fig. 95 die Drehungsachsen herausgezeichnet, die sich ja alle geeignet verlängert im Mittelpunkt von K treffen würden, und auf ihnen die bezw. Rotationsgeschwindigkeiten abgetragen. Fig. 139 zeigt die Drehungsachse von r_2 zu einem Punkte verkürzt, die Zeichnungsebene ist also durch die vertikale Drehungsachse des Ringes r_1 und die um den Winkel p_2 gegen diese geneigte Polarachse t gelegt. Die Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit q_1 in Bezug auf die Polarachse t und die der Zeichnungsebene entsprechende

dazu senkrecht stehende Äquatorialachse t' sind offenbar $q_1 \cos p_2$ und $q_1 \sin p_2$. Die zu t senkrecht erfolgende Drehung des Ringes r_2 liefert den Betrag 0 in die Richtung der Polarachse, also ist

$$\mathfrak{q}_\pi = \mathfrak{q} + q_1 \cos p_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 213)$$

2. Berechnung der Drehungskomponente in Bezug auf die Äquatorialachse. Fig. 140 giebt eine Ansicht in der Richtung der Polarachse tt, diese also zu einem Punkte verkürzt. Die Zeichnungsebene geht durch den Äquator von K und zeigt hier die Drehungskomponenten q_2 und $q_1 \sin p_2$, letztere von der Drehung um die Achse von r_1 herrührend. Die beiden Komponenten stehen senkrecht zu einander. Für ihre Resultante $\mathfrak{q}_a$ ergiebt sich:

$$\mathfrak{q}_a^2 = q_2^2 + (q_1 \sin p_2)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 214)$$

$\mathfrak{q}$ liefert keinen Beitrag, weil es auf der Äquatorialebene senkrecht steht.

Bei der von uns getroffenen Wahl der Koordinaten ist dann der Ausdruck für die gesamte kinetische Energie entsprechend dem Ausdruck 212) mit Rücksicht auf 213) und 214)

$$\mathfrak{L}_\mathfrak{q} = \tfrac{1}{2} \Pi [\mathfrak{q} + q_1 \cos p_2]^2 + \tfrac{1}{2} A [q_2^2 + q_1^2 \sin^2 p_2] \quad \ldots \quad 215)$$

$\mathfrak{L}_\mathfrak{q}$ ist in der That eine homogene Funktion II. Grades in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten:

$$\mathfrak{L}_\mathfrak{q} = \tfrac{1}{2} \Pi \mathfrak{q}^2 + \tfrac{1}{2} (\Pi \cos^2 p_2 + A \sin^2 p_2) q_1^2 + \tfrac{1}{2} A q_2^2 + \Pi \cos p_2 \cdot \mathfrak{q} q_1. \quad 215a)$$

In den Koefficienten treten die Koordinaten selbst und die Konstanten des Problems auf, doch spielt nur ein Parameter p_2 eine Rolle, der andere ist vollkommen willkürlich, wovon man sich leicht überzeugt.

Man kann z. B. das Modell Fig. 95 um die vertikale Achse des Ringes r_1 drehen, indem man den Ring R um diese Achse dreht, ohne an der Bewegung des Systems etwas zu ändern.

Die Momente sind:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{f} &= \frac{\partial \mathfrak{L}_\mathfrak{q}}{\partial \mathfrak{q}} = \Pi \mathfrak{q} + \Pi \cos p_2 \cdot q_1 \\ s_1 &= \frac{\partial \mathfrak{L}_\mathfrak{q}}{\partial q_1} = (\Pi \cos^2 p_2 + A \sin^2 p_2) q_1 + \Pi \cos p_2 \cdot \mathfrak{q} \\ s_2 &= \frac{\partial \mathfrak{L}_\mathfrak{q}}{\partial q_2} = A q_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 216)$$

also homogene lineare Funktionen in den Geschwindigkeiten $\mathfrak{q}$, q_1, q_2.

Durch Multiplizieren dieser drei Gleichungen mit $\mathfrak{q}$, q_1, q_2 und Addieren erhält man augenscheinlich den Wert $2\,\mathfrak{L}$ wieder (Eulerscher Satz).

Nach den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen, § 368, ergeben sich hieraus für die Kräfte:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \dot{\mathfrak{f}} - \frac{\partial \mathfrak{L}_\mathfrak{q}}{\partial \mathfrak{p}} = \frac{d}{dt} [\Pi (\mathfrak{q} + \cos p_2 \cdot q_1)] \\ P_1 &= \dot{s}_1 - \frac{\partial \mathfrak{L}_\mathfrak{q}}{\partial p_1} = \frac{d}{dt} [(\Pi \cos^2 p_2 + A \sin^2 p_2) q_1 + \Pi \cos p_2 \cdot \mathfrak{q}] \\ P_2 &= \dot{s}_2 - \frac{\partial \mathfrak{L}_\mathfrak{q}}{\partial p_2} = \frac{d}{dt} [A q_2] - (-\Pi \cos p_2 \sin p_2 + A \sin p_2 \cos p_2) q_1^2 \\ &\qquad + \Pi \sin p_2 \cdot \mathfrak{q} q_1 \end{aligned}\right\} \quad 217)$$

oder da die Trägheitsmomente von der Zeit unabhängig sind, aber p_2 Funktion der Zeit ist,

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{P} &= \Pi(\dot{\mathfrak{q}} + \cos p_2 \cdot \dot{q}_1 - \sin p_2 \cdot q_1 q_2) \\
P_1 &= (\Pi \cos^2 p_2 + A \sin^2 p_2)\dot{q}_1 - 2[\sin p_2 \cos p_2 (\Pi - A)] q_1 q_2 \\
&\qquad - \Pi \sin p_2 \cdot \mathfrak{q} q_2 + \Pi \cos p_2 \cdot \dot{\mathfrak{q}} \\
P_2 &= A\dot{q}_2 + [\sin p_2 \cos p_2 (\Pi - A)] q_1^2 + \Pi \sin p_2 \, \mathfrak{q} q_1
\end{aligned}\right\} \quad 217\text{a})$$

Fortwährend sind Kräfte thätig, welche die Grösse der Parameter konstant zu erhalten suchen, also äussere Kräfte, wie wir sie hier vorausgesetzt und durch P_1 und P_2 bezeichnet haben. Die inneren Systemkräfte, welche die entsprechenden Koordinaten zu vergrössern streben, sind ihnen bis auf das Vorzeichen gleich; das letztere ist entgegengesetzt. Zu den äusseren Kräften gehören bei dem Modelle die der Reibung in den Lagern und an der Luft; sie werden von den inneren überwunden.

Das System führt eine Präcessionsbewegung der Achse aus; dieselbe erfolgt nur äusserst langsam. Gross ist in unseren Gleichungen daher nur $\mathfrak{q}$. Dagegen sind q_1 und q_2 klein von I. Ordnung. Da die Rotationsgeschwindigkeit eine grosse Anzahl von Perioden andauert, so ist auch $\dot{\mathfrak{q}}$ klein von derselben Ordnung. Dagegen sind die Grössen $\dot{q}_1$ und $\dot{q}_2$ sowie das Produkt $q_1 q_2$ und das Quadrat q_1^2 klein von der II. Ordnung. Behalten wir in dem Ausdrucke für die Energie 215a) nur die endlichen Glieder bei, so ergiebt sich für diesen und für das cyklische Moment

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{L}_{\mathfrak{q}} &= \tfrac{1}{2}\Pi \mathfrak{q}^2 \\
\mathfrak{f} &= \Pi \mathfrak{q}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 218)$$

Für alle echten Monocykel ist das Moment der cyklischen Intensität proportional, und zwar ist der Proportionalitätsfaktor eine allezeit positive Grösse, so dass Steigerung der Intensität bei festgehaltenen Parametern auch Steigerung des cyklischen Momentes zur Folge hat. So war beim einfachen parameterlosen Cykel § 138 $\mathfrak{f} = T\mathfrak{q}$, wo T das gesamte Trägheitsmoment ist, und $\mathfrak{L} = \frac{1}{2} T_{\mathfrak{q}} \mathfrak{q}^2$. Dies entspricht den Formeln $\frac{1}{2}(m v) v$ für die gewöhnliche Form der kinetischen Energie, $\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi}(\mu \mathfrak{H})\mathfrak{H}$ für die magnetische Feldenergie, $\frac{1}{2}(L i) i$ für die elektromagnetische Energie eines Stromfeldes, wo die eingeklammerten Grössen die (jederzeit positiven) Momente sind.

Berücksichtigen wir noch die Glieder I. Ordnung, so behalten die Momente die Gestalt 216), die Kräfte dagegen werden

$$\left.\begin{aligned}
-\mathfrak{P}' &= \mathfrak{P} = \Pi \dot{\mathfrak{q}} \\
-P_1' &= P_1 = -\Pi \sin p_2 \cdot \mathfrak{q} q_2 + \Pi \cos p_2 \cdot \dot{\mathfrak{q}} \\
-P_2' &= P_2 = \quad \Pi \sin p_2 \cdot \mathfrak{q} q_1
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 219)$$

B) Energie polycyklischer Systeme.

Hatten wir im vorhergehenden Abschnitt A) in den allgemeinen Zustandsgleichungen spezieller Systeme die jeweiligen Vereinfachungen

eintreten lassen, welche aus ihrer cyklischen Natur hervorgehen, so wollen wir jetzt die entsprechenden Umformungen mit den allgemeinen Gleichungen des vorigen Kapitels vornehmen und treten damit in die von HELMHOLTZ begründete allgemeine Cykeltheorie ein.

Wir nehmen an, dass das hier zu betrachtende System ein streng cyklisches sei, d. h. dass die Veränderungen der langsam variablen Parameter so klein sind, dass ihre Änderungsgeschwindigkeiten gleich 0 gesetzt werden können. Aus den modifizierten Gleichungen für die Energie ergeben sich dann diejenigen für die Momente und die Kraftmomente, § 366, ohne weiteres.

374. Formen der Energie des Polycykels. — Die kinetische Energie eines bewegten Systems ist (im allgemeinen immer bei „vollständigen" Systemen, bei denen die § 371 besprochene Elimination noch nicht stattgefunden hat, was wir hier immer voraussetzen können) eine homogene Funktion II. Grades aller q, § 358. Da bei dem Polycykel alle q klein von I. Ordnung sind, die Koefficienten A, § 360, aber sämtlich endliche Werte besitzen, so können wir alle Glieder, welche in solche q multipliziert sind, als klein von I. bezw. II. Ordnung weglassen und uns auf die in q multiplizierten Glieder beschränken, vergl. die Beispiele der §§ 372 und 373. Dann nimmt die Energie des cyklischen Systems, welche wir durch den gotischen Buchstaben $\mathfrak{L}$ bezeichnen wollen, die Form an:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{L}_q = \tfrac{1}{2}\,[&A_{11}\,q_1\,q_1 + A_{12}\,q_1\,q_2 + \cdots + A_{1\vartheta}\,q_1\,q_\vartheta + \cdots + A_{1\mathfrak{h}}\,q_1\,q_\mathfrak{h}\\
&+ A_{21}\,q_2\,q_1 + A_{22}\,q_2\,q_2 + \cdots + A_{2\vartheta}\,q_2\,q_\vartheta + \cdots + A_{2\mathfrak{h}}\,q_2\,q_\mathfrak{h}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+ A_{\eta 1}\,q_\eta\,q_1 + A_{\eta 2}\,q_\eta\,q_2 + \cdots + A_{\eta\vartheta}\,q_\eta\,q_\vartheta + \cdots + A_{\eta\mathfrak{h}}\,q_\eta\,q_\mathfrak{h}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+ A_{\mathfrak{h}1}\,q_\mathfrak{h}\,q_1 + A_{\mathfrak{h}2}\,q_\mathfrak{h}\,q_2 + \cdots + A_{\mathfrak{h}\vartheta}\,q_\mathfrak{h}\,q_\vartheta + \cdots + A_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}}\,q_\mathfrak{h}\,q_\mathfrak{h}]
\end{aligned}\right\} \quad 220)$$

Da wir mit HERTZ alle Kräfte in cyklischen Systemen auf die Wirkung bewegter Massen zurückführen und etwaige Anziehungs- oder Abstossungswirkungen durch unvermittelte Fernkräfte prinzipiell ausschliessen, so ist der gesamte Energieinhalt unseres Systems kinetischer Natur. Die über die Gesamtenergie des Systems zu machenden Aussagen sind mit Angabe des Ausdruckes 220) erschöpft. Alles weitere sind nur einfache analytische Konsequenzen desselben.

Dem in § 360 Gesagten entsprechend sind alle A_{11}, A_{22}, $\cdots$, A_{η} , $\cdots$, $A_{\vartheta\vartheta}$, $\cdots$ $A_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}}$ positive Grössen; ferner ist allgemein $A_{\vartheta\eta} = A_{\eta\vartheta}$. Die A sind Funktionen lediglich der langsam veränderlichen Parameter p_r, nicht mehr der p_ϑ. $\mathfrak{L}_q$ ist eine homogene Funktion II. Grades

der cyklischen Intensitäten. Da $\mathfrak{L}_q$ nur Funktion der p_r und der q_ϑ ist, so sind alle

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_q}{\partial q_r} = s_r = 0 \quad \ldots \quad 221)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_q}{\partial p_\vartheta} = 0 \quad \ldots \quad 222)$$

d. h. von den Momenten existieren nur die den cyklischen Variablen entsprechenden Momente f. Bilden wir den Ausdruck für die Energie in den Momenten (vergl. § 363), so brauchen wir nur die in cyklische Momente multiplizierten Glieder beizubehalten:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{L}_f = \tfrac{1}{2}[&B_{11} f_1 f_1 + B_{12} f_1 f_2 + \cdots + B_{1\vartheta} f_1 f_\vartheta + \cdots + B_{1\mathfrak{h}} f_1 f_\mathfrak{h} \\ &+ B_{21} f_2 f_1 + B_{22} f_2 f_2 + \cdots + B_{2\vartheta} f_2 f_\vartheta + \cdots + B_{2\mathfrak{h}} f_2 f_\mathfrak{h} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ B_{\eta 1} f_\eta f_1 + B_{\eta 2} f_\eta f_2 + \cdots + B_{\eta\vartheta} f_\eta f_\vartheta + \cdots + B_{\eta\mathfrak{h}} f_\eta f_\mathfrak{h} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ B_{\mathfrak{h}1} f_\mathfrak{h} f_1 + B_{\mathfrak{h}2} f_\mathfrak{h} f_2 + \cdots + B_{\mathfrak{h}\vartheta} f_\mathfrak{h} f_\vartheta + \cdots + B_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}} f_\mathfrak{h} f_\mathfrak{h}]\end{aligned}\right\} \quad 223)$$

Die B stehen zu den entsprechenden A in dem schon früher (Formelgruppe 179) § 363) bezeichneten Verhältnisse; auch hier ist $B_{\eta\vartheta} = B_{\vartheta\eta}$.

Die Systemenergie ist eine homogene Funktion II. Grades der cyklischen Momente. Die B sind Funktionen nur der p_r. Da in $\mathfrak{L}$ nur p_r und f_ϑ vorkommen, so ist

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_f}{\partial s_r} = q_r = 0 \quad \ldots \quad 224)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_f}{\partial p_\vartheta} = 0 \quad \ldots \quad 225)$$

375. Die cyklischen Momente. — Differenzieren wir die Energie $\mathfrak{L}_q$ nach den q_η, so erhalten wir wie früher § 361 die entsprechenden Momente f_η:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mathfrak{L}_q}{\partial q_1} &= f_1 = A_{11} q_1 + A_{12} q_2 + \cdots + A_{1\vartheta} q_\vartheta + \cdots + A_{1\mathfrak{h}} q_\mathfrak{h} \\ \frac{\partial \mathfrak{L}_q}{\partial q_2} &= f_2 = A_{21} q_1 + A_{22} q_2 + \cdots + A_{2\vartheta} q_\vartheta + \cdots + A_{2\mathfrak{h}} q_\mathfrak{h} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \mathfrak{L}_q}{\partial q_\eta} &= f_\eta = A_{\eta 1} q_1 + A_{\eta 2} q_2 + \cdots + A_{\eta\vartheta} q_\vartheta + \cdots + A_{\eta\mathfrak{h}} q_\mathfrak{h} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \mathfrak{L}_q}{\partial q_\mathfrak{h}} &= f_\mathfrak{h} = A_{\mathfrak{h}1} q_1 + A_{\mathfrak{h}2} q_2 + \cdots + A_{\mathfrak{h}\vartheta} q_\vartheta + \cdots + A_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}} q_\mathfrak{h}\end{aligned}\right\} \quad 226$$

Die cyklischen Momente $\mathfrak{f}$ sind homogene lineare Funktionen aller cyklischen Intensitäten $\mathfrak{q}$.

Der Vergleich mit 181) ergiebt, dass auch hier

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_\mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{f}_\eta} = \mathfrak{q}_\eta \quad \ldots \ldots \ldots \quad 227)$$

ist.

Der Eulersche Satz nimmt die Formen an:

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^{\mathfrak{h}}{}_\eta \, \mathfrak{q}_\eta \frac{\partial \mathfrak{L}_\mathfrak{q}}{\partial \mathfrak{q}_\eta} &= \sum_1^{\mathfrak{h}}{}_\eta \, \mathfrak{q}_\eta \, \mathfrak{f}_\eta = 2\,\mathfrak{L}_\mathfrak{q} \\ \sum_1^{\mathfrak{h}}{}_\eta \, \mathfrak{f}_\eta \frac{\partial \mathfrak{L}_\mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{f}_\eta} &= \sum_1^{\mathfrak{h}}{}_\eta \, \mathfrak{f}_\eta \, \mathfrak{q}_\eta = 2\,\mathfrak{L}_\mathfrak{f} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 228)$$

Für Monocykel reduzieren sich diese Gleichungen auf

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{f} &= A_{11}\,\mathfrak{q}, \qquad \mathfrak{L} = \tfrac{1}{2} A_{11}\,\mathfrak{q}^2, \\ \mathfrak{f} &= \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{q}}, \text{ oder } \mathfrak{L} = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{f} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 229)$$

wo A_{11} eine positive Grösse ist. In der That sind dies die schon in § 138 abgeleiteten Formeln; A_{11} ist dort das Trägheitsmoment T, also positiv.

Um uns später direkt darauf berufen zu können, schreiben wir die Formeln 227) und 226) noch einmal für die Indices ϑ und η aus:

$$\mathfrak{q}_\vartheta = \frac{\partial \mathfrak{L}_\mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{f}_\vartheta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 230)$$

beide Seiten der Gleichungen stellen Funktionen nur der p und der $\mathfrak{f}$ dar; ferner

$$\mathfrak{f}_\eta = \frac{\partial \mathfrak{L}_\mathfrak{q}}{\partial \mathfrak{q}_\eta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 231)$$

beide Seiten stellen nur Funktionen der p und der $\mathfrak{q}$ dar; denn es ist

$$\mathfrak{f}_\eta = A_{\eta 1}\,\mathfrak{q}_1 + A_{\eta 2}\,\mathfrak{q}_2 + \cdots + A_{\eta\vartheta}\,\mathfrak{q}_\vartheta + \cdots + A_{\eta\mathfrak{h}}\,\mathfrak{q}_\mathfrak{h} \quad \ldots \quad 226\,a)$$

376. Die polycyklischen Bewegungsgleichungen. — Die Bewegungsgleichungen definieren die verallgemeinerten Kraftmomente durch Ableitungen der Systemenergie § 368, Formeln 195) und 196). Von diesen letzteren fallen hier aber einige mit Rücksicht auf 221) und 222), sowie 224) und 225), § 374, weg.

a) Für die an cyklischen Koordinaten angreifenden Systemkräfte erhält man:

$$\mathfrak{P}_\vartheta' = -\,\mathfrak{P}_\vartheta = -\,\mathfrak{f}_\vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \quad 232)$$

da $\frac{\partial \mathfrak{L}_\mathfrak{q}}{\partial p_\vartheta}$ nach 222) wegfällt.

Die Cykelkraft (E.M.K. im Beispiele der Induktionswirkungen) hängt von der zeitlichen Änderung des Momentes ab (des elektromagnetischen Momentes, der umschlossenen Kraftlinienzahl). Das ist die Formel 26), welche wir schon in § 139 direkt ableiteten. Da $\mathfrak{P}$ ohne Index dort die von aussen auf den Cykel wirkende Kraft war, so ist Formel 232) für diesen Fall

$$\mathfrak{P} = \dot{\mathfrak{f}} = \frac{d\mathfrak{f}}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 26)$$

Unsere Formel giebt die Verallgemeinerung der früher angestellten Betrachtungen auf beliebig viele, miteinander in Verbindung stehende cyklische Systeme (z. B. Stromsysteme; verallgemeinertes Induktionsgesetz), vergl. § 275, Formel 66).

Etwas mehr in extenso geschrieben, lauten also die Ausdrücke für die Cykelkräfte:

$$\mathfrak{P}_\vartheta' = -\mathfrak{P}_\vartheta = -\frac{d}{dt}(A_{\vartheta 1}\mathfrak{q}_1 + A_{\vartheta 2}\mathfrak{q}_2 + \cdots + A_{\vartheta\vartheta}\mathfrak{q}_\vartheta + \cdots + A_{\vartheta\mathfrak{h}}\mathfrak{q}_\vartheta) \quad 232\,a)$$

Sowohl die A wie die $\mathfrak{q}$ hängen von der Zeit ab, die ersteren, weil sie die p_r enthalten, welche Funktionen der Zeit sind. Führen wir also die Differentiation nach t aus, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{P}_\vartheta' = -\mathfrak{P}_\vartheta = -[&A_{\vartheta 1}\dot{\mathfrak{q}}_1 + A_{\vartheta 2}\dot{\mathfrak{q}}_2 + \cdots + A_{\vartheta\vartheta}\dot{\mathfrak{q}}_\vartheta + \cdots + A_{\vartheta\mathfrak{h}}\dot{\mathfrak{q}}_\vartheta] \\
&- \Big[\Big(\frac{\partial A_{\vartheta 1}}{\partial p_1}q_1 + \frac{\partial A_{\vartheta 1}}{\partial p_2}q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta 1}}{\partial p_r}q_r + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta 1}}{\partial p_k}q_k\Big)\mathfrak{q}_1 \\
&+ \Big(\frac{\partial A_{\vartheta 2}}{\partial p_1}q_1 + \frac{\partial A_{\vartheta 2}}{\partial p_2}q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta 2}}{\partial p_r}q_r + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta 2}}{\partial p_k}q_k\Big)\mathfrak{q}_2 \\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \Big(\frac{\partial A_{\vartheta\vartheta}}{\partial p_1}q_1 + \frac{\partial A_{\vartheta\vartheta}}{\partial p_2}q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta\vartheta}}{\partial p_r}q_r + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta\vartheta}}{\partial p_k}q_k\Big)\mathfrak{q}_\vartheta \\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \Big(\frac{\partial A_{\vartheta\mathfrak{h}}}{\partial p_1}q_1 + \frac{\partial A_{\vartheta\mathfrak{h}}}{\partial p_2}q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta\mathfrak{h}}}{\partial p_r}q_r + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta\mathfrak{h}}}{\partial p_k}q_k\Big)\mathfrak{q}_\mathfrak{h}\Big]
\end{aligned}\right\} \quad 232\,b)$$

Da die $\dot{\mathfrak{q}}$ sowohl wie alle q klein von der ersten Ordnung, die Koeffizienten aber endlich sind, so sind auch die Cykelkräfte $\mathfrak{P}$ sämtlich klein von der ersten Ordnung.

b) Für die an Parametern angreifenden Kräfte erhält man aus 195 a)

$$P_r' = -P_r = \frac{\partial \mathfrak{L}_\mathfrak{q}}{\partial p_r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 233)$$

oder aus 196)

$$P_r' = -P_r = -\frac{\partial \mathfrak{L}_\mathfrak{f}}{\partial p_r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 234)$$

da hier nach 221) die entsprechenden Momente wegfallen.

Da die Parameter p nur noch in den Koeffizienten A bezw. B enthalten sind, lauten die beiden letzten Formeln etwas mehr in extenso

und des späteren Gebrauches wegen für die Indices i bezw. a geschrieben:

$$
\left.\begin{aligned}
P_i' &= -P_i \\
&= \tfrac{1}{2}\Big[\frac{\partial A_{11}}{\partial p_i} q_1 q_1 + \frac{\partial A_{12}}{\partial p_i} q_1 q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{1\vartheta}}{\partial p_i} q_1 q_\vartheta + \cdots + \frac{\partial A_{1\mathfrak{h}}}{\partial p_i} q_1 q_\mathfrak{h} \\
&\quad + \frac{\partial A_{21}}{\partial p_i} q_2 q_1 + \frac{\partial A_{22}}{\partial p_i} q_2 q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{2\vartheta}}{\partial p_i} q_2 q_\vartheta + \cdots + \frac{\partial A_{2\mathfrak{h}}}{\partial p_i} q_2 q_\mathfrak{h} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + \frac{\partial A_{\eta 1}}{\partial p_i} q_\eta q_1 + \frac{\partial A_{\eta 2}}{\partial p_i} q_\eta q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{\eta\vartheta}}{\partial p_i} q_\eta q_\vartheta + \cdots + \frac{\partial A_{\eta\mathfrak{h}}}{\partial p_i} q_\eta q_\mathfrak{h} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + \frac{\partial A_{\mathfrak{h}1}}{\partial p_i} q_\mathfrak{h} q_1 + \frac{\partial A_{\mathfrak{h}2}}{\partial p_i} q_\mathfrak{h} q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{\mathfrak{h}\vartheta}}{\partial p_i} q_\mathfrak{h} q_\vartheta + \cdots + \frac{\partial A_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}}}{\partial p_i} q_\mathfrak{h} q_\mathfrak{h}\Big]
\end{aligned}\right\} \quad 233\,a)
$$

Die A sind nur Funktionen der p.

$$
\left.\begin{aligned}
P_a' &= -P_a \\
&= -\tfrac{1}{2}\Big[\frac{\partial B_{11}}{\partial p_a} f_1 f_1 + \frac{\partial B_{12}}{\partial p_a} f_1 f_2 + \cdots + \frac{\partial B_{1\vartheta}}{\partial p_a} f_1 f_\vartheta + \cdots + \frac{\partial B_{1\mathfrak{h}}}{\partial p_a} f_1 f_\mathfrak{h} \\
&\quad + \frac{\partial B_{21}}{\partial p_a} f_2 f_1 + \frac{\partial B_{22}}{\partial p_a} f_2 f_2 + \cdots + \frac{\partial B_{2\vartheta}}{\partial p_a} f_1 f_\vartheta + \cdots + \frac{\partial B_{2\mathfrak{h}}}{\partial p_a} f_2 f_\mathfrak{h} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + \frac{\partial B_{\eta 1}}{\partial p_a} f_\eta f_1 + \frac{\partial B_{\eta 2}}{\partial p_a} f_\eta f_2 + \cdots + \frac{\partial B_{\eta\vartheta}}{\partial p_a} f_\eta f_\vartheta + \cdots + \frac{\partial B_{\eta\mathfrak{h}}}{\partial p_a} f_\eta f_\mathfrak{h} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + \frac{\partial B_{\mathfrak{h}1}}{\partial p_a} f_\mathfrak{h} f_1 + \frac{\partial B_{\mathfrak{h}2}}{\partial p_a} f_\mathfrak{h} f_2 + \cdots + \frac{\partial B_{\mathfrak{h}\vartheta}}{\partial p_a} f_\mathfrak{h} f_\vartheta + \cdots + \frac{\partial B_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}}}{\partial p_a} f_\mathfrak{h} f_\mathfrak{h}\Big]
\end{aligned}\right\} \quad 234\,a)
$$

Die B sind lediglich Funktionen der p.

Die Kräfte eines cyklischen Systems nach seinen Parametern sind unabhängig von den Änderungsgeschwindigkeiten und den Momenten dieser Parameter selbst und sind nur (homogene quadratische) Funktionen der cyklischen Intensitäten oder der cyklischen Momente.

C) Arbeitsleistungen polycyklischer Systeme.

Wir denken uns in einem Felde beliebig viele Ströme gegeben; dieselben können auf lineare Strombahnen beschränkt sein, sie können sich aber auch in leitenden Gebieten flächenhaft oder räumlich ausbreiten. Wir haben es dann mit einem Polycykel sehr allgemeiner Natur zu thun, für den wir die Arbeitsumsetzungen berechnen wollen. Die älteren Anschauungen hatten zu ihrer Bestimmung die auf der Hypothese der unmittelbaren Fernewirkungen beruhenden „Potentiale“

zur Verfügung; die Potentialänderung bei der Bewegung eines Stromkreises in einem Magnetfelde z. B. liess die verbrauchte oder geleistete Arbeitsmenge berechnen. Wir wollen zeigen, dass auch unsere, von diesem Verfahren gänzlich abweichende Betrachtungsweise eine eindeutige Bestimmung jener Arbeiten ermöglicht und stellen zu diesem Zwecke hier zunächst nur die Ausdrücke für diese Arbeitsleistungen zusammen, dem nächsten Kapitel die weitere Ausführung überlassend.

377. Arbeit der Kräfte, welche ein Polycykel nach aussen ausübt. — *α*) Arbeit der Kräfte, welche auf Parameter des Systems wirken. — Wenn auf den Parameter p_i von dem System aus die Kraft P_i' wirkt, so ist das System imstande, mittels der Kraft P_i' an dem Parameter p_i eine Arbeit nach aussen hin zu leisten. Ändert der Parameter p_i seinen augenblicklichen Wert um dp_i, so ist die von der Kraft geleistete Arbeit gleich $P_i' \cdot dp_i$; dabei ist P_i' nach § 366 positiv so gezählt, dass sie den Parameter zu vergrössern strebt. Denkt man sich die Änderung dp_i in der Zeit dt erfolgend, so ist die entsprechende Arbeit

$$a_i' \cdot dt = P_i' \cdot dp_i \quad \ldots \ldots \ldots \quad 235)$$

Hier ist a_i' offenbar die auf die Zeiteinheit berechnete Arbeit oder der Arbeitseffekt, § 230.

Erleiden unter dem Einfluss der von dem System ausgeübten Kräfte gleichzeitig mehrere oder alle Parameter derartige kleine Änderungen, so ist die gesamte Arbeit, welche von dem System in der Zeit dt geleistet wird, $A' \cdot dt$, gleich der Summe aller Einzelarbeiten:

$$A' \cdot dt = P_1' \cdot dp_1 + P_2' \cdot dp_2 \ldots + P_i' \cdot dp_i + \ldots + P_k' \cdot dp_k \quad 236)$$

Hier ist A' die auf die Zeiteinheit berechnet gedachte Gesamtarbeit des Systems, soweit sie an den Parametern geleistet wird.

β) Arbeit der Kräfte, welche auf cyklische Koordinaten des Systems wirken. — Auch an den cyklischen Koordinaten kann das System Arbeit verrichten. Hier äussert sie sich in Steigerung der cyklischen Intensität oder des cyklischen Momentes. Für $\mathfrak{P}' \cdot d\mathfrak{p}$ können wir schreiben $\mathfrak{P}' \cdot \mathfrak{q} \cdot dt$. Analog wie bei *α*) können wir dann setzen:

$$\mathfrak{a}_\vartheta' \cdot dt = \mathfrak{P}_\vartheta' \cdot \mathfrak{q}_\vartheta \cdot dt \quad \ldots \ldots \ldots \quad 237)$$

und bei mehreren Einzelarbeiten:

$$\mathfrak{A}' \cdot dt = (\mathfrak{P}_1' \cdot \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{P}_2' \cdot \mathfrak{q}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_\vartheta' \cdot \mathfrak{q}_\vartheta + \ldots + \mathfrak{P}_\mathfrak{h}' \cdot \mathfrak{q}_\mathfrak{h}) dt \quad 238)$$

Hier ist wieder $\mathfrak{A}'$ die auf die Zeiteinheit bezogene Gesamtarbeit des Systems, soweit sie an den cyklischen Koordinaten geleistet wird, also die Anzahl der Voltampères der betrachteten Ströme, § 231.

378. Abgegebene Arbeit. Beziehung zum Energieinhalte des Systems. — Wenn die von dem System auf die Parameter ausgeübten Kräfte es sind, welche, wie im vorhergehenden angenommen wurde, die Arbeit leisten, so wird diese Arbeit von dem System nach aussen hin abgegeben. Dies kann nach dem Prinzip von der Erhaltung der Energie nur auf Kosten der inneren Energie, dem „Energieinhalte" des Systems, wie wir sagen wollen, geschehen. Wir wollen in diesem Falle die Arbeit durch ein darüber gesetztes — Zeichen bezeichnen, so dass

$$\bar{A}' \cdot dt = P_1' \cdot dp_1 + P_2' \cdot dp_2 + \ldots + P_i' \cdot dp_i + \ldots + P_k' \cdot dp_k \quad 236\,\mathbf{a})$$

die in der Zeit dt von dem System an den Parametern nach aussen abgegebene Energiemenge,

$$\bar{\mathfrak{A}}' \cdot dt = (\mathfrak{P}_1' \cdot \dot{q}_1 + \mathfrak{P}_2' \cdot \dot{q}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_\varphi' \cdot \dot{q}_\varphi + \ldots + \mathfrak{P}_\psi' \cdot \dot{q}_\psi)\, dt \quad 238\,\mathbf{a})$$

die in derselben Zeit an den cyklischen Koordinaten abgegebene Energiemenge ist.

Nun wollen wir einen einfachen, aber folgewichtigen Schluss ziehen, bei dem wir an die in den beiden vorigen Abschnitten auseinandergesetzten Eigenschaften der polycyklischen Systeme anknüpfen: Der Zustand eines solchen Systems ist vollkommen durch die Angabe seiner Parameter und seiner cyklischen Intensitäten bestimmt. Durch sie ist sowohl der Einfluss der direkt wahrnehmbaren wie der nur durch ihre Koppelungen mit diesen erschliessbaren „verborgenen" Massen berücksichtigt. Durch sie ist also auch das wichtigste Bestimmungsstück eines solchen ganz allgemeinen Systems, der Wert E, den seine Energie in einem bestimmten Augenblicke hat, eindeutig festgelegt. Addieren wir also die Beträge 236 a) und 238 a), so kann dieser Energiebetrag nur der gesamten Eigenenergie E des Systems entstammen; wir erhalten also

$$-dE = (\bar{A}' + \bar{\mathfrak{A}}')\, dt \quad \ldots \ldots \ldots \quad 239)$$

der von dem gesamten Kräftesystem nach aussen hin abgegebene Betrag an Arbeitsleistung ist also gleich der Verminderung, welche der Energieinhalt des Systems dabei erfährt.

379. Arbeit der Kräfte, [welche von aussen auf ein System wirken. — α) Arbeit der Kräfte, welche auf Parameter des Systems wirken. — Wir hatten die von aussen auf die Parameter eines Systems wirkenden Kräfte mit P bezeichnet. Ändert sich unter der Wirkung der Kraft P_i der Parameter p_i in der Zeit dt um dp_i, so ist die von dieser Kraft an dem System geleistete Arbeit gleich

$$a_i \cdot dt = P_i \cdot dp_i \quad \ldots \ldots \ldots \quad 240)$$

Erleiden unter dem Einflusse mehrerer solcher auf verschiedene Parameter ausgeübten Kräfte diese Parameter Anderungen, so ist die Gesamtarbeit aller dieser Kräfte gleich der Summe der Einzelarbeiten, d. h. diese Arbeit ist

$$A \cdot dt = P_1 \cdot dp_1 + P_2 \cdot dp_2 + \ldots + P_i \cdot dp_i + \ldots + P_k \cdot dp_k \quad . \quad 241)$$

A ist hier die auf die Zeiteinheit bezogene Gesamtarbeit aller äusseren Kräfte, soweit dieselbe an den Parametern des Systems geleistet wird.

Wegen des Prinzipes von der Gleichheit von Kraft und Gegenkraft ist (vergl. 188), § 366) für alle Indices i immer

$$P_i = - P_i';$$

man kann also auch schreiben

$$\left.\begin{aligned} A \cdot dt &= - (P_1' \cdot dp_1 + P_2' \cdot dp_2 + \ldots + P_i' \cdot dp_i + \ldots + P_k' \cdot dp_k) \\ &= - \bar{A}' \, dt \end{aligned}\right\} \quad 241\,a)$$

nach 236 a).

β) Arbeit der Kräfte, welche auf cyklische Koordinaten des Systems wirken. — Die an cyklischen Koordinaten angreifenden, von aussen auf den Verlauf der Bewegungen in dem Systeme einwirkenden Kräfte hatten wir mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet. Analog wie in α) können wir setzen:

$$\mathfrak{a}_\vartheta \cdot dt = \mathfrak{P}_\vartheta \cdot \mathfrak{q}_\vartheta \cdot dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 242)$$

und bei mehreren cyklischen Koordinaten:

$$\mathfrak{A} \cdot dt = (\mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{P}_2 \cdot \mathfrak{q}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_\vartheta \cdot \mathfrak{q}_\vartheta + \ldots + \mathfrak{P}_\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{q}_\mathfrak{h}) \, dt \quad . \quad 243)$$

$\mathfrak{A}$ ist die auf die Zeiteinheit bezogene Gesamtarbeit aller äusseren Kräfte, soweit dieselben an den cyklischen Koordinaten wirksam sind. Nach 188), § 366 ist aber für jedes ϑ auch:

$$\mathfrak{P}_\vartheta = - \mathfrak{P}_\vartheta',$$

also ist

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} \cdot dt &= - (\mathfrak{P}_1' \cdot \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{P}_2' \cdot \mathfrak{q}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_\vartheta' \cdot \mathfrak{q}_\vartheta + \ldots + \mathfrak{P}_\mathfrak{h}' \cdot \mathfrak{q}_\mathfrak{h}) \, dt \\ &= - \bar{\mathfrak{A}}' \cdot dt \end{aligned}\right\} \quad 243\,a)$$

nach 238 a).

380. Von einem cykiischen Systeme aufgenommene Arbeit. Beziehung zum Energieinhalte des Systems. — Wenn die äusseren Kräfte Arbeit an den Koordinaten des Systems leisten, so geht diese Arbeit an das System über; dadurch wird der Vorrat an innerer Energie, der „Energieinhalt" des Systems vermehrt. Wir wollen in diesem Falle

die von dem System gewonnene Arbeitsmenge durch ein über den entsprechenden Arbeitswert gesetztes + Zeichen kennzeichnen, so dass

$$\overset{+}{A}\cdot dt = A\cdot dt = P_1\cdot dp_1 + P_2\cdot dp_2 + \ldots + P_i\cdot dp_i + \ldots + P_k\cdot dp_k \quad 244)$$

die in der Zeit dt von dem System von aussen her an den Parametern „aufgenommene" Arbeit,

$$\overset{+}{\mathfrak{A}}\cdot dt = \mathfrak{A}\cdot dt = (\mathfrak{P}_1\cdot \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{P}_2\cdot \mathfrak{q}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_\vartheta\cdot \mathfrak{q}_\vartheta + \ldots + \mathfrak{P}_\mathfrak{h}\cdot \mathfrak{q}_\mathfrak{h})\,dt \quad 245)$$

die in derselben Zeit an den cyklischen Koodinaten von aussen aufgenommene Arbeit ist.

Nach den im vorigen Paragraphen gegebenen Relationen ist dann

$$\left.\begin{aligned} \overset{+}{A}\cdot dt = A\cdot dt &= -\overset{-}{A}\cdot dt \\ \overset{+}{\mathfrak{A}}\cdot dt = \mathfrak{A}\cdot dt &= -\overset{-}{\mathfrak{A}}\cdot dt \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 246)$$

Da nach Angabe aller Parameter p und aller cyklischen Intensitäten $\mathfrak{q}$ alle Bestimmungsstücke des Systems, also auch die seiner Energie aufgeführt sind, so kann die Summe jener Energiemengen nur zur Steigerung der inneren Energie E des Systems beitragen und zwar muss geradezu die ihr entsprechende Änderung des Energieinhaltes dE jener Arbeit numerisch gleich sein:

$$+ dE = (\overset{+}{A} + \overset{+}{\mathfrak{A}})\,dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad 247)$$

Die Vereinigung dieses Resultates mit dem in Formel 239) enthaltenen ergiebt den wichtigen Satz:

Die von einem beliebigen polycyklischen Systeme irgendwie geleistete Arbeit wird dem Energieinhalte des Systems entnommen; dieser vermindert sich um den jener Arbeitsleistung numerisch gleichen Betrag; die einem solchen System von aussen her irgendwie zugeführte Arbeit wird zur Steigerung seines Energieinhaltes verwendet; sein Wert steigt um den jener Arbeit gleichen Betrag.

Dies ist jener wichtige Satz, den die älteren Theorien so zu formulieren pflegten: „Eine von einem Stromsystem geleistete Arbeit entspricht einer Abnahme, eine an ihm von äusseren Kräften verrichtete Arbeit einer Steigerung des Gesamtpotentiales des Systems auf sich selbst." Aus Sätzen der Potentialtheorie wurde dann mit Hilfe des Energiesatzes die numerische Gleichheit der entsprechenden Beträge bewiesen. Das Verfahren ist nicht unähnlich demjenigen, welches wir in § 268 anwendeten, um für den speziellen Fall zweier linearer Ströme und ihres zweiachsigen Feldes den Energieinhalt zu berechnen.

Wir haben hier den Satz ohne Potentialtheorie lediglich aus der Grundeigenschaft der cyklischen Systeme mit Hilfe unserer Begriffsbestimmungen bezüglich

der Energiefaktoren, der Kraftmomente, d. i. der verallgemeinerten Kräfte, § 366, abgeleitet. Wir mussten einen anderen Weg einschlagen, da wir im neuen Begriffssystem fernewirkende Massen und Stromelemente, mit denen die Potentialtheorie arbeitet, nicht kennen, noch auch die einzelnen beteiligten Massen gesondert in Rücksicht ziehen.

D) Energetik der Monocykeln.

Für Monocykel nehmen die im vorhergehenden entwickelten Energiegleichungen eine besondere Form an, welche u. a. deswegen von grosser Bedeutung ist, weil sie zeigt, wie durch unsere allgemeinen Betrachtungen der Zustandsänderungen scheinbar weit auseinander liegende Erscheinungsgebiete umfasst werden. In der That haben die hier für Monocykel abzuleitenden Sätze die grösste Ähnlichkeit mit Sätzen der Thermodynamik. Da uns die monocyklischen Eigenschaften der Stromsysteme hier ausschliesslich interessieren, so deuten wir die thermodynamischen Anwendungen der Cykeltheorie, welche namentlich in den Händen von Helmholtz und Boltzmann eine grosse Bedeutung gewonnen haben, nur an.

381. Energie der monocyklischen Systeme. — Bei Monocykeln ist der Zusammenhang des einzigen vorhandenen cyklischen Momentes $\mathfrak{f}$ und der allein vorhandenen Intensität $\mathfrak{q}$ gegeben durch die Formel

$$\mathfrak{f} = A \cdot \mathfrak{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 248)$$

wo A eine stets positive Funktion aller Parameter

$$p_1, p_2, \cdots, p_i, \cdots, p_k$$

des Systems § 360 ist.

In den mechanischen Beispielen war die Grösse A das Trägheitsmoment $\sum m r^2$, beim Strome die gesamte von der Strombahn umschlossene Kraftlinienzahl. Vergl. auch die Bemerkungen am Schluss von § 273.

Die kinetische Energie des monocyklischen Systems hat die Form

$$\mathfrak{L} = \tfrac{1}{2} \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 249)$$

(vergl. Formel 21),
oder

$$\mathfrak{L} = \tfrac{1}{2} A \mathfrak{q}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 249\,a)$$

Die hieraus sich mit Rücksicht auf 248) ergebende Beziehung

$$d\mathfrak{L} = A\mathfrak{q} \cdot d\mathfrak{q} = \mathfrak{q} \cdot d\mathfrak{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 22)$$

entspricht vollkommen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie

$$dQ = T \cdot dE,$$

wo die der Intensität $\mathfrak{q}$ entsprechende Grösse T die absolute Temperatur (Intensitätsfaktor), dQ die zugeführte Wärmemenge, und die Kapazitätsgrösse E die sog. Entropie oder aber auch die Wärmekapazität, vergl. weiter unten § 383, ist;

sie ist im einfachsten Falle dem cyklischen Momente $\mathfrak{f}$ selbst gleich, im allgemeinen eine Funktion S dieses Momentes.

Wirkt eine äussere Kraft $\mathfrak{P}$ auf die cyklische Koordinate des Systems, so ist nach 232)

$$\mathfrak{P} = \dot{\mathfrak{f}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 250)$$

Wir wollen die Arbeit $d\mathfrak{Q}$ berechnen, welche diese äussere Kraft $\mathfrak{P}$ bei irgend einer Zustandsänderung des Monocykels verrichtet. Es ist

$$d\mathfrak{Q} = \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{q}\, dt = \dot{\mathfrak{f}} \cdot \mathfrak{q}\, dt = \mathfrak{q} \cdot d\mathfrak{f} \quad \ldots \ldots \quad 251)$$

(vergl. Formel 25).

Diese Energiemenge wird dem System zugeführt.

382. Vergleich der von dem System aufgenommenen Arbeit mit seinem Energieinhalte. — Das Verhältnis der durch die äussere Kraft $\mathfrak{P}$ dem monocyklischen Systeme zugeführten Arbeit zur augenblicklichen Energie des Systems, also bei gleichem $\mathfrak{q}$, ist

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{L}} = \frac{\mathfrak{q} \cdot d\mathfrak{f}}{\frac{1}{2}\mathfrak{q}\mathfrak{f}} = \frac{2\, d\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 252)$$

Wir erhalten den Satz: Bei jeder unendlich kleinen Zustandsänderung eines monocyklischen Systems verhält sich die durch die cyklische Koordinate aufgenommene Arbeit zu der Energie des Systems wie der doppelte Zuwachs, den das cyklische Moment dabei erfährt, zu diesem Momente selbst.

383. Einführung des Entropiebegriffes. — Der Ausdruck rechter Hand in der Gleichung 252) lässt sich darstellen als das vollständige Differential einer Funktion des cyklischen Momentes $\mathfrak{f}$ allein. In der That kann man schreiben:

$$2\frac{d\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}} = 2\, d(\log \mathfrak{f} + C).$$

Die willkürliche Integrationskonstante C können wir in der Form schreiben $-\log \mathfrak{f}_0$, wo $\mathfrak{f}_0$ der Wert des cyklischen Momentes in einem bestimmten Anfangsaugenblicke ist. Dann ist nach 252)

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{L}} = 2\, d \log\left(\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_0}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 253)$$

Unter log sind hier die „natürlichen" Logarithmen verstanden.

Diese Funktion

$$S = 2 \log \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 254)$$

nennt man die Entropie des monocyklischen Systems.

Die Entropie ist zunächst eine Funktion nur des cyklischen Momentes $\mathfrak{f}$. Da dieses aber mit der cyklischen Intensität $\mathfrak{q}$ eindeutig

zusammenhängt (Gleichung 248) § 381, ist sie auch eine Funktion dieser Intensität und der Parameter des Systems:

$$S = 2 \log \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_0} = 2 \log \frac{A\,q}{A_0\,q_0} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 254\,a)$$

Beide Ausdrücke zeigen aber, dass die Entropie jedenfalls nur von dem augenblicklichen Zustande des Systems abhängt, da dieser ebenfalls eindeutig bestimmt ist, wenn die Werte der Parameter und der Wert der cyklischen Intensität, oder der Wert des cyklischen Momentes gegeben ist. Und zwar hängt der „Zustand" des Monocykels einzig und allein hiervon ab.

Wir erhalten also den Satz: Bei jeder beliebigen Zustandsänderung eines monocyklischen Systems ist das Verhältnis der dabei von aussen zugeführten Arbeit zu der inneren Energie des Systems das volle Differential einer Funktion der Parameter und der cyklischen Intensität des Systems.

Dadurch, dass wir die zugeführte Energiemenge $d\,\Omega$ 253) durch den Energieinhalt des Systems dividieren, machen wir diese also zu einem exakten Differential, d. h. den Ausdruck $d\,\Omega$ integrierbar. In diesem Sinne kann man Ω als den integrierenden Nenner der zugeführten Energiemenge bezeichnen. Etwas ganz Ähnliches findet in der Thermodynamik statt, wo die absolute Temperatur T als integrierender Nenner auftritt (Clausiusscher Satz). Nach der kinetischen Gastheorie wird diese in der That durch die kinetische Energie der Moleküle bestimmt.

384. Endliche Ketten von Zustandsänderungen. — In einer bestimmten Zeit t_1 habe das cyklische Moment eines monocyklischen Systems den Wert $\mathfrak{f}_1$ und die Entropie desselben den Wert S_1, so dass

$$S_1 = 2 \log \frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{f}_0}$$

ist. Aus diesem Zustand heraus führen wir nun das System durch eine kontinuierliche Kette von aufeinander folgenden unendlich kleinen Zustandsänderungen in einen Endzustand über. Für jede einzelne Zustandsänderung bilden wir das Verhältnis der jedesmal durch die cyklische Koordinate aufgenommenen Energie durch den Wert der Energie des Systems selbst. Die Werte aller dieser Verhältnisse addieren wir dann. Wir behaupten, dass die erhaltene Summe

$$S \frac{d\,\Omega}{\Omega}$$

nur abhängt von der Natur des Anfangszustandes und der des Endzustandes, der etwa durch den Wert $\mathfrak{f}_2$ des cyklischen Momentes, oder den zugehörigen Wert S_2 der Entropie charakterisiert ist.

In der That ist:

$$\int_1^2 \frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{L}} = \int_{\zeta=\zeta_1}^{\zeta=\zeta_2} 2\,d\log\left(\frac{\zeta}{\zeta_0}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 255)$$

Die Summe (Integral) rechter Hand ist aber nach den Regeln der Integralrechnung nichts anderes als

$$2\log\frac{\zeta_2}{\zeta_0} - 2\log\frac{\zeta_1}{\zeta_0}$$

oder gleich

$$S_2 - S_1 = 2\log\frac{\zeta_2}{\zeta_1},$$

so dass

$$\int_1^2 \frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{L}} = S_2 - S_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 256)$$

ist; der Wert dieses Ausdruckes hängt nur von dem Anfangszustande (ζ_1) und dem Endzustande (ζ_2) ab, in dem sich das System befunden hat, nicht aber von den Zwischenzuständen, welche das System aus dem einen in den anderen Zustand übergeführt haben. Das Integral stellt die Entropiedifferenzen in beiden Zuständen des Systems dar.

385. Kreisprozesse. — Von einem Zustande, der etwa durch den Wert ζ_1 des cyklischen Momentes charakterisiert sei, werde ein monocyklisches System durch verschiedene Zustandsänderungen hindurchgeführt. Schliesslich aber werde es wieder in den ursprünglichen Zustand zurückgebracht. Durchläuft ein System eine solche „geschlossene" Kette von Zustandsänderungen, so sagt man, man habe dasselbe einem „Kreisprozesse" unterworfen.

Aus 256) ergiebt sich unmittelbar der Satz: Für alle Kreisprozesse hat das Arbeitsintegral

$$\int \frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{L}}$$

den Wert 0.

In der That ist hier $S_2 = S_1$, weil $\zeta_2 = \zeta_1$ wird, daher ist nach 256) die berechnete Summe gleich 0.

Man kann an dem in § 372 beschriebenen Modelle leicht solche Kreisprozesse ausführen, indem man auf die Röhre R, während der Cykel in Gang ist, Gewichte auflegt, durch Steigerung des cyklischen Momentes die Gewichte hebt und dann in einem höheren Niveau wieder abnimmt, wobei man durch geeignetes Drehen an der Kurbel (äussere Kraft $\mathfrak{P}$) dafür sorgt, dass der Cykelcharakter gewahrt ($\dot{q}$ klein) bleibt.

Boltzmann beschreibt einen solchen mechanischen Kreisprozess (Vorlesungen p. 9 flgde.), der vollständig einem Carnotschen Kreisprozesse bei einer Dampfmaschine gleicht.

386. Isentropische Zustandsänderungen. — Unterwirft man ein monocyklisches System einer Zustandsänderung, bei der das cyklische Moment konstant bleibt, so ist $d\mathfrak{f} = 0$, und auch nach Gleichung 250) $\mathfrak{P} = -\mathfrak{P}' = 0$, d. h. auch $d\mathfrak{Q} = 0$. Da bei einem bewegten System die kinetische Energie $\mathfrak{L}$ nicht 0 sein kann, so ist dauernd

$$2\,d\log\left(\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_0}\right) = dS = 0,$$

d. h. die Entropie S ist konstant.

Eine solche Monocykelbewegung kann man daher auch als eine „isentropische“ bezeichnen.[1]) Bei ihr erfahren die cyklische Intensität $\mathfrak{q}$ und die Parameterfunktion A immer gleichzeitige Änderungen derart, dass das Produkt beider konstant bleibt.

Im nächsten Kapitel werden wir für Systeme, für welche dauernd $\mathfrak{f}$ = Konstans, also $\mathfrak{P} = 0$ ist, die allgemeinere Bezeichnung „adiabatische“ Cykelsysteme einführen.

Die Analogie mit den Wärmeerscheinungen ist leicht zu erkennen, doch wollen wir sie hier nicht weiter verfolgen.

[1]) Hertz, Mechanik, p. 249, Nr. 587.

22. Kapitel.

Allgemeine Cykeltheorie.

Wenn wir ein Kraftfeld betrachten, welches von beliebig gestalteten und irgendwie verteilten Magneten sowie von Leitungs- oder Verschiebungsströmen innerhalb des Feldmediums herrührt, so haben wir uns dieses Feld vollkommen mit Teilchen erfüllt zu denken, deren Zustand achsialen Charakter hat, die also zusammen ein polycyklisches System allgemeinster Art darstellen. Es ist ohne weiteres klar, dass die Mannigfaltigkeit dieser Systeme eine unendlich grosse ist, so dass es ein Verdienst von Heinrich Hertz war, die vielen möglichen derartigen Systeme in zwei grosse Gruppen abgeteilt und ihre charakteristischen Merkmale festgestellt zu haben.

Wir wollen uns besonders mit der Gruppe beschäftigen, bei der wir nicht unmittelbar in den Ablauf des einzelnen Cykels mit äusseren Kräften eingreifen können, weil dieser Fall bei den unendlich vielen, im einzelnen gar nicht zu übersehenden Stromfäden oder magnetisch polarisierten Teilchen eines allgemeinen elektromagnetischen Kraftfeldes vorliegt, bei dem wir Abänderungen in den Cykeln durch Änderungen an den Parametern herbeiführen. Mit diesem Kapitel treten wir dann zugleich in die eigentlichen Hertzschen überaus allgemeinen und umfassenden Betrachtungen ein.

A) Die beiden Haupttypen polycyklischer Bewegungssysteme.

387. Adiabatisch cyklische Bewegungsformen. — Wir lernten bei der in sich zurücklaufenden Bewegung des Centrifugalregulators §§ 370 und 371 ein Beispiel einer cyklischen Bewegung kennen, bei welcher sich die auf den Parameter wirkenden Kräfte dauernd das Gleichgewicht halten, sich also zu einer resultierenden Kraft, welche immer den Wert Null beibehält, zusammensetzen. Etwas Ähnliches ist bei den an cyklischen Koordinaten angreifenden Kräften möglich; es kann

ein Cykel mit einem anderen durch seine Parameter so gekoppelt sein, dass wohl auf diese selbst, nicht aber auf seine cyklische Koordinaten Kräfte ausgeübt werden.

Haben wir es z. B. mit Dauer-(Stahl-)Magneten zu thun, so können auf die einzelnen, dieselben begleitenden Cykelbewegungen weder accelerierende noch retardierende Kräfte einwirken, so lange das Moment des Magneten konstant bleibt. Wohl aber können wir die Lagenparameter dieses Magneten ändern. In § 386 betrachteten wir solche Zustandsänderungen, bei denen dauernd $\mathfrak{P} = 0$ ist, für den Fall eines Monocykels, wo sie zu den sog. isentropischen Zustandsänderungen führten. Wir wollen jetzt diesen Begriff verallgemeinern.

Wenn Cykelkräfte eines polycyklischen Systems dauernd gleich 0 sind, so müssen die betreffenden cyklischen Momente $\mathfrak{f}$ konstant in Bezug auf die Zeit sein.

Cyklische Systeme mit im allgemeinen mehr als einer cyklischen Variablen, welche sämtlich in Bezug auf die Zeit konstante cyklische Momente bei allen Zustandsänderungen aufweisen, kommen in der Natur häufig vor.

Definition: Wir nennen mit HERTZ[1]) die Bewegung eines cyklischen Systems eine „adiabatisch cyklische", wenn alle seine cyklischen Momente dauernd konstant bleiben.

388. Erläuterung der Bezeichnung. — Wie wir im letzten Abschnitte des vorigen Kapitels ausführten, bieten die cyklischen Systeme mit einer cyklischen Variablen (die Monocykel) ein sehr treues mechanisches Bild der Wärmeerscheinungen. Hierbei steht die cyklische Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ der absoluten Temperatur (Intensitätsfaktor) und das Moment $\mathfrak{f}$ (Kapazitätsfaktor) der Wärmekapazität oder der Entropie parallel. Es ist für den Monocykel nach Formel 22)

$$d\mathfrak{L} = \mathfrak{q} \cdot d\mathfrak{f},$$

vergl. § 381.

Eine adiabatische Zustandsänderung würde also eine solche sein, bei der das Moment $\mathfrak{f}$, die Entropie, sich nicht ändert. Die Thermodynamik zeigt, dass wir solche adiabatische Zustandsänderungen mit einem grossen Grade der Annäherung an den idealen Fall $\mathfrak{f} =$ konstans herbeiführen können, indem wir den Körper oder das System von Körpern, welches wir der Zustandsänderung etwa durch Kompression oder Dilatation unterwerfen, mit einer für Wärme undurchlässigen Hülle umgeben. Dann kann weder „Wärme hinein- noch herausgehen". Von diesem Bilde (α = alpha privativum = nicht und $\delta\iota\alpha\beta\alpha\acute{\iota}\nu\omega$ [Stamm $\delta\iota\alpha\beta\alpha\tau$] = hindurchgehen) ist die gebrauchte Bezeichnung hergenommen.

[1]) HERTZ, Prinzipien, p. 240, Nr. 560.

389. Bedeutung der „adiabatisch cyklischen Bewegungen" im Naturhaushalte. — Die adiabatisch cyklischen Bewegungen sind von fundamentaler Bedeutung. HERTZ zeigt in seinen „Prinzipien der Mechanik"[1]), dass alle Bewegungsgleichungen der in unserem Naturerkennen wichtigsten Klasse materieller Systeme, der sog. konservativen Systeme, die fast den alleinigen Inhalt der ganzen bisherigen Mechanik ausgemacht haben, ohne weiteres erhalten werden, wenn wir dieselben als adiabatische Cykelsysteme betrachten. Freilich liegt es in der Natur solcher Systeme, dass uns die in ihnen verlaufenden cyklischen Bewegungen leicht „verborgen" bleiben können. Da nämlich bei ihnen die an den cyklischen Koordinaten angreifenden Kräfte dauernd gleich 0 sind, so haben wir auch kein Mittel in der Hand, die Werte jener Koordinaten nach Willkür abzuändern. Es entgeht uns dann ihre Existenz überhaupt. Nur aus den Bewegungserscheinungen der mit ihnen gekoppelten sichtbaren Massen schliessen wir auf ihr Vorhandensein.

HERTZ giebt hierfür ein glänzendes Beispiel in seinen „Prinzipien der Mechanik": Überall, wo wir früher unvermittelte Wirkung in die Ferne, Gravitation nach dem NEWTONschen Gesetze vermuteten, treten bei ihm cyklische Bewegungen ein; sie treiben durch ihr Zwischenspiel die Planeten gegen die Sonne, diese durch den Fixsternraum; wir sehen die Cykel nicht, wir fühlen sie nicht, weil sie adiabatische Bewegungen ausführen, aber die Hypothese ihrer Existenz führt zu einem logisch viel geschlosseneren und befriedigenderen Bilde der Himmelsmechanik als die Hypothese von selbständig bestehenden attrahierenden Fernekräften.

390. Analytische Bedingung für die adiabatische Bewegung. — Nach § 387) ist die adiabatisch cyklische Bewegung dadurch ausgezeichnet, dass alle $\mathfrak{P}$ dauernd gleich 0 sind, also mit Rücksicht auf 232) § 376 durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{f}_\vartheta = 0;\ \mathfrak{f}_\vartheta = \text{konstans} \\ \vartheta = 1, 2, .., \eta, .., \vartheta, .., \mathfrak{h} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 257)$$

Die Zustandsänderungen dieser Systeme erfolgen dadurch, dass sich die Parameter p, oder die Intensitäten $\mathfrak{q}$, oder beide ändern.

Der frei mit Präcessions- und Nutationsschwankungen sich drehende Rotationskörper oder das sich reibungslos bewegende Gyroskop, § 373, stellen solche adiabatische Cykelbewegungen dar; bei ihnen ist $\mathfrak{P}$ dauernd gleich 0, damit nach 219) auch $\Pi\dot{\mathfrak{q}}$, d. h. bei diesem Monocykel ist bei $\mathfrak{f}$ = konstans auch $\mathfrak{q}$ konstant; es ist dann z. B. $\partial P_1/\partial q_2 = -\Pi \sin p_2 = -\partial P_2/\partial q_1$, wovon wir später Gebrauch machen werden.

Da bei Monocykeln sich die cyklischen Momente von den Intensitäten nur um einen Faktor unterscheiden, der Funktion der p ist, § 381, so kann man die cyklische Intensität $\mathfrak{q}$ selbst eliminieren und alles durch die Konstante $\mathfrak{f}$ aus-

[1]) p. 252 flgde. Nr. 594 flgde.

drücken. So ist für den in § 372 beschriebenen Regulator, da nach 208) $\mathfrak{f} = 4 m p^2 \cdot \mathfrak{q}$, also $\mathfrak{q} = \mathfrak{f}/4 m p^2$ ist,

$$\mathfrak{L}_\mathfrak{f} = \tfrac{1}{2} \frac{1}{4 m p^2} \mathfrak{f}^2;$$

$$\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{q}} = 4 m p^2;$$

die Parameterkraft P_a ist dann

$$P_a = \frac{\partial \mathfrak{L}_\mathfrak{f}}{\partial p} = -\frac{1}{4 m p^2} \frac{\mathfrak{f}^2}{p} = -\frac{2 \mathfrak{L}_\mathfrak{f}}{p}.$$

An dem Modelle § 372 führen wir eine adiabatische Zustandsänderung aus, wenn wir bei einer Steigerung oder Verminderung der Umdrehungsgeschwindigkeit $\mathfrak{q}$, ohne an dem Antriebspunkte mit einer Kraft zu wirken, gleichzeitig den Parameter p durch geeignetes Be- oder Entlasten des Rohres R, Fig. 138, mittels der in § 372 genannten Kette oder der Cylinder so abändern, dass das Produkt $4 m p^2 \cdot \mathfrak{q}$ ungeändert bleibt.

391. Isocyklische Bewegungsformen. — Schon in § 140 wurde hervorgehoben, dass die cyklischen Geschwindigkeiten oder Intensitäten $\mathfrak{q}$ im allgemeinen nicht konstant sind, sondern mit der Zeit langsame Änderungen erleiden, so dass die Grössen $d\mathfrak{q}/dt = \dot{\mathfrak{q}}$ zwar klein, aber doch nicht 0 sind. Durch Einwirken von geeigneten Kräften auf die cyklischen Koordinaten (Koppelung) können wir es aber in besonderen Fällen erreichen, dass die cyklischen Intensitäten wirklich in aller Strenge dauernd konstant sind, dass also die $\dot{\mathfrak{q}} = 0$, d. h. die $\ddot{\mathfrak{p}} = 0$ und damit die $\mathfrak{q}$ selbst konstant sind.

Definition: Wir nennen mit HERTZ[1]) die Bewegung eines cyklischen Systems eine „isocyklische" Bewegung, wenn seine cyklischen Intensitäten dauernd konstant bleiben.

392. Erläuterung der Bezeichnung. — Obwohl sich der Sinn der Bezeichnung ($\ddot{\iota}\sigma o\varsigma$ = gleich) unmittelbar aus der Definition ergiebt, so möge auch hier an die analoge Bezeichnung aus der Wärmelehre erinnert werden. Wir sahen, dass die cyklische Intensität im mechanischen Bilde der Wärmeerscheinungen der absoluten Temperatur entspricht, § 381. Lassen wir einen Körper oder ein System von Körpern eine Reihe von Zustandsänderungen durchlaufen und sorgen (etwa durch Verbindung (Koppelung) mit einem hinreichend grossen Wärmemagazin) dafür, dass die Temperatur des Körpers immer dieselbe bleibt, so sagen wir, der Körper erfahre „isothermische" Zustandsänderungen. „Isocyklisch" ist also die Verallgemeinerung von „isothermisch".

393. Äusserliche Unterschiede zwischen adiabatischen und isocyklischen Bewegungen. — Gegenüber den inneren in den beiden

[1]) HERTZ, Prinzipien, p. 240, Nr. 560.

gegebenen Definitionen hervortretenden Unterschieden zwischen beiden Arten von Bewegungsformen machen wir auf folgende andere aufmerksam, die wir „äusserliche" genannt haben, weil sie sich auf das Verhalten der beiden Bewegungsarten äusseren Kräften gegenüber beziehen: Bei den adiabatisch cyklischen Bewegungen sind die auf die cyklischen Koordinaten wirkenden Kräfte dauernd gleich Null; eine willkürliche Einwirkung auf diese Bewegungen von aussen her ist also ganz ausgeschlossen. Bei den isocyklischen Bewegungen dagegen müssen im Gegenteil immer von aussen wirkende Kräfte $\mathfrak{P}$ thätig sein, um die von dem System angestrebten Änderungen in den cyklischen Intensitäten dauernd zu kompensieren. Dies geschieht etwa durch Koppelung des Systems mit einem hinreichend energiehaltigen anderen Systeme (vergl. das Analogon aus der Wärmelehre). Damit eine cyklische Bewegung eine isocyklische werde, müssen also geeignete Kräfte auf die cyklischen Koordinaten von aussen her wirken.

394. Analytische Bedingung für die isocyklische Bewegung. — Nach § 392 ist die isocyklische Bewegung dadurch ausgezeichnet, dass alle $\dot{\mathfrak{q}}$ dauernd gleich 0 sind, also durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\mathfrak{q}}_\vartheta = 0; \quad \mathfrak{q}_\vartheta = \text{konstans} \\ &\vartheta = 1, 2, .., \eta, .., \vartheta, .., \mathfrak{h} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 258)$$

Man kann hier Energie, Momente und Parameterkräfte durch die konstanten Intensitäten ausdrücken. Bei Monocykeln, z. B. dem in § 372 beschriebenen, ist dies sehr einfach: Nach 210) ist

$$\mathfrak{L}_\mathfrak{q} = \tfrac{1}{2}\, 4\, m\, p^2 \cdot \mathfrak{q}^2$$

und nach 208)

$$\mathfrak{f} = 4\, m\, p^2\, \mathfrak{q}, \text{ also } \mathfrak{q} = -\frac{\mathfrak{f}}{4\, m\, p^2}.$$

Daher z. B.

$$\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial \mathfrak{f}} = \frac{1}{4\, m\, p^2}.$$

Die Parameterkraft ist

$$P_t = -\frac{\partial \mathfrak{L}_\mathfrak{q}}{\partial p} = -4\, m\, p \cdot \mathfrak{q}^2.$$

B) Die Kräftefunktionen der adiabatisch cyklischen und der isocyklischen Bewegungssysteme.

Wir haben zur Illustration der elektrischen Kräfte gelegentlich elastische Koppelungen herangezogen; soll die Erklärung der Felderscheinungen durch rein cyklische Vorgänge möglich sein, so muss gezeigt werden, dass durch kinematische Vorgänge Wirkungen hervorgebracht werden können, welche ganz die Eigenschaften der elastischen

Kräfte haben. Lord KELVIN ist besonders erfinderisch gewesen in der Ermittelung eigenartiger (verborgener) Bewegungsmechanismen dieser Art. Wir wollen ohne näheres Eingehen auf Einzelheiten des Mechanismus zeigen, dass sich sowohl für adiabatisch cyklische wie isocyklische kinematische Systeme die wichtigste Eigenschaft der elastischen Kräfte vorfindet, die für uns allein in Betracht kommt, nämlich das Bestehen einer sog. Kräftefunktion.

395. Die Kräftefunktion. — Die an den Parametern eines cyklischen Systems angreifenden Kräfte lassen sich sowohl für den Fall adiabatisch cyklischer, wie für den Fall isocyklischer Bewegungen als die partiellen Differentialquotienten einer Funktion der Parameter und sonst nur konstanter Grössen nach den betreffenden Parametern darstellen.

Wir sagen dann, diese Kräfte besitzen eine „Kräftefunktion".

Diese Bezeichnung ist zwar den Fernewirkungstheorien entnommen; bei allen Kräftesystemen, bei denen die Einzelkräfte lediglich Funktionen der Entfernung sind, war es möglich, die auf eine Masse wirkende gesamte Fernkraft als Ableitung einer Funktion ausschliesslich der Massen des Systems und ihrer gegenseitigen Entfernungen darzustellen. Es ist sehr bedeutungsvoll, dass die Darstellung der Kräfte durch eine ganz analoge analytische Operation möglich ist, ohne dass Fernewirkungen in das Begriffssystem aufgenommen sind. Mit Rücksicht auf die Gleichheit der Rechnungsoperation, durch die die Kraftmomente erhalten werden, sprechen auch wir hier von „Kräftefunktionen".

396. Kräftefunktion der adiabatisch cyklischen Bewegungen. — Bei diesen sind nach der Definition § 387 alle $\mathfrak{f}$ konstant. Nach § 376 ist die Parameterkraft $P_a' = -P_a$ durch den Ausdruck 234 a) gegeben, wo die Koeffizienten B sämtlich lediglich Funktionen der Parameter p sind. Da die $\mathfrak{f}$ von den Parametern p unabhängige Konstanten sind, so kann man das Zeichen der partiellen Differentiation nach dem p_a für die hier vorliegende Klasse von Cykelbewegungen vor die Klammer ziehen.

Setzt man demnach

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H} = -\tfrac{1}{2}[&B_{11}\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1 + B_{12}\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2 + \cdots + B_{1\vartheta}\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_\vartheta + \cdots + B_{1\mathfrak{h}}\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_\mathfrak{h} \\ &+ B_{21}\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_1 + B_{22}\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_2 + \cdots + B_{2\vartheta}\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_\vartheta + \cdots + B_{2\mathfrak{h}}\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_\mathfrak{h} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ B_{\eta 1}\mathfrak{f}_\eta\mathfrak{f}_1 + B_{\eta 2}\mathfrak{f}_\eta\mathfrak{f}_2 + \cdots + B_{\eta\vartheta}\mathfrak{f}_\eta\mathfrak{f}_\vartheta + \cdots + B_{\eta\mathfrak{h}}\mathfrak{f}_\eta\mathfrak{f}_\mathfrak{h} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ B_{\mathfrak{h}1}\mathfrak{f}_\mathfrak{h}\mathfrak{f}_1 + B_{\mathfrak{h}2}\mathfrak{f}_\mathfrak{h}\mathfrak{f}_2 + \cdots + B_{\mathfrak{h}\vartheta}\mathfrak{f}_\mathfrak{h}\mathfrak{f}_\vartheta + \cdots + B_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}}\mathfrak{f}_\mathfrak{h}\mathfrak{f}_\mathfrak{h}] \end{aligned}\right\} \quad 259)$$

so erhält man

$$P'_a = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_a}, \text{ und } P_a = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_a} \quad \ldots\ldots \quad 260)$$

Der Ausdruck H ist also die „Kräftefunktion" der adiabatisch cyklischen Bewegungen.

397. Beziehung zur kinetischen Energie der Cykelbewegungen. — Der Vergleich des Ausdruckes 259) mit dem für die kinetische Energie $\mathfrak{L}_1$ des cyklischen Systems, diese ausgedrückt durch die cyklischen Momente 223) § 374 zeigt, dass die Kräftefunktion bis auf das Vorzeichen mit der kinetischen Energie der Bewegungen übereinstimmt. Da bei der Differentiation nach den p eine eventuell noch vorhandene in Bezug auf die p konstante Grösse $\mathfrak{C}$ in Wegfall kommen würde, so haben wir ganz allgemein zu setzen:

$$H = \mathfrak{C} - \mathfrak{L}_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 261)$$

Die „adiabatische Kräftefunktion" ist gleich der Abnahme der kinetischen Energie des Systems, gerechnet von einem willkürlich gewählten Anfangszustande aus.

398. Kräftefunktion der isocyklischen Bewegungen. — Bei diesen sind nach der Definition § 391 alle q konstant. Nach § 376 ist die in den Intensitäten q ausgedrückte Parameterkraft $P_i' = -P_i$ durch den Ausdruck 233 a) gegeben, wo die Koeffizienten A sämtlich lediglich Funktionen der Parameter p sind. Da die q von den Parametern p unabhängige Konstanten sind, so kann man das Zeichen der partiellen Differentiation nach dem p_i daselbst für unsere Klasse von Cykelbewegungen vor die Klammer ziehen.

Setzt man demnach

$$\left.\begin{aligned} \Pi = \tfrac{1}{2}[&A_{11}\,q_1\,q_1 + A_{12}\,q_1\,q_2 + \cdots + A_{1\sigma}\,q_1\,q_\sigma + \cdots + A_{1\beta}\,q_1\,q_\beta \\ &+ A_{21}\,q_2\,q_1 + A_{22}\,q_2\,q_2 + \cdots + A_{2\sigma}\,q_2\,q_\sigma + \cdots + A_{2\beta}\,q_2\,q_\beta \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ A_{\eta 1}\,q_\eta\,q_1 + A_{\eta 2}\,q_\eta\,q_2 + \cdots + A_{\eta\sigma}\,q_\eta\,q_\sigma + \cdots + A_{\eta\beta}\,q_\eta\,q_\beta \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ A_{\beta 1}\,q_\beta\,q_1 + A_{\beta 2}\,q_\beta\,q_2 + \cdots + A_{\beta\sigma}\,q_\beta\,q_\sigma + \cdots + A_{\beta\beta}\,q_\beta\,q_\beta] \end{aligned}\right\} \quad 262)$$

so erhält man

$$P_i' = \frac{\partial \Pi}{\partial p_i}, \text{ und } P_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial p_i} \quad \ldots\ldots \quad 263)$$

Der Ausdruck Π ist also die „Kräftefunktion" der isocyklischen Bewegungen.

399. Beziehung zur kinetischen Energie der Cykelbewegung. — Der Vergleich des Ausdruckes 262) mit dem für $\mathfrak{L}_q$, die kinetische Energie des cyklischen Systems, diese ausgedrückt durch die cyklischen Intensitäten 220) § 374, zeigt, dass die Kräftefunktion vollkommen,

auch dem Vorzeichen nach, mit der kinetischen Energie der Bewegungen übereinstimmt. Da bei der Differentiation nach den p eine eventuell noch vorhandene, in Bezug auf die p konstante Grösse $\mathfrak{R}$ in Wegfall kommen würde, so haben wir ganz allgemein zu setzen:

$$\mathit{H} = \mathfrak{R} + \mathfrak{L}_q \quad \ldots\ldots\ldots \quad 264)$$

Die „isocyklische Kräftefunktion" ist gleich der Zunahme der kinetischen Energie des Systems, gerechnet von einem willkürlich gewählten Anfangszustande aus.

400. Beziehungen der aufgenommenen und abgegebenen Energiemengen eines Systems untereinander und zu dem Energieinhalte des Systems. — Ein System kann sowohl durch seine Parameter wie durch seine cyklischen Koordinaten ebenso Energie aufnehmen wie abgeben; diese Energiemengen können einerseits unter sich in Beziehung gesetzt werden, andererseits ist es wichtig zu untersuchen, wie sich bei solchen Aufnahmen und Abgaben der innere Energievorrat des Systems verändert. Ähnliche Betrachtungen haben wir schon im vorigen Kapitel unter C) angestellt; wir wollen aber jetzt untersuchen, welche Modifikationen die dort erlangten Resultate erfahren, wenn wir die speziellen Eigenschaften der beiden hier näher behandelten Gruppen von Cykelsystemen in die Erörterungen einführen.

a) Energieumsatz adiabatischer Systeme.

α) Parameterarbeiten. — Bei einem adiabatischen Systeme sind die cyklischen Momente konstant; die an den Parametern angreifenden Kräfte haben eine Kräftefunktion H, § 396. Die an den Parametern von dem System nach aussen abgegebene Energiemenge ist nach 236 a) und 260) pro Zeitelement dt

$$\bar{A}^{\text{ad.}}_{\cdot}\, dt = \frac{\partial \mathit{H}}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial \mathit{H}}{\partial p_2} dp_2 + \cdots + \frac{\partial \mathit{H}}{\partial p_i} dp_i + \cdots + \frac{\partial \mathit{H}}{\partial p_k} dp_k \quad . \quad 265)$$

Da die Kräftefunktion H nur Funktion der Parameter p ist, so ist der Ausdruck rechts das nach den Regeln der Differentialrechnung gebildete volle Differential der Funktion H, d. h. es ist

$$\bar{A}^{\text{ad.}}_{\cdot}\, dt = d\mathit{H} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 265\,a)$$

Wirken umgekehrt Kräfte von aussen auf die Parameter, welche dem System Energie zuführen, so ist

$$\overset{+}{A}{}^{\text{ad.}}_{\cdot}\, dt = -\bar{A}^{\text{ad.}}_{\cdot}\, dt = -d\mathit{H} \quad \ldots\ldots \quad 265\,b)$$

Die vom System an den Parametern $\left\{\begin{matrix}\text{nach aussen ab-}\\ \text{von aussen auf-}\end{matrix}\right.$ gegebene / genommene $\}$ Energie ist also gleich der $\left\{\begin{matrix}\text{Zunahme}\\ \text{Abnahme}\end{matrix}\right\}$ der adiabatischen Kräftefunktion in der betreffenden Zeit.

β) Arbeiten an den cyklischen Koordinaten. — Bei adiabatischen Systemen sind die an den cyklischen Koordinaten angreifenden Kräfte dauernd gleich Null. Es sind also auch die hier verrichteten Arbeiten dauernd gleich Null. Das adiabatisch cyklische System giebt folglich an seinen cyklischen Koordinaten weder Energie nach aussen ab, noch nimmt es solche auf; in Zeichen:

$$\bar{\mathfrak{A}}'^{\text{ad.}}_{\cdot}\, dt = 0, \quad \overset{+}{\mathfrak{A}}{}^{\text{ad.}}_{\cdot}\, dt = 0 \quad \ldots\ldots \quad 265\,\text{c})$$

γ) Gesamtarbeit. — Da bei adiabatischen Systemen die an den cyklischen Koordinaten geleisteten Arbeiten verschwinden, so wird bei ihnen der gesamte Umsatz an Energie lediglich durch die an den Parametern aus- und eintretenden Energiemengen bestimmt. Wird von den Parameterkräften die Arbeit $\bar{A}'^{\text{ad.}}_{\cdot}\, dt$ nach aussen abgegeben, so vermindert sich der Energieinhalt um

$$-dE = \bar{A}'^{\text{ad.}}_{\cdot}\, dt = d\mathfrak{H}.$$

Nach 261) § 397 sind aber die Änderungen der Kräftefunktion $\mathfrak{H}$ entgegengesetzt gleich den Änderungen der kinetischen Gesamtenergie, diese ausgedrückt in den cyklischen Momenten, d. h. den Änderungen von $\mathfrak{L}_{\mathfrak{f}}$.

Also ist

$$-dE = \bar{A}'^{\text{ad.}}_{\cdot}\, dt = d\mathfrak{H} = -d\mathfrak{L}_{\mathfrak{f}}.$$

Wird von äusseren Kräften, welche auf die Parameter einwirken, die Arbeit $A \cdot dt$ geleistet und als $\overset{+}{A}{}^{\text{ad.}} \cdot dt$ von dem System aufgenommen, so vermehrt sich der Energievorrat um

$$+dE = \overset{+}{A}{}^{\text{ad.}}_{\cdot}\, dt = -d\mathfrak{H} = +d\mathfrak{L}_{\mathfrak{f}}.$$

Wir erhalten somit den Satz:[1]) Wenn ein adiabatisches System durch die Kräfte nach seinen Parametern Arbeit leistet, so nimmt gleichzeitig die Energie des Systems ab, und zwar um den Betrag der geleisteten Arbeit; wenn ein adiabatisches System durch die Kräfte nach seinen Para-

[1]) Hertz, Mechanik, p. 247, Nr. 581.

metern Arbeit aufnimmt, so wächst gleichzeitig die Energie des Systems und zwar um den Betrag der aufgenommenen Arbeit.

b) Energieumsatz isocyklischer Systeme.

α) Parameterarbeiten. — Bei einem isocyklischen Systeme sind die cyklischen Intensitäten konstant, die an den Parametern angreifenden Systemkräfte haben eine Kräftefunktion Π, 262) § 398.

Die an den Parametern von dem System nach aussen abgegebene Energiemenge ist also hier pro Zeitelement dt

$$\bar{A}^{\text{is.}}_{\cdot}\, dt = \frac{\partial \Pi}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial p_2} dp_2 + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} dp_i + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial p_k} dp_k . \quad 266)$$

Π ist nur Funktion der p; sie enthält die cyklischen Momente q als Konstanten. Daher ist der Ausdruck rechts das volle Differential von Π und es ist

$$\bar{A}^{\text{is.}}_{\cdot}\, dt = d\Pi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 266a)$$

Wirken umgekehrt Kräfte von aussen auf die Parameter, so wird bei einer durch diese herbeigeführten Zustandsänderung eine Energiemenge zugeführt:

$$\overset{+}{A}{}^{\text{is.}}_{\cdot}\, dt = -\bar{A}^{\text{is.}}_{\cdot}\, dt = -d\Pi .$$

Die vom System an den Parametern $\left\{\begin{matrix}\text{nach aussen ab-}\\ \text{von aussen auf-}\end{matrix}\right.$ $\left.\begin{matrix}\text{gegebene}\\ \text{genommene}\end{matrix}\right\}$ Energie ist also gleich der $\left\{\begin{matrix}\text{Zunahme}\\ \text{Abnahme}\end{matrix}\right\}$ der isocyklischen Kräftefunktion in der betreffenden Zeit.

Der Betrag der in der Zeit dt vom System an den Parametern geleisteten Arbeit lässt sich mit Rücksicht auf 262) schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{A}^{\text{is.}}_{\cdot}\, dt = dt \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} q_i = \tfrac{1}{2} dt \sum_{i=1}^{i=k} q_i \\
&\times \Big[\frac{\partial A_{11}}{\partial p_i} q_1 q_1 + \frac{\partial A_{12}}{\partial p_i} q_1 q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{1\sigma}}{\partial p_i} q_1 q_\sigma + \cdots + \frac{\partial A_{1\beta}}{\partial p_i} q_1 q_\beta \\
&+ \frac{\partial A_{21}}{\partial p_i} q_2 q_1 + \frac{\partial A_{22}}{\partial p_i} q_2 q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{2\sigma}}{\partial p_i} q_2 q_\sigma + \cdots + \frac{\partial A_{2\beta}}{\partial p_i} q_2 q_\beta \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \frac{\partial A_{\gamma 1}}{\partial p_i} q_\gamma q_1 + \frac{\partial A_{\gamma 2}}{\partial p_i} q_\gamma q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{\gamma\sigma}}{\partial p_i} q_\gamma q_\sigma + \cdots + \frac{\partial A_{\gamma\beta}}{\partial p_i} q_\gamma q_\beta \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \frac{\partial A_{\beta 1}}{\partial p_i} q_\beta q_1 + \frac{\partial A_{\beta 2}}{\partial p_i} q_\beta q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{\beta\sigma}}{\partial p_i} q_\beta q_\sigma + \cdots + \frac{\partial A_{\beta\beta}}{\partial p_i} q_\beta q_\beta \Big]
\end{aligned}\right\} \quad 267)$$

β) Arbeiten an den cyklischen Koordinaten. — Bei isocyklischen Systemen wirken auf die cyklischen Koordinaten dauernd Kräfte; sie sind es ja gerade, welche die cyklischen Intensitäten q konstant und die $\dot{q} = 0$ erhalten. Diese Kräfte können entweder von dem System selbst ausgeübt werden oder von aussen auf das System wirken.

Nach 238a) § 378 ist die von dem System an den cyklischen Koordinaten in der Zeit dt geleistete Gesamtarbeit

$$\bar{\mathfrak{A}}'^{\text{is.}}\,dt = (\mathfrak{P}_1' \cdot q_1 + \mathfrak{P}_2' \cdot q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\vartheta' \cdot q_\vartheta + \cdots + \mathfrak{P}_\mathfrak{h}' \cdot q_\mathfrak{h})\,dt.$$

Wirken umgekehrt auf die cyklischen Koordinaten von aussen her Kräfte, so ist die Arbeit, welche das System durch diese seine cyklischen Koordinaten in der Zeit dt aufnimmt, da $\mathfrak{P}' = -\mathfrak{P}$ ist, gleich

$$\overset{+}{\mathfrak{A}}^{\text{is.}}\,dt = -\bar{\mathfrak{A}}'^{\text{is.}}\,dt$$
$$= (\mathfrak{P}_1 \cdot q_1 + \mathfrak{P}_2 \cdot q_2 + \cdots + \mathfrak{P}_\vartheta \cdot q_\vartheta + \cdots + \mathfrak{P}_\mathfrak{h} \cdot q_\mathfrak{h})\,dt.$$

Da bei einem isocyklischen Systeme alle $\dot{q}$ dauernd gleich Null sind, so ist nach 232b) § 376

$$\mathfrak{P}_\vartheta' = -\mathfrak{P}_\vartheta$$
$$= -\Big[\Big(\frac{\partial A_{\vartheta_1}}{\partial p_1} q_1 + \frac{\partial A_{\vartheta_1}}{\partial p_2} q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta_1}}{\partial p_r} q_r + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta_1}}{\partial p_k} q_k\Big) q_1$$
$$+ \Big(\frac{\partial A_{\vartheta_2}}{\partial p_1} q_1 + \frac{\partial A_{\vartheta_2}}{\partial p_2} q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta_2}}{\partial p_r} q_r + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta_2}}{\partial p_k} q_k\Big) q_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \Big(\frac{\partial A_{\vartheta\vartheta}}{\partial p_1} q_1 + \frac{\partial A_{\vartheta\vartheta}}{\partial p_2} q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta\vartheta}}{\partial p_r} q_r + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta\vartheta}}{\partial p_k} q_k\Big) q_\vartheta$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \Big(\frac{\partial A_{\vartheta\mathfrak{h}}}{\partial p_1} q_1 + \frac{\partial A_{\vartheta\mathfrak{h}}}{\partial p_2} q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta\mathfrak{h}}}{\partial p_r} q_r + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta\mathfrak{h}}}{\partial p_k} q_k\Big) q_\mathfrak{h}\Big]$$

Demnach ist die aufgenommene Arbeit

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{+}{\mathfrak{A}}^{\text{is.}}\,dt = -\bar{\mathfrak{A}}'^{\text{is.}}\,dt = dt \sum_{\vartheta=1}^{\vartheta=\mathfrak{h}} \mathfrak{P}_\vartheta q_\vartheta \\
&\times \Big[\Big(\frac{\partial A_{\vartheta_1}}{\partial p_1} q_1 + \frac{\partial A_{\vartheta_1}}{\partial p_2} q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta_1}}{\partial p_r} q_r + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta_1}}{\partial p_k} q_k\Big) q_1 \\
&+ \Big(\frac{\partial A_{\vartheta_2}}{\partial p_1} q_1 + \frac{\partial A_{\vartheta_2}}{\partial p_2} q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta_2}}{\partial p_r} q_r + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta_2}}{\partial p_k} q_k\Big) q_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \Big(\frac{\partial A_{\vartheta\vartheta}}{\partial p_1} q_1 + \frac{\partial A_{\vartheta\vartheta}}{\partial p_2} q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta\vartheta}}{\partial p_r} q_r + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta\vartheta}}{\partial p_k} q_k\Big) q_\vartheta \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \Big(\frac{\partial A_{\vartheta\mathfrak{h}}}{\partial p_1} q_1 + \frac{\partial A_{\vartheta\mathfrak{h}}}{\partial p_2} q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta\mathfrak{h}}}{\partial p_r} q_r + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta\mathfrak{h}}}{\partial p_k} q_k\Big) q_\mathfrak{h}\Big]
\end{aligned}\right\} \quad 268)$$

Vergleicht man die beiden Ausdrücke 267) und 268), so erkennt man, dass die Summen in beiden genau den gleichen Wert haben müssen. Denn sie stimmen Glied für Glied überein. Nur sind diese $\mathfrak{h}\cdot\mathfrak{h}\cdot k$-Glieder in 267) nach den k lateinischen q, in 268) nach den $\mathfrak{h}$ deutschen $\mathfrak{q}$ geordnet.

Man hat also:

$$\bar{A}'^{\text{is.}}\cdot dt = \tfrac{1}{2}\overset{+}{\mathfrak{A}}'^{\text{is.}}\cdot dt$$

oder

$$\overset{+}{\mathfrak{A}}'^{\text{is.}} = 2\,\bar{A}'^{\text{is.}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 269)$$

In Worten:[1]) Bei der isocyklischen Bewegung eines cyklischen Systems ist die Arbeit, welche das System durch die cyklischen Koordinaten aufnimmt, beständig gleich dem doppelten der Arbeit, welche es durch die Parameter abgiebt.

Dabei werden die durch die Koordinaten ein- und austretenden Arbeiten durch die Koppelung mit entsprechenden anderen Systemen geliefert, § 393.

γ) Gesamtarbeit. — Verrichten sowohl die Parameterkräfte wie die cyklischen Kräfte Arbeit, so verändert sich der Energieinhalt des Systems um den Betrag

$$-dE = (\bar{A}'^{\text{is.}} + \bar{\mathfrak{A}}'^{\text{is.}})\,dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad 270)$$

Da $\bar{\mathfrak{A}}'^{\text{is.}}\cdot dt = -\overset{+}{\mathfrak{A}}'^{\text{is.}}\cdot dt = -2\,\bar{A}'^{\text{is.}}\cdot dt$ ist, so ist auch

$$-dE = -\bar{A}'^{\text{is.}}\cdot dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad 270\,a)$$

oder

$$dE = \bar{A}'^{\text{is.}}\cdot dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad 270\,b)$$

Werden umgekehrt an den Parametern und an den cyklischen Kräften Arbeiten geleistet, so verändert sich die innere Energie um

$$+dE = (\overset{+}{A}'^{\text{is.}} + \overset{+}{\mathfrak{A}}'^{\text{is.}})\,dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad 271)$$

Auch diese Änderung können wir lediglich durch die Arbeit der Parameterkräfte ausdrücken:

$$\overset{+}{\mathfrak{A}}'^{\text{is.}} = 2\,\bar{A}'^{\text{is.}};\quad \overset{+}{A}'^{\text{is.}} = -\bar{A}'^{\text{is.}};$$

also ist

$$+dE = +\bar{A}'^{\text{is.}}\cdot dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad 270\,b)$$

[1]) Hertz, Mechanik, p. 246, Nr. 579.

Wir erhalten also denselben Ausdruck wie oben für die Energieänderung dE. Ferner ist

$$-dE = -\bar{A}^{is.}\,dt.$$

Die Energieänderung ist positiv (Energiezunahme), wenn $\bar{A}^{is.}$ positiv ist, d. h. wenn die Parameterkräfte eine positive Arbeit nach aussen leisten; sie ist negativ (Energieabnahme), wenn die Parameter Energie aufnehmen.

Satz: Um bei einer isocyklischen Zustandsänderung durch die Kräfte nach den Parametern eine Arbeit nach aussen hin zu leisten, muss man die Energie des Systems steigern und zwar um den Betrag der geleisteten Arbeit. Um umgekehrt ein isocyklisches System zur Aufnahme von Energie durch seine Parameter zu zwingen, muss man die innere Energie gleichzeitig herabsetzen und zwar um den Betrag der aufzunehmenden Arbeit.

Da $\bar{A}^{is.} \cdot dt = d\Pi$ ist, so ist auch

$$\left.\begin{aligned} dE &= d\Pi \\ -dE &= -d\Pi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 272)$$

Da ferner Π bis auf eine Konstante auch dem Vorzeichen nach mit der kinetischen Energie, diese durch die cyklischen Intensitäten ausgedrückt $\mathfrak{L}_q$ (vergl. 264) § 399) übereinstimmt, so ist auch

$$\left.\begin{aligned} dE &= d\mathfrak{L}_q \\ -dE &= -d\mathfrak{L}_q \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 273)$$

Die Änderungen der Gesamtenergie bei Arbeitsleistungen der Parameterkräfte werden durch die entsprechenden Änderungen der isocyklischen Kräftefunktion oder der kinetischen Energie $\mathfrak{L}_q$ des Systems auch dem Vorzeichen nach angegeben.

Drücken wir die Energieänderungen nicht durch die Arbeiten A der Parameterkräfte, sondern durch diejenigen der cyklischen Kräfte $\mathfrak{A}$ aus, so erhalten wir nach 269) aus

$$-dE = (\bar{A}^{is.} + \bar{\mathfrak{A}}^{is.})\,dt$$

die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} -dE &= (\tfrac{1}{2}\overset{+}{\mathfrak{A}}^{is.} - \overset{+}{\mathfrak{A}}^{is.})\,dt = -\tfrac{1}{2}\overset{+}{\mathfrak{A}}^{is.} \cdot dt \\ \text{oder} \qquad dE &= \tfrac{1}{2}\overset{+}{\mathfrak{A}}^{is.} \cdot dt \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 274)$$

und aus

$$+ dE = (\overset{+}{A}^{\text{is.}} + \overset{+}{\mathfrak{A}}^{\text{is.}})\, dt$$

die Gleichung:

$$+ dE = (-\tfrac{1}{2}\overset{+}{\mathfrak{A}}^{\text{is.}} + \overset{+}{\mathfrak{A}}^{\text{is.}})\, dt$$

oder

$$dE = \tfrac{1}{2}\overset{+}{\mathfrak{A}}^{\text{is.}} \cdot dt,$$

also dasselbe.

Die Energie eines isocyklischen Systems nimmt zu, wenn auf die cyklischen Koordinaten von aussen Arbeit leistende Kräfte ausgeübt werden ($\overset{+}{\mathfrak{A}}^{\text{is.}}$ positiv), sie nimmt ab, wenn die cyklischen Kräfte veranlasst werden, nach aussen hin Arbeit zu leisten und zwar ist die Energieänderung gleich der Hälfte der entsprechenden Arbeit.

C) Hauptsatz der adiabatischen Cykelbewegungen.

401. Das Fr. Neumannsche Gesetz der Induktion. — Wir kommen jetzt zu dem wichtigsten Satze unserer Betrachtungen. Derselbe bezieht sich auf eine Eigentümlichkeit der adiabatisch cyklischen Bewegungssysteme. Nicht nur die hohe Bedeutung, welche gerade diesen Systemen im Naturhaushalte zukommt (vergl. S. 466) ist es, welche dem Satze seine Wichtigkeit verleiht, sondern für uns liegt sein Wert hauptsächlich darin, dass er das vollkommenste Analogon zu der allgemeinsten Fassung desjenigen Satzes darstellt, in welche die Gesamtheit der Induktionsgesetze und der Gesetze der elektrodynamischen Wechselwirkungen zusammengefasst werden kann und schon vor längerer Zeit zusammengefasst worden ist. Es ist dies das Fr. Neumannsche Gesetz, von dem wir denjenigen Teil, der sich auf die elektromotorischen Kräfte bezog, schon in Formel 66) § 275 kennen gelernt hatten; jetzt soll es auch mit Rücksicht auf die langsam veränderlichen Parameter des Systems abgeleitet werden.

Wir wollen dieses Gesetz als Erläuterung unseres Cykelsatzes voranstellen, in ihm aber sogleich in Klammer diejenigen Grössen vermerken, welche in der Cykeltheorie Ausdrücken der Elektrodynamik entsprechen. Die Erscheinungen der Induktion und der elektrodynamischen Wechselwirkung stehen in folgendem gesetzmässigen Zusammenhange zu einander, wie zuerst von Fr. Neumann erkannt worden ist (wir geben dem Gesetze die Lenzsche Form):

Gegeben sei ein System elektrischer Ströme, welche alle durch konstante E.M.K. unterhalten werden. In dem elektromagnetischen Felde aller dieser Ströme mögen ferner eine beliebige Anzahl permanenter Magnete sich befinden, deren magnetische Momente keinerlei Änderungen erleiden (alle $\int$ = konstant, vergl. S. 67 u. 465). Wenn wir dann mit einer die Lage oder Gestalt einer Strombahn irgendwie bestimmenden Variablen (Parameter) irgend eine Veränderung vornehmen (gegen das System eine positive Arbeit an den Parametern leisten), so werden die Stromintensitäten (cyklischen Intensitäten) durch Induktion stets so abgeändert, dass sie elektrodynamisch wirkend an den geänderten variablen Grössen (Parametern) ponderomotorische Antriebe wachrufen, welche den Kräften gerade entgegen wirken.

In der Wärmelehre finden ganz ähnliche Wechselwirkungen statt. Wird etwa ein in einer für Wärme adiabatischen Hülle eingeschlossenes Gas (adiabatisches System, $\int$ = konstans) komprimiert (am Druckparameter durch eine äussere Kraft eine positive Arbeit geleistet), so wird die Temperatur (cyklische Intensität) geändert (gesteigert); diese Änderung ist von der Beschaffenheit, dass sie rückwirkend auf den Parameter hier einen der erzeugenden Kraft entgegengesetzt gerichteten Antrieb wachruft; denn das Gas expandiert sich durch die Temperatursteigerung. Durch die äussere Kraft muss diese Gegenwirkung überwunden werden, wenn es zu einer positiven Arbeitsleistung kommen soll; da die Parameteränderung eine bestimmte ist, und die durch die Temperatur (cyklische Intensität) hervorgerufene Kraft der äusseren entgegenwirkt, so müssen wir sagen, von der durch die Drucksteigerung und die dadurch veranlasste Temperaturänderung (Änderung der cyklischen Intensität) am Druckparameter hervorgerufenen Kraft werde eine negative Arbeit geleistet, wenn wir die Arbeit der drucksteigernden äusseren Kraft positiv in Rechnung setzen.

402. Entsprechender Satz der adiabatisch cyklischen Systeme. — Der zu beweisende Satz lautet:

Wird ein adiabatisch cyklisches Bewegungssystem einer unendlich kleinen Zustandsänderung durch die Einwirkung äusserer Kräfte auf seine Parameter unterworfen, so erleiden trotz der Konstanz der cyklischen Momente die cyklischen Intensitäten doch Änderungen und zwar stets in solchem Sinne, dass von ihnen an den Parametern Kräfte wach gerufen werden, welche bei der wirklich stattfindenden Zustandsänderung thatsächlich eine negative Arbeit leisten, d. h. immer den die Zustandsänderung herbeiführenden äusseren Kräften entgegenstreben.

Um die ganze etwas verwickelte Schlussreihe, welche zum Beweise des Satzes führt, recht klar übersehen zu können, teilen wir sie in einzelne Abschnitte.

403. Einwirkung von aussen auf das adiabatisch cyklische System und ihre Folgen. — Wir denken uns ein adiabatisch cyklisches Bewegungssystem gegeben. In ihm haben die cyklischen Intensitäten q im allgemeinen alle von 0 verschiedene Werte. Geht das System (adiabatisch) aus einem Zustande in den anderen über, so erfahren die Intensitäten q alle langsame Änderungen, dagegen bleiben die Momente $\mathfrak{f}$ konstant.

Bei einem Monocykel, für den $\mathfrak{f} = A\,q$ ist, 248) § 381, muss die Parameterfunktion A dabei immer gerade so abgeändert werden, dass die Änderungen von q kompensiert werden, § 390.

Wenn aber die Momente $\mathfrak{f}$ dauernd konstant sind, so sind auch alle auf die cyklischen Koordinaten wirkenden Kräfte dauernd 0. Wollen wir also durch einen äusseren Eingriff in das System mit demselben eine Zustandsänderung vornehmen, so können wir dies nicht anders bewerkstelligen, als dass wir auf die Parameter p des Systems mit geeigneten äusseren Kräften einwirken. Wir leisten also durch äussere Kräfte an dem System vermittelst der Parameter p eine positive Arbeit. Dieser Eingriff hat dreierlei Folgen:

1. ändern die Parameter ihre Werte. Dies ist die unmittelbarste Folge unseres Eingriffes, zugleich aber die einzige, die äusserlich in die Erscheinung tritt. Die Parameter

$$p_1, p_2, \ldots, p_a, \ldots, p_k$$

mögen der Reihe nach die (positiven) Zuwächse

$$\partial p_1, \partial p_2, \ldots, \partial p_a, \ldots, \partial p_k$$

erfahren.

2. ändert sich nach § 380 der Energieinhalt des Systems und zwar um den Betrag der geleisteten Arbeit.

3. ändern sich die cyklischen Intensitäten; denn sie sind es ja, welche den Inhalt an kinetischer Energie des Systems wesentlich mitbestimmen. Ändert sich dieser nach 2., so müssen auch die Intensitäten Zuwächse erhalten. Es mögen die cyklischen Intensitäten

$$q_1, q_2, \ldots, q_\vartheta, \ldots, q_\mathfrak{h}$$

der Reihe nach gewachsen sein um die Beträge

$$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\vartheta, \ldots, \pi_\mathfrak{h}.$$

Die Zustandsänderung, welche wir vornehmen, soll klein sein; dementsprechend sind die π auch alle kleine Grössen von der ersten Ordnung (sie sind sog. Variationen, die man auch mit δq_1, δq_2 u. s. w. hätte bezeichnen können, um ihre Natur als kleine Grössen unmittelbar zum Ausdruck zu bringen); wir nehmen absichtlich hier wegen des folgenden Abstand von dieser gewöhnlich üblichen Bezeichnungsweise.

404. Berechnung des Zuwachses, den die kinetische Energie bei der Zustandsänderung erfährt. — Ursprünglich hatten die cyklischen Intensitäten die Werte

$$q_1, q_2, \ldots, q_\eta, \ldots, q_\vartheta, \ldots, q_\mathfrak{h}$$

und die kinetische Energie also den Wert:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{L}_q = \tfrac{1}{2}[&(A_{11}q_1 + A_{12}q_2 + \cdots + A_{1\vartheta}q_\vartheta + \cdots + A_{1\mathfrak{h}}q_\mathfrak{h})q_1\\ &+ (A_{21}q_1 + A_{22}q_2 + \cdots + A_{2\vartheta}q_\vartheta + \cdots + A_{2\mathfrak{h}}q_\mathfrak{h})q_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+ (A_{\eta 1}q_1 + A_{\eta 2}q_2 + \cdots + A_{\eta\vartheta}q_\vartheta + \cdots + A_{\eta\mathfrak{h}}q_\mathfrak{h})q_\eta\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+ (A_{\mathfrak{h}1}q_1 + A_{\mathfrak{h}2}q_2 + \cdots + A_{\mathfrak{h}\vartheta}q_\vartheta + \cdots + A_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}}q_\mathfrak{h})q_\mathfrak{h}]\end{aligned}\right\} \quad 275)$$

wofür wir nach 226) § 375 auch schreiben können:

$$\mathfrak{L}_q = \tfrac{1}{2}[\mathfrak{f}_1 q_1 + \mathfrak{f}_2 q_2 + \cdots + \mathfrak{f}_\vartheta q_\vartheta + \cdots + \mathfrak{f}_\mathfrak{h} q_\mathfrak{h}] \quad 275\,a)$$

wo $\mathfrak{f}$ die Momente sind.

Nach der Zustandsänderung sind die cyklischen Intensitäten geworden

$$q_1 + \pi_1, q_2 + \pi_2, \ldots, q_\vartheta + \pi_\vartheta, \ldots, q_\mathfrak{h} + \pi_\mathfrak{h};$$

die Zustandsänderung war aber eine adiabatische, d. h. erfolgte so, dass trotz der Änderung der Parameter und damit der A die $\mathfrak{f}$ konstant blieben. Daher ist der neue Wert der Energie:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{L}_q + A = \tfrac{1}{2}[&\mathfrak{f}_1(q_1 + \pi_1) + \mathfrak{f}_2(q_2 + \pi_2) + \cdots\\ &\cdots + \mathfrak{f}_\vartheta(q_\vartheta + \pi_\vartheta) + \cdots + \mathfrak{f}_\mathfrak{h}(q_\mathfrak{h} + \pi_\mathfrak{h})]\end{aligned}\right\} \quad 276)$$

und der positive Zuwachs, den die kinetische Energie dabei erfahren hat:

$$A = \tfrac{1}{2}[\mathfrak{f}_1\pi_1 + \mathfrak{f}_2\pi_2 + \cdots + \mathfrak{f}_\vartheta\pi_\vartheta + \cdots + \mathfrak{f}_\mathfrak{h}\pi_\mathfrak{h}] \quad 277)$$

Wir bilden den Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned}\Gamma = &(A_{11}\pi_1 + A_{12}\pi_2 + \cdots + A_{1\vartheta}\pi_\vartheta + \cdots + A_{1\mathfrak{h}}\pi_\mathfrak{h})\pi_1\\ &+ (A_{21}\pi_1 + A_{22}\pi_2 + \cdots + A_{2\vartheta}\pi_\vartheta + \cdots + A_{2\mathfrak{h}}\pi_\mathfrak{h})\pi_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+ (A_{\eta 1}\pi_1 + A_{\eta 2}\pi_2 + \cdots + A_{\eta\vartheta}\pi_\vartheta + \cdots + A_{\eta\mathfrak{h}}\pi_\mathfrak{h})\pi_\eta\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+ (A_{\mathfrak{h}1}\pi_1 + A_{\mathfrak{h}2}\pi_2 + \cdots + A_{\mathfrak{h}\vartheta}\pi_\vartheta + \cdots + A_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}}\pi_\mathfrak{h})\pi_\mathfrak{h}\end{aligned}\right\} \quad 278)$$

Die A sind nur Funktionen der Parameter; sie haben zur Zeit der Zustandsänderung bestimmte Werte; die π sind cyklische Intensitäten. Also ist Γ die doppelte kinetische Energie eines cyklischen

Systems, das in allem dem unseren gleicht, nur an Stelle der Intensitäten $\mathfrak{q}$ die Intensitäten π aufweist. Als kinetische Energie ist Γ aber notwendigerweise positiv, weil diese immer als Summe von lauter Geschwindigkeitsquadraten, jedes mit einem positiven Massenfaktor multipliziert, aufgefasst werden kann. Wenn wir also im Laufe der folgenden Ableitungen auf einen Ausdruck von der Form Γ geführt werden, so wissen wir, dass er unbedingt einen positiven Wert hat, welche Werte die π auch im speziellen haben mögen.

Der Ausdruck Γ ist nicht etwa der Zuwachs an kinetischer Energie, den das System erfährt, wie der Vergleich mit 275) zeigt.

405. Parameterkräfte, welche den Änderungen der cyklischen Intensitäten zukommen. — Es ist eine Eigentümlichkeit der adiabatisch cyklischen Systeme und liegt in dem inneren Zusammenhange der einzelnen Teile derselben begründet, dass Änderungen, welche die Intensitäten erfahren, selbständige Kräfte, welche an den Parametern zu Tage treten, hervorrufen. Dieselben sind durch jene Änderungen vollkommen bestimmt.

Die Formel 233 a) § 376 gestattet uns diese Kräfte, Π' wollen wir sie nennen, durch die Intensitätsänderungen π direkt auszudrücken. Werden in jenem Ausdrucke 233 a) die cyklischen Intensitäten geändert und gehen sie in die Werte $\mathfrak{q} + \pi$ über, so werden auch die P' geändert; diese gehen in die Werte $P' + \Pi'$ über; zu den Kräften P', welche das System an sich auf die Parameter p ausübt, kommen während der Zustandsänderung noch die Antriebe Π' hinzu, welche von den Änderungen π der cyklischen Intensitäten herrühren.

Die auf den Parameter p_a wirkende Systemkraft ist also:

$$
\begin{aligned}
P_a' + \Pi_a' = \tfrac{1}{2}\Big[& \frac{\partial A_{11}}{\partial p_a}(\mathfrak{q}_1 + \pi_1)(\mathfrak{q}_1 + \pi_1) + \frac{\partial A_{12}}{\partial p_a}(\mathfrak{q}_1 + \pi_1)(\mathfrak{q}_2 + \pi_2) + \cdots \\
& + \frac{\partial A_{21}}{\partial p_a}(\mathfrak{q}_2 + \pi_2)(\mathfrak{q}_1 + \pi_1) + \frac{\partial A_{22}}{\partial p_a}(\mathfrak{q}_2 + \pi_2)(\mathfrak{q}_2 + \pi_2) + \cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{\partial A_{\eta 1}}{\partial p_a}(\mathfrak{q}_\eta + \pi_\eta)(\mathfrak{q}_1 + \pi_1) + \frac{\partial A_{\eta 2}}{\partial p_a}(\mathfrak{q}_\eta + \pi_\eta)(\mathfrak{q}_2 + \pi_2) + \cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{\partial A_{\mathfrak{h}1}}{\partial p_a}(\mathfrak{q}_\mathfrak{h} + \pi_\mathfrak{h})(\mathfrak{q}_1 + \pi_1) + \frac{\partial A_{\mathfrak{h}2}}{\partial p_a}(\mathfrak{q}_\mathfrak{h} + \pi_\mathfrak{h})(\mathfrak{q}_2 + \pi_2) + \cdots \Big]
\end{aligned}
\qquad 279)
$$

Multipliziert man rechter Hand aus, so erhält man nach dem Ordnen zunächst einen Ausdruck, der nur die $\mathfrak{q}$ enthält; er stimmt mit P_a' genau überein. Ferner kommen Glieder, welche Produkte $\mathfrak{q} \times \pi$ enthalten, und zwar kommt jede derartige Verbindung eines $\mathfrak{q}$ mit einem π zweimal in dieselbe Ableitung eines A nach einem p

multipliziert vor (man beachte, dass $A_{\vartheta\eta} = A_{\eta\vartheta}$ ist). Endlich folgen noch Glieder, welche Produkte von Grössen π enthalten. Da die π klein von der ersten Ordnung sind, erscheinen alle diese Glieder multipliziert mit kleinen Grössen von der zweiten Ordnung. Da die $\partial A / \partial p$ alle endlich sind, so können wir diese Glieder weglassen, indem wir uns bei der Angabe der Kräfte auf Glieder von der ersten Ordnung der Kleinheit beschränken. Man erkennt daher, dass die Glieder der zweiten Klasse in ihrer Gesamtheit das ausmachen, was in Gleichung 279) links mit Π_a' bezeichnet ist, und wir erhalten schliesslich:

$$\left.\begin{aligned}
\Pi_a' = &\left(\frac{\partial A_{11}}{\partial p_a} q_1 + \frac{\partial A_{12}}{\partial p_a} q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{1\vartheta}}{\partial p_a} q_\vartheta + \cdots + \frac{\partial A_{1\mathfrak{h}}}{\partial p_a} q_\mathfrak{h}\right)\pi_1 \\
&+\left(\frac{\partial A_{21}}{\partial p_a} q_1 + \frac{\partial A_{22}}{\partial p_a} q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{2\vartheta}}{\partial p_a} q_\vartheta + \cdots + \frac{\partial A_{2\mathfrak{h}}}{\partial p_a} q_\mathfrak{h}\right)\pi_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+\left(\frac{\partial A_{\eta 1}}{\partial p_a} q_1 + \frac{\partial A_{\eta 2}}{\partial p_a} q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{\eta\vartheta}}{\partial p_a} q_\vartheta + \cdots + \frac{\partial A_{\eta\mathfrak{h}}}{\partial p_a} q_\mathfrak{h}\right)\pi_\eta \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+\left(\frac{\partial A_{\mathfrak{h}1}}{\partial p_a} q_1 + \frac{\partial A_{\mathfrak{h}2}}{\partial p_a} q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{\mathfrak{h}\vartheta}}{\partial p_a} q_\vartheta + \cdots + \frac{\partial A_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}}}{\partial p_a} q_\mathfrak{h}\right)\pi_\mathfrak{h}
\end{aligned}\right\} \quad 280)$$

Das sind die Parameterkräfte Π', welche den Änderungen π der cyklischen Intensitäten ganz selbständig zukommen.

406. Berechnung der Arbeit der hinzukommenden Parameterkräfte. — Die Kraft Π_a' fällt in die Richtung des Parameters p_a. Dieser Parameter erleidet bei der Zustandsänderung eine Vergrösserung ∂p_a. Die Arbeit dieser Kraft ist also $\Pi_a' \cdot \partial p_a$. Die Gesamtarbeit aller den Intensitätsänderungen π zukommenden Parameterkräfte ist also

$$\mathfrak{A}'_{\text{Int.}} = \sum_{a=1}^{a=k} \Pi_a' \cdot \partial p_a = \sum_{k=1}^{a=k} \partial p_a \times$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{\partial A_{11}}{\partial p_a} q_1 + \frac{\partial A_{12}}{\partial p_a} q_2 + \cdots\cdots\cdots\right)\pi_1\right. \\
&\left(\frac{\partial A_{21}}{\partial p_a} q_1 + \frac{\partial A_{22}}{\partial p_a} q_2 + \cdots\cdots\cdots\right)\pi_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\left(\frac{\partial A_{\eta 1}}{\partial p_a} q_1 + \frac{\partial A_{\eta 2}}{\partial p_a} q_2 + \cdots\cdots\cdots\right)\pi_\eta \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\left.\left(\frac{\partial A_{\mathfrak{h}1}}{\partial p_a} q_1 + \frac{\partial A_{\mathfrak{h}2}}{\partial p_a} q_2 + \cdots\cdots\cdots\right)\pi_\mathfrak{h}\right]
\end{aligned}\right\} \quad 281)$$

Denkt man sich alle Glieder dieser hier nur angedeuteten Summe hingeschrieben, so erkennt man, dass sich z. B. das Produkt $q_1 \pi_1$ als gemeinsamer Faktor in die Summe:

$$\frac{\partial A_{11}}{\partial p_1} \partial p_1 + \frac{\partial A_{11}}{\partial p_2} \partial p_2 + \cdots + \frac{\partial A_{11}}{\partial p_a} \partial p_a + \cdots + \frac{\partial A_{11}}{\partial p_k} \partial p_k$$

multipliziert vorfindet. Hierfür kann man kurz schreiben: δA_{11}, wo sich das Variationszeichen δ auf die Variation nach den Parametern bezieht; ebenso für alle anderen Produkte $q\,\pi$ dieser Summe. Man erhält daher:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}'^{\text{Int.}} = {} & (\delta A_{11} \cdot q_1 + \delta A_{12} \cdot q_2 + \cdots + \delta A_{1\vartheta} \cdot q_\vartheta + \cdots + \delta A_{1\mathfrak{h}} \cdot q_\mathfrak{h})\,\pi_1 \\
& + (\delta A_{21} \cdot q_1 + \delta A_{22} \cdot q_2 + \cdots + \delta A_{2\vartheta} \cdot q_\vartheta + \cdots + \delta A_{2\mathfrak{h}} \cdot q_\mathfrak{h})\,\pi_2 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + (\delta A_{\eta 1} \cdot q_1 + \delta A_{\eta 2} \cdot q_2 + \cdots + \delta A_{\eta\vartheta} \cdot q_\vartheta + \cdots + \delta A_{\eta\mathfrak{h}} \cdot q_\mathfrak{h})\,\pi_\eta \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + (\delta A_{\mathfrak{h}1} \cdot q_1 + \delta A_{\mathfrak{h}2} \cdot q_2 + \cdots + \delta A_{\mathfrak{h}\vartheta} \cdot q_\vartheta + \cdots + \delta A_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}} \cdot q_\mathfrak{h})\,\pi_\mathfrak{h}
\end{aligned}\right\} \quad 282)$$

Beweis, dass die Cykelarbeit eine negative Grösse ist. — Für eine adiabatische Bewegung ist für $\vartheta = 1, 2, \ldots, \vartheta, \ldots, \mathfrak{h}$ immer

$$\mathfrak{f}_\eta = A_{\eta 1} \cdot q_1 + A_{\eta 2} \cdot q_2 + \cdots + A_{\eta\vartheta} \cdot q_\vartheta + \cdots A_{\eta\mathfrak{h}} \cdot q_\mathfrak{h} = \text{konstans.}$$

Hier sind veränderliche Elemente, nämlich die p in den A enthalten; ausserdem sind die q veränderlich. Die Variation eines Momentes $\mathfrak{f}_\eta$ führt also ganz allgemein auf folgenden Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned}
\delta \mathfrak{f}_\eta = {} & \delta A_{\eta 1} \cdot q_1 + \delta A_{\eta 2} \cdot q_2 + \cdots + \delta A_{\eta\vartheta} \cdot q_\vartheta + \cdots + \delta A_{\eta\mathfrak{h}} \cdot q_\mathfrak{h} \\
& + A_{\eta 1} \cdot \delta q_1 + A_{\eta 2} \cdot \delta q_2 + \cdots + A_{\eta\vartheta} \cdot \delta q_\vartheta + \cdots + A_{\eta\mathfrak{h}} \cdot \delta q_\mathfrak{h}
\end{aligned}\right\} \quad 283)$$

Bei einer adiabatischen Zustandsänderung ist jede solche Variation $\delta \mathfrak{f}$ gleich 0. Ferner hatten wir hier die Veränderungen δq, welche eine cyklische Intensität erleidet bei unserer adiabatischen Zustandsänderung mit π bezeichnet. Wir erhalten also $\mathfrak{h}$ Gleichungen von der Form:

$$\left.\begin{aligned}
& \delta A_{\eta 1} \cdot q_1 + \delta A_{\eta 2} \cdot q_2 + \cdots + \delta A_{\eta\vartheta} \cdot q_\vartheta + \cdots + \delta A_{\eta\mathfrak{h}} \cdot q_\mathfrak{h} \\
& = -(A_{\eta 1} \cdot \pi_1 + A_{\eta 2} \cdot \pi_2 + \cdots + A_{\eta\vartheta} \cdot \pi_\vartheta + \cdots + A_{\eta\mathfrak{h}} \cdot \pi_\mathfrak{h}) \\
& \qquad \eta = 1, 2, \ldots, \eta, \ldots, \mathfrak{h}.
\end{aligned}\right\} \quad 284)$$

Bilden wir alle diese Gleichungen, multiplizieren wir sie der Reihe nach mit

$$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\eta, \ldots, \pi_\mathfrak{h}$$

und addieren sie alle, so erhalten wir

links: den Ausdruck 282) für $\mathfrak{A}'^{\text{Int.}}$ für die soeben berechnete Arbeit der Kräfte Π',

rechts: den mit einem — Zeichen versehenen Ausdruck Γ, 278), den wir in § 404 eingeführt hatten. Dieses Γ war eine positive Grösse, die mit dem — Zeichen versehene Grösse Γ und demnach auch die ihr gleiche Grösse $\mathfrak{A}'^{\text{Int.}}$ also eine negative Grösse, was zu beweisen war.

407. Beweis, dass die neuen Parameterkräfte den ursprünglich wirkenden äusseren Kräften entgegen wirken. — Die an den Parametern angreifenden äusseren Kräfte, welche die Änderungen δp dieser Parameter herbeiführten, leisteten eine positive Arbeit gegen das System. Durch ihre Thätigkeit wurden die cyklischen Intensitäten bei konstanten Momenten $\int$ um Grössen π geändert, welche nun ihrerseits wieder rückwirkend selbständige Antriebe an den Parametern p hervorriefen, deren Komponenten nach den einzelnen p gleich Π' waren. Die Arbeit dieser Kräfte ist bei den eingetretenen Parameteränderungen δp eine durchaus negative Grösse, wie im vorigen Paragraphen bewiesen wurde. Da das Vorzeichen einer Arbeit durch die Vorzeichen der beiden Faktoren, das der Verrückung und das der Kraft, bestimmt ist, die Verrückungen δp aber dieselben sind, so müssen die Kräfte Π' das umgekehrte Vorzeichen wie die ursprünglich wirkenden äusseren Kräfte haben, d. h. sie müssen, da sie sich auf dieselben Parameter beziehen und unsere Ableitung für alle beliebigen Werte der Parameteränderungen δp gilt, diesen entgegengesetzt gerichtet sein.

Hieraus ergiebt sich also schliesslich der Satz: Bei der adiabatischen Zustandsänderung eines cyklischen Systems erleiden die cyklischen Intensitäten stets Änderungen in solchem Sinne, dass die von diesen Änderungen hervorgerufenen Kräfte die erzeugende Zustandsänderung aufzuhalten streben.

Werden also durch Änderung der Lagenparameter von Magneten oder präformierten Strömen und Leitern Ströme induziert, so verlaufen diese stets so, dass sie sich gegen die erzeugenden Änderungen elektromagnetisch oder -dynamisch wirkend stemmen; wir haben hier also die allgemeinste Fassung des Lenzschen Gesetzes § 209 vor uns.

23. Kapitel.

Reciproke Eigentümlichkeiten cyklischer Systeme.

Schon bei dem Grundversuche der ganzen Lehre von den Induktionserscheinungen machten wir bei der Einführung und Erläuterung des Lenzschen Gesetzes in §§ 209 und 210 darauf aufmerksam, dass die beiden Hauptgebiete der Elektricitätslehre, die Erscheinungen des Elektromagnetismus und der Induktion in einem eigentümlichen Verhältnis der Wechselbeziehung zu einander stehen, welches wir mit Helmholtz als das „Gesetz der Reciprocität" bezeichneten. Es zeigt sich, dass ein solches reciprokes Entsprechen zweier Erscheinungsgebiete in der Natur ziemlich häufig ist. Wir bemerken aber überall, dass diese Reciprocitätseigenschaften speziell für Systeme charakteristisch sind, welche in sich zurücklaufende Bewegungen enthalten, welche also nach § 136 cyklische Systeme sind.

408. Allgemeiner Begriff und Schema der reciproken Eigentümlichkeiten. — Wenn bei irgend einem Systeme das auf einen Parameter wirkende Kraftmoment vergrössert oder verringert wird, so wird im allgemeinen nicht nur der betreffende Parameter selbst in seiner Grösse verändert, sondern infolge der Verbindungen, welche das System zusammenhalten, werden auch andere Parameter durch diese Veränderung in Mitleidenschaft gezogen. Dasselbe gilt von cyklisch in sich zurücklaufenden Bewegungen, welche eventuell in dem Systeme vorkommen; auch diese werden im allgemeinen in irgend einer Weise miteinander gekoppelt sein, derart, dass die Änderung in den Bestimmungsstücken der einen eine entsprechende Änderung der anderen zur notwendigen Folge hat.

Beispiele hierfür boten die Dicykelbewegungen, d. h. die Erscheinungen der wechselseitigen Induktion, §§ 271—274.

Gleiches gilt aber auch von den langsam veränderlichen und den cyklisch veränderlichen Koordinaten untereinander. Infolge der inneren Verbindungen, welche die einzelnen Teile eines cyklischen Systems mit-

einander verknüpfen, wird im allgemeinen immer eine Anderung eines cyklischen Momentes oder einer cyklischen Intensität die Änderung einer an einem Parameter angreifenden Kraft zur Folge haben und umgekehrt.

Für cyklische Systeme ist nun ganz allgemein eine eigentümliche Art der gegenseitigen Beeinflussung besonders charakteristisch, die man mit HELMHOLTZ und HERTZ zutreffend „reciproke Eigentümlichkeiten" nennen kann. Das allgemeine Schema derselben ist folgendes: Es seien G_r und H_r zwei Bestimmungsstücke einer Koordinate (einer langsam oder schnell veränderlichen, also entweder Parameterkräfte und Parameter oder cyklische Momente oder Intensitäten und cyklische Kräfte), und G_s und H_s Bestimmungsstücke, die irgend einer anderen (langsam oder schnell veränderlichen) Koordinate zugeordnet sind, so bestehen Relationen von der Form:

$$\frac{\partial G_r}{\partial H_s} = \pm \frac{\partial G_s}{\partial H_r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 285)$$

In Worten: Wenn Vermehrung des Bestimmungsstückes H_s der s-Koordinate Vermehrung des Bestimmungsstückes G_r der r-Koordinate hervorbringt, so bringt Vermehrung des Bestimmungsstückes H_r der r-Koordinate Vermehrung (+) oder Verminderung (−) des Bestimmungsstückes G_s der s-Koordinate hervor und umgekehrt. Und zwar sind die Verhältnisse von Ursache (Änderung des H_s oder des H_r) zu den hervorgebrachten Wirkungen (Änderungen des G_r oder des G_s) bei unendlich kleinen Veränderungen in beiden Fällen einander gleich.

Wir hatten ein Beispiel hierfür schon in § 210 angeführt; die Änderungen, welche an einem Parameter des Gyroskopes hervortraten, wenn der andere Parameter geändert wurde, entsprach ganz dem obigen Schema.

409. Bedeutung der reciproken Eigentümlichkeiten. — Das im vorigen Paragraphen näher bezeichnete Verhalten ist so charakteristisch für die cyklischen Systeme, dass wir überall, wo es sich zeigt, das Mitspielen von cyklischen Bewegungen vermuten dürfen, wenn sie auch vielfach zu den „verborgenen" Bewegungen zu zählen sind. Die folgenden Ableitungen werden zeigen, dass diese Eigentümlichkeiten aus dem innersten Wesen der cyklischen Systeme entspringen. Einige beruhen auf der besonderen Grössenordnung einzelner Bestimmungsstücke, z. B. darauf, dass die kinetische Energie nur die cyklischen Intensitäten enthält, oder die Änderungsgeschwindigkeiten der Parameter klein sind. Andere folgen aus dem Bestehen einer Kräftefunktion für die Parameterkräfte u. s. f. Ihre Ableitung folgt dann leicht aus der besonderen Form, welche die allgemeinen Bewegungsgleichungen für die Cykelsysteme angenommen haben. Man wird finden, dass

die im folgenden aufgeführten Sätze die reciproken Eigentümlichkeiten cyklischer Systeme erschöpfen.

Reciproke Eigentümlichkeiten in den Beziehungen der an den Parametern angreifenden Kräfte P zu den Parametern p wurden schon von H. von Helmholtz hervorgehoben.[1]) Auf reciproke Eigentümlichkeiten in den Beziehungen der an Parametern oder an cyklischen Koordinaten angreifenden Kräfte zu den cyklischen Intensitäten, welche in der Elektrodynamik eine Rolle spielen, wurde zuerst vom Verfasser hingewiesen.[2]) Weitere solche reciproke Eigentümlichkeiten hat endlich Hertz in seinen Prinzipien der Mechanik abgeleitet und im Zusammenhange dargestellt.[3])

410. Beziehungen zwischen den an Parametern angreifenden Kräften und den Parametern selbst. — a) Adiabatische Systeme. An den beiden Parametern p_a und p_b mögen von dem Systeme aus die Kraftmomente P_a' und P_b' zu Tage treten. Nach 260) § 396 ist dann, da für diese Kräfte eine Kräftefunktion existiert:

$$P_a' = \frac{\partial \mathit{H}}{\partial p_a} \text{ und } P_b' = \frac{\partial \mathit{H}}{\partial p_b},$$

wo H die adiabatische Kräftefunktion ist.

Bilden wir die Ausdrücke $\partial P_a'/\partial p_b$ bezw. $\partial P_b'/\partial p_a$, so erhalten wir:

$$\frac{\partial P_a'}{\partial p_b} = -\frac{\partial^2 \mathit{H}}{\partial p_a \partial p_b} \text{ bezw. } \frac{\partial P_b'}{\partial p_a} = -\frac{\partial^2 \mathit{H}}{\partial p_b \partial p_a}.$$

Nach den Regeln der Differentialrechnung sind die rechts stehenden Ausdrücke einander gleich; wir haben also:

$$\frac{\partial P_a'}{\partial p_b} = \frac{\partial P_b'}{\partial p_a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 286)$$

Für die entsprechenden von aussen her auf das System wirkenden Kräfte gilt dann auch die Formel:

$$\frac{\partial P_a}{\partial p_b} = \frac{\partial P_b}{\partial p_a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 286\,a)$$

b) Isocyklische Systeme. An den beiden Parametern p_i und p_k mögen die Kraftmomente P_i' und P_k' der Beobachtung und dem experimentellen Eingreifen zugänglich sein. Nach 263) § 398 ist dann:

$$P_i' = \frac{\partial \mathit{H}}{\partial p_i} \text{ und } P_k' = \frac{\partial \mathit{H}}{\partial p_k},$$

wo H die isocyklische Kräftefunktion ist.

---

[1]) H. von Helmholtz, Über das Prinzip der kleinsten Wirkungen. Journ. f. reine u. angew. Math. **100**. p. 161–165. 1887.

[2]) H. Ebert, Wied. Ann. **52**. p. 417. 1894: „Über die Bewegungsformen, welche den elektromagnetischen Erscheinungen zu Grunde gelegt werden können".

[3]) H. Hertz, Prinzipien, p. 242–246. Nr. 568–578.

Bilden wir die Ausdrücke $\partial P_i'/\partial p_k$ bezw. $\partial P_k'/\partial p_i$, so erhalten wir:

$$\frac{\partial P_i'}{\partial p_k} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial p_i \, \partial p_k}, \text{ bezw. } \frac{\partial P_k'}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial p_k \, \partial p_i}.$$

Analog wie oben ist jetzt

$$\frac{\partial P_i'}{\partial p_k} = \frac{\partial P_k'}{\partial p_i} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 287)$$

Für die von aussen wirkenden Kräfte ist:

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_k} = \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 287\,a)$$

Wenn in einem adiabatischen oder isocyklischen System eine Vergrösserung eines Parameters p_1 das Kraftmoment P_2 steigert, so lässt auch umgekehrt eine Vergrösserung des Parameters p_2 das Kraftmoment P_1 anwachsen; und zwar sind bei unendlich kleinen Änderungen die relativen Zuwächse $\partial P_2/\partial p_1$ und $\partial P_1/\partial p_2$ einander numerisch gleich.

Dieser Doppelsatz gilt ganz unabhängig von der Zahl der vorhandenen cyklischen Koordinaten; er besteht daher ebensowohl für Monocykel und Dicykel wie für Polycykel. Er findet überall dort Anwendung, wo bei einem adiabatischen Systeme (was eventuell ein „verborgenes" sein kann), oder bei einem isocyklischen Systeme mindestens zwei Parameter und die an ihnen angreifenden Kraftmomente § 366 der Beobachtung irgendwie zugänglich sind. Bei seiner Ableitung wurde nur davon Gebrauch gemacht, dass die Parameterkräfte beider Gruppen polycyklischer Systeme Kräftefunktionen besitzen.

411. Beziehungen zwischen den Systemkräften und den Änderungsgeschwindigkeiten ihrer Koordinaten. — a) Parameterkräfte. Im allgemeinen haben wir immer in diesem Kapitel wie in den vorhergehenden vorausgesetzt, dass die Änderungen q der Parameter so langsam erfolgen, dass wir die ihnen in dem Ausdrucke für die kinetische Energie entsprechenden Glieder unberücksichtigt lassen können; kommen diese q in den Gleichungen unserer Systeme gar nicht vor, so können wir auch auf diesem Wege keine Beziehungen der die Systeme definierenden Bestimmungsstücke zu diesen q ableiten. Dann aber würde sich gerade derjenige Fall cyklischer Bewegung unseren näheren Betrachtungen entziehen, der den Gegensatz zwischen elektroponderomotorischer Wechselwirkung und Induktion am besten erläuterte, der Fall des Gyroskopes § 210. Denn hier steigerten wir primär die langsame Präcessionsbewegung des einen Ringes (1) etwa um ∂q_1, vergl. § 373, und erhielten eine Steigerung der am Ringe (2) wirkend zu denkenden Systemkraft P_2', etwa um $\partial P_2'$; war $\partial P_2'$ positiv (auf Vermehrung der Winkelgrösse p_2 gerichtet), so war nun das Verhältnis von Ursache (∂q_1) und Wirkung ($\partial P_2'$) derart, dass, wenn wir um-

gekehrt die Geschwindigkeit der langsamen Kippbewegung, in der der Ring (2) begriffen war, im Sinne des wachsenden p_2 vermehrten, etwa um ∂q_2, am Ringe (1) eine Kraftänderung $\partial P_1'$ wachgerufen wurde, die der ursprünglichen Geschwindigkeitsvermehrung und damit der Richtung des wachsenden Parameters entgegengesetzt, also durch $-\partial P_1'$ zu bezeichnen war. Gerade diese Reciprocität zeichnete ja auch das Lenzsche Gesetz aus, welches wir durch das Modell erläuterten.

Um das hier vorliegende Reciprocitätsgesetz abzuleiten, wollen wir daher die Vernachlässigung der q zunächst nicht eintreten lassen und greifen auf die am Ende des § 368 S. 433 abgeleiteten allgemeinen Gleichungen 196 a) und 196 b) zurück.

Sind p_i und p_k irgend zwei langsam veränderliche Parameter, $q_i = dp_i/dt$ und $q_k = dp_k/dt$ ihre Änderungsgeschwindigkeiten, P_i' und P_k' die Kräfte, welche das System durch sie nach aussen hin ausübt, so gelten für die Summe und die Differenz

$$\frac{\partial P_i'}{\partial q_k} \pm \frac{\partial P_k'}{\partial q_i}$$

bis aufs Vorzeichen ($P_i' = -P_i$, $P_k' = -P_k$) die dort gegebenen Ausdrücke. Die kinetische Energie L_q ist eine homogene Funktion zweiten Grades aller q, also sowohl der Änderungsgeschwindigkeiten q der Parameter, wie der cyklischen Intensitäten $\mathfrak{q}$. Die Glieder, aus denen L_q zusammengesetzt ist, bestehen aus drei Klassen; wir finden:

1. Glieder, die in das Produkt zweier q multipliziert sind;

2. solche, welche das Produkt eines q und einer Intensität $\mathfrak{q}$ enthalten;

3. endlich Glieder, welche in das Produkt zweier $\mathfrak{q}$ multipliziert sind.

Die Koeffizienten A aller dieser Glieder sind Funktionen nur der p.

Bildet man die rechtsseitigen Ausdrücke der Gleichung 196 a) vergl. § 368, so liefert für $\partial^2 L_q/\partial q_i \cdot \partial q_k$ nur das in die beiden Parameteränderungen q_i und q_k multiplizierte Glied einen Beitrag; das Resultat der partiellen Differentiation ist A_{ik}; die Zeitableitung liefert lauter in Grössen q multiplizierte, also bei langsamen Parameteränderungen kleine Glieder (vergl. z. B. die Formel 232 b) § 376; die Summe der beiden oben genannten Ableitungen fällt daher immer klein von der Ordnung der q aus und konvergiert mit diesen gegen 0.

Ganz anders ist es mit der Differenz 196 b). Zu $\partial^2 L_q/\partial q_i\, \partial p_k$ liefern alle Glieder Beiträge, die in das betreffende q_i multipliziert sind; das können aber sowohl Glieder sein, deren anderer Geschwindigkeitsfaktor wieder ein q ist, oder auch solche, bei denen dieser eine cyklische Intensität $\mathfrak{q}$ ist. Die $\mathfrak{q}$ sind alle gross, eine weitere Differentiation ist nicht nötig, die Differenz der beiden Ableitungen ist also

endlich, sie verschwindet im allgemeinen auch dann nicht, wenn die q unendlich klein werden. Je mehr das Bewegungssystem daher einen streng cyklischen Charakter annimmt, um so kleiner wird die Summe, nicht aber die Differenz der in Rede stehenden Ableitungen, so dass für cyklische Systeme

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P_i'}{\partial q_k} + \frac{\partial P_k'}{\partial q_i} &= 0 \\ \text{oder} \\ \frac{\partial P_i'}{\partial q_k} &= -\frac{\partial P_k'}{\partial q_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 288)$$

ist. Für die äusseren Kräfte gilt dann ebenfalls

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q_i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 288\,a)$$

Ruft die Vergrösserung der Änderungsgeschwindigkeit q_k eines langsam veränderlichen Parameters p_k eine Steigerung des an einem anderen Parameter p_i hervortretenden Kraftmomentes P_i' hervor, so wird das ersterem Parameter entsprechende Kraftmoment P_k' vermindert, wenn man $dp_i/dt = q_i$ steigert.

Nach § 373, Formel 217 a) ist für das Gyroskop, bei dem die beiden Bögen p_1 und p_2 als langsam veränderliche Parameter anzusehen sind,

$$\frac{\partial P_1}{\partial q_2} = -2\,[\sin p_2 \cos p_2\,(\Pi - A)]\,q_1 - \Pi \sin p_2 \cdot q$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial q_1} = +2\,[\sin p_2 \cos p_2\,(\Pi - A)]\,q_1 + \Pi \sin p_2 \cdot q$$

also entgegengesetzt gleich, so dass die Summe beider Ausdrücke in der That gleich Null und immer

$$\frac{\partial P_1}{\partial q_2} = -\frac{\partial P_2}{\partial q_1}$$

ist.

Die Differenz beider Ausdrücke dagegen verschwindet selbst bei $q_1 = 0$ und $q_2 = 0$ nicht, sondern bleibt endlich gleich $-2\,\Pi \sin p_2 \cdot q$.

Für die Parameterkräfte ist also bei cyklischen Systemen niemals $\partial P_i'/\partial q_k = \partial P_k'/\partial q_i$, sondern diese Systeme sind bezüglich der Parameterkräfte durch die entgegengesetzte Gleichheit der relativen Änderungen ausgezeichnet, vergl. auch § 390.

b) Parameterkräfte und Cykelkräfte. Ganz ähnliche Betrachtungen kann man für die Beziehung einer Parameter- und einer Cykelkraft anstellen; man findet

$$\frac{\partial \mathfrak{P}'_\vartheta}{\partial q_k} + \frac{\partial P_k'}{\partial q_\vartheta} = 0,$$

also

$$\frac{\partial \mathfrak{P}'_\vartheta}{\partial q_k} = -\frac{\partial P_k'}{\partial q_\vartheta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 288\,b)$$

und

$$-\frac{\partial \mathfrak{P}_\vartheta}{\partial q_k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q_\vartheta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 288\,c)$$

Bringt Steigerung der Änderungsgeschwindigkeit q_k eines Parameters p_k eine Vermehrung einer Cykelkraft $\mathfrak{P}'_\vartheta$ (E.M.K.) hervor, so wird eine Steigerung der dieser entsprechenden Intensität q_ϑ (Stromesintensität) eine Änderung der Systemkraft P'_k wachrufen, welche der erstgenannten Steigerung entgegenwirkt.

Die Richtigkeit dieser Formel ergiebt sich übrigens auch, wenn man die in ihr angedeuteten Ableitungen an den Ausdrücken 232 b) und 233 a) direkt vornimmt. Diese Relation kommt bei den Induktionsgesetzen in Betracht, vergl. § 210 S. 234.

Das Zutreffen des Lenzschen Gesetzes giebt uns also den sichersten Beleg für die Zulässigkeit der von uns von Anfang an eingeführten kinematischen Interpretation dieser elektromagnetischen Erscheinungen (vergl. auch des Verfassers Abhandlung „Über die Bewegungsformen, welche den elektromagnetischen Erscheinungen zu Grunde gelegt werden können" in Wiedemanns Annalen **52**. p. 417. 1894; die daselbst von dem obigen Satze auf Cykelkräfte gemachte Erweiterung ist nicht zulässig, vielmehr hat für dieselbe der folgende Satz einzutreten).

Die Formel 288 c) gilt augenscheinlich auch für $q_k = 0$, also auch für zunächst ruhende Strombahnen, für die $q = 0$ ist.

Die beiden soeben gegebenen Ableitungen zeigen besonders deutlich, wie die Grössenordnung der in Betracht kommenden Grössen hier den Ausschlag giebt.

c) Cykelkräfte. Ist q_ϑ eine cyklische Intensität, $\mathfrak{P}'_\vartheta$ die an ihrer Koordinate angreifende cyklische Kraft, q_η eine andere cyklische Intensität, $\mathfrak{P}'_\eta$ die an ihrer Koordinate angreifende cyklische Kraft, so ist nach § 376, Formel 232 b)

$$\frac{\partial \mathfrak{P}'_\vartheta}{\partial q_\eta} = -\left(\frac{\partial A_{\vartheta\eta}}{\partial p_1} q_1 + \frac{\partial A_{\vartheta\eta}}{\partial p_2} q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta\eta}}{\partial p_r} q_r + \cdots + \frac{\partial A_{\vartheta\eta}}{\partial p_k} q_k\right)$$

und

$$\frac{\partial \mathfrak{P}'_\eta}{\partial q_\vartheta} = -\left(\frac{\partial A_{\eta\vartheta}}{\partial p_1} q_1 + \frac{\partial A_{\eta\vartheta}}{\partial p_2} q_2 + \cdots + \frac{\partial A_{\eta\vartheta}}{\partial p_r} q_r + \cdots + \frac{\partial A_{\eta\vartheta}}{\partial p_k} q_k\right)$$

Da aber nach S. 450 $A_{\vartheta\eta} = A_{\eta\vartheta}$ ist, so sind beide Ausdrücke einander gleich und daher ist:

$$\frac{\partial \mathfrak{P}'_\vartheta}{\partial q_\eta} = \frac{\partial \mathfrak{P}'_\eta}{\partial q_\vartheta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 289)$$

oder auch, da $\mathfrak{P} = -\mathfrak{P}'$ ist,

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_\vartheta}{\partial q_\eta} = \frac{\partial \mathfrak{P}_\eta}{\partial q_\vartheta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 289\,a)$$

Bringt Steigerung der cyklischen Intensität einer Koordinate (η) Vermehrung der Cykelkraft an einer anderen (ϑ)

hervor, so ruft auch ein Anwachsen der Intensität an dieser (ϑ) eine Steigerung der Cykelkraft an der anderen (η) hervor.

Dieser Satz gilt für Di- und Polycykel.

Ruft Steigerung der Stromesintensität in einer Strombahn eine induzierte E.M.K. von bestimmter Richtung in einer anderen Bahn hervor, so ruft ein Stromimpuls von dieser Richtung in dieser zweiten Bahn in der ersten eine E.M.K. wach, deren Richtung mit der des ursprünglichen Stromes übereinstimmt. In Parallelbahnen ruft bei der Schliessung ein Primärstrom z. B. einen Sekundärstrom von entgegengesetzter Richtung in der Sekundärbahn hervor; erzeugen wir in dieser einen diesem Induktionsstrom gleichgerichteten, so ruft dieser in der Primärleitung einen ihm entgegengesetzt gerichteten hervor; dieser ist also dem Schliessungsstrome, von dem wir ausgingen, und damit auch der E.M.K., die ihn erzeugte, gleichgerichtet, er sucht diese E.M.K. zu vermehren. Das Grundgesetz der Elektroinduktion § 219 ist also ein spezieller Fall des durch 289) ausgedrückten Gesetzes. Dieses ist ausserordentlich viel allgemeiner und kann auf beliebig viele Ströme bezogen werden, ist auch nicht mehr an Linearströme gebunden.

Die Ableitung des Satzes konnte nicht mehr durch die bei a) und b) benutzten Folgerungen gewonnen werden, weil die $\mathfrak{P}$ selbst klein von der Ordnung der q und $\dot{q}$ sind, vergl. S. 453.

412. Beziehung zwischen den an Parametern angreifenden Kräften und den cyklischen Momenten einerseits und den cyklischen Intensitäten und den Parametern andererseits. — a) Adiabatische Systeme. Nach § 376 b, 234) können wir die an dem Parameter p_a wirkende Kraft P_a' durch die partielle Ableitung der kinetischen Energie des cyklischen Systems, ausgedrückt in den cyklischen Momenten $\mathfrak{L}_\mathfrak{f}$ nach diesem Parameter p_a darstellen; es ist

$$P_a' = -\frac{\partial \mathfrak{L}_\mathfrak{f}}{\partial p_a};$$

hier ist ebenso wie die rechte Seite auch die linke, also P_a' Funktion der Parameter p und der cyklischen Momente $\mathfrak{f}$.

Nach 227) § 375 ist ferner die cyklische Intensität $\mathfrak{q}_\eta$ darstellbar als partielle Ableitung desselben Ausdruckes $\mathfrak{L}_\mathfrak{f}$ für die kinetische Energie nach dem entsprechenden Momente $\mathfrak{f}_\eta$; es ist

$$\mathfrak{q}_\eta = \frac{\partial \mathfrak{L}_\mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{f}_\eta};$$

hier ist ebenso wie die rechte Seite auch die linke, $\mathfrak{q}_\eta$, Funktion der Parameter p und der cyklischen Momente $\mathfrak{f}$.

Wir bilden nun

α) die partielle Ableitung des P_a' nach dem $\mathfrak{f}_\eta$. Dabei denken wir uns die p ihre Werte unverändert beibehaltend. Wir erhalten

$$\frac{\partial P_a'}{\partial \mathfrak{f}_\eta} = -\frac{\partial^2 \mathfrak{L}_\mathfrak{f}}{\partial p_a \, \partial \mathfrak{f}_\eta}.$$

β) die partielle Ableitung des $\mathfrak{q}_\eta$ nach dem p_a. Dabei denken

wir uns die $\mathfrak{f}$ alle als konstant, wir nehmen also eine adiabatische Zustandsänderung vor. Wir erhalten:

$$\frac{\partial q_\eta}{\partial p_\alpha} = -\frac{\partial^2 \mathfrak{L}_\mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{f}_\eta \partial p_\alpha}.$$

Die beiden zweiten Ableitungen des $\mathfrak{L}_\mathfrak{f}$, auf die wir in α) und β) geführt worden sind, haben aber nach den Regeln der Differentialrechnung den gleichen Wert, also ist:

$$\frac{\partial P'_\alpha}{\partial \mathfrak{f}_\eta} = -\frac{\partial q_\eta}{\partial p_\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 290)$$

So ist nach den am Schlusse von § 390 gegebenen Formeln für den Monocykel § 372

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial \mathfrak{f}} = -2\frac{1}{4mp^2}\frac{\mathfrak{f}}{p} = -\frac{\partial P'_\alpha}{\partial \mathfrak{f}}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial p} = -\frac{2}{4mp^2}\frac{\mathfrak{f}}{p},$$

also in der That

$$-\frac{\partial P'_\alpha}{\partial \mathfrak{f}} = \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial p}.$$

b) Isocyklische Systeme. Nach 233) § 376 b können wir die an dem Parameter p_i wirkende Kraft P'_i durch die partielle Ableitung der kinetischen Energie des cyklischen Systems, ausgedrückt in den cyklischen Intensitäten, $\mathfrak{L}_\mathfrak{q}$, nach diesem Parameter p_i darstellen; es ist

$$P'_i = \frac{\partial \mathfrak{L}_\mathfrak{q}}{\partial p_i};$$

hier ist ebenso wie die rechte Seite auch die linke, also P'_i, Funktion der Parameter p und der cyklischen Intensitäten $\mathfrak{q}$.

Nach 226) § 375 ist ferner das cyklische Moment $\mathfrak{f}_\eta$ darstellbar als partielle Ableitung desselben Ausdruckes $\mathfrak{L}_\mathfrak{q}$ für die kinetische Energie nach der betreffenden cyklischen Intensität $\mathfrak{q}_\eta$; es ist

$$\mathfrak{f}_\eta = \frac{\partial \mathfrak{L}_\mathfrak{q}}{\partial \mathfrak{q}_\eta};$$

hier ist ebenso wie die rechte Seite auch die linke, also $\mathfrak{f}_\eta$, Funktion der Parameter p und der cyklischen Intensitäten $\mathfrak{q}$.

Wir bilden nun

α) die partielle Ableitung von P'_i nach dem $\mathfrak{q}_\eta$. Dabei denken wir uns die p ihre Werte unverändert beibehaltend. Wir erhalten:

$$\frac{\partial P'_i}{\partial \mathfrak{q}_\eta} = \frac{\partial^2 \mathfrak{L}_\mathfrak{q}}{\partial p_i \partial \mathfrak{q}_\eta}.$$

β) die partielle Ableitung des $\mathfrak{f}_\eta$ nach dem p_i. Dabei denken wir uns die $\mathfrak{q}$ alle als konstant, wir nehmen also an dem System eine isocyklische Zustandsänderung vor und erhalten:

$$\frac{\partial \mathfrak{f}_\eta}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 \Omega_\mathfrak{q}}{\partial \mathfrak{q}_\eta \, \partial p_i}.$$

Die beiden zweiten Ableitungen des $\Omega_\mathfrak{q}$ sind wieder einander gleich, also ist:

$$\frac{\partial P_i'}{\partial \mathfrak{q}_\eta} = \frac{\partial \mathfrak{f}_\eta}{\partial p_i}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad 291)$$

So ist nach den in § 394 gegebenen Formeln für das Modell § 372, wenn wir an diesem isocyklische Zustandsänderungen eintreten lassen:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \mathfrak{q}} = -2 \cdot 4 \, m p \cdot \mathfrak{q} = -\frac{\partial P_i'}{\partial \mathfrak{q}} \text{ und } \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial p} = 2 \cdot 4 \, m p \cdot \mathfrak{q},$$

also in der That:

$$\frac{\partial P_i'}{\partial \mathfrak{q}} = \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial p}.$$

In Worten lauten beide Sätze zusammengenommen:

Wenn in einem cyklischen System eine Vermehrung
des cyklischen Momentes $\mathfrak{f}_\eta$ | der cyklischen Intensität $\mathfrak{q}_\eta$
bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft
nach dem Parameter
p_a | p_i
zur Folge hat, so ruft die
adiabatische | isocyklische
Vergrösserung des Parameters
p_a | p_i
eine
Verminderung | Vermehrung
der cyklischen Intensität $\mathfrak{q}_\eta$ | des cyklischen Momentes $\mathfrak{f}_\eta$
hervor, und umgekehrt.
Und zwar ist bei unendlich kleiner Änderung
$\partial \mathfrak{f}_\eta$ bezw. ∂p_a | $\partial \mathfrak{q}_\eta$ bezw. ∂p_i
das Verhältnis der hervorgerufenen Änderungen
$\partial P_a'$ bezw. $-\partial \mathfrak{q}_\eta$ | $\partial P_i'$ bezw. $\partial \mathfrak{f}_\eta$
zu den erzeugenden Zuwächsen in beiden Fällen das gleiche.

Auch dieser Doppelsatz gilt ganz unabhängig von der Zahl der vorhandenen cyklischen Koordinaten; er besteht daher ebensowohl für Monocykel und Dicykel wie für Polycykel. Jeder einzelne Satz findet überall dort Anwendung, wo es möglich ist, neben einer cyklischen Intensität auch das entsprechende cyklische

Moment unmittelbar, d. h. ohne Kenntnis der Koeffizienten A oder B, vermittelst deren eine von beiden Grössen durch die andere ausdrückbar ist, zu bestimmen; ausserdem muss noch irgend ein Parameter und die an ihm angreifende Kraft der Beobachtung zugänglich sein.

Lassen sich bei gegebenem Parameter p_d und seiner Kraft P_d und dem bekannten cyklischen Momente $\mathfrak{f}_\delta$ und der entsprechenden Intensität $\mathfrak{q}_\delta$ sowohl adiabatische wie isocyklische Zustandsänderungen vornehmen, so gelten die beiden Relationen:

$$\frac{\partial P_d'}{\partial \mathfrak{f}_\delta} = -\underset{\text{(adiabatisch)}}{\frac{\partial \mathfrak{q}_\delta}{\partial p_d}} \text{ und } \frac{\partial P_d'}{\partial \mathfrak{q}_\delta} = \underset{\text{(isocyklisch)}}{\frac{\partial \mathfrak{f}_\delta}{\partial p_d}} \quad . \; . \; . \; . \quad 291\,a)$$

413. Spezielle Form bei Monocykeln. — Bei einem monocyklischen System hatten wir schon früher §§ 137—139 die einzige cyklische Intensität, die vorkommt mit $\mathfrak{q}$ ohne Index, das zugehörige Moment mit $\mathfrak{f}$ ohne Index bezeichnet. Ebenfalls schon früher, § 381, wiesen wir auf den einfachen Zusammenhang zwischen Intensität und cyklischem Momente bei diesen Systemen hin:

$$\mathfrak{f} = A\,\mathfrak{q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 248)$$

vergl. auch § 373 am Ende S. 449.

Da hier A als Summe von lauter Quadraten notwendig stets eine positive Grösse ist, so sind die monocyklischen Systeme dadurch ausgezeichnet, dass bei ihnen eine Vergrösserung der cyklischen Intensität bei festgehaltenen Parametern stets mit einer Vermehrung des cyklischen Momentes Hand in Hand geht.

Vermöge der charakterisierenden Gleichung 248) entspricht also einer positiven Änderung von $\mathfrak{q}$ (Zuwachs) immer eine solche von $\mathfrak{f}$.

Für Monocykeln können wir also mit Rücksicht auf die Gleichungen 290) und 291) sagen:

Wenn in einem monocyklischen Systeme eine Vermehrung
der cyklischen Intensität $\mathfrak{q}$ | des cyklischen Momentes $\mathfrak{f}$
bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft P_d'
nach dem Parameter p_d zur Folge hat, so ruft die
adiabatische | isocyklische
Vergrösserung des Parameters p_d eine
Verminderung | Vermehrung
der cyklischen Intensität $\mathfrak{q}$ | des cyklischen Momentes $\mathfrak{f}$
hervor und umgekehrt.

Bei den Monocykeln verlangen die Anwendungen dieser beiden Sätze also nur die unmittelbare Bestimmbarkeit entweder der cyklischen Intensität oder des cyklischen Momentes.

So war bei dem Beispiele des § 372 nach den Formeln § 390 am Schluss:

$$\frac{\partial P_a}{\partial q} = \frac{\partial P_a}{\partial \mathfrak{f}} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial q} = -\frac{2}{4mp^2} \frac{\mathfrak{f}}{p} \cdot 4mp^2 = -\frac{\partial P_a'}{\partial q}$$

und andererseits:

$$\frac{\partial q}{\partial p} = -\frac{2}{4mp^2} \frac{\mathfrak{f}}{p},$$

also

$$\frac{1}{4mp^2} \cdot \frac{\partial P_a'}{\partial q} = -\frac{\partial q}{\partial p}$$

wie der Satz erfordert.

Dagegen ist für isocyklische Änderungen nach § 394 für unseren Spezialfall:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \mathfrak{f}} = \frac{\partial P_i}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \mathfrak{f}} = -2 \cdot 4mp \cdot q \frac{1}{4mp^2} = -\frac{\partial P_i'}{\partial \mathfrak{f}};$$

andererseits

$$\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial p} = 2 \cdot 4mp \cdot q,$$

also in der That

$$4mp^2 \cdot \frac{\partial P_i'}{\partial \mathfrak{f}} = \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial p}$$

wie unser Satz verlangt.

414. Beziehungen der an Parametern und an cyklischen Koordinaten angreifenden Kräfte zu Änderungen cyklischer Intensitäten und der Parameter. — a) Adiabatische Systeme. Bei Ableitung der Gleichung 290) § 412 hatten wir dem Momente $\mathfrak{f}_\eta$ eine Änderung $\partial \mathfrak{f}_\eta$ erteilt und dadurch die Parameterkraft P_a' um $\partial P_a'$ geändert. Dabei war es ganz ausser Rücksicht geblieben, in welcher Zeit diese Änderungen erfolgt waren. Beide Grössen, $\mathfrak{f}_\eta$ und P_a' sind aber Funktionen der Zeit. Wir können uns die einander entsprechenden Änderungen dadurch entstanden denken, dass die Zeit t die Änderung dt erfahren hat, d. h. wir können sie uns in der Zeit dt entstanden denken. Dann betrachten wir $\partial \mathfrak{f}_\eta$ und $\partial P_a'$ als abhängig von der Zeit t. Dividieren wir also Zähler und Nenner des Quotienten beider Änderungen $\partial P_a' / \partial \mathfrak{f}_\eta$ durch dt, so stellt uns der Zähler $\partial P_a' / dt$ die Ableitung der Kraft P_a' nach der Zeit, also die Grösse $\dot{P}_a'$ dar, der Nenner $\partial \mathfrak{f}_\eta / dt$ die zeitliche Ableitung des Momentes $\mathfrak{f}_\eta$, also die Grösse $\dot{\mathfrak{f}}_\eta$.

Nach 232) § 376 ist aber

$$\dot{\mathfrak{f}}_\eta = \mathfrak{P}_\eta = -\mathfrak{P}_\eta',$$

wo $\mathfrak{P}_\eta$ die auf die cyklische Koordinate $\mathfrak{p}_\eta$ von aussen ausgeübte Kraft darstellt. Wir wollen also die Änderung des Momentes $\mathfrak{f}_\eta$ als eine

Wirkung der äusseren Kraft $\mathfrak{P}_\eta$ ansehen. In Formel 290) § 412 war gar keine Voraussetzung über die nähere Art der Entstehung der unendlich kleinen Änderungen $\partial \mathfrak{f}_\eta$ und $\partial P_a'$ gemacht worden. Wir können diese Formel also auch hier anwenden und schreiben:

$$\frac{\partial P_a'}{\partial \mathfrak{f}_\eta} = \frac{\dot{P}_a'}{\mathfrak{P}_\eta} = -\frac{\partial \mathfrak{q}_\eta}{\partial p_a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 292)$$

Rechter Hand hat die vorzunehmende Änderung adiabatisch zu geschehen, d. h. bei der Ableitung des $\mathfrak{q}_\eta$ nach dem p_a sind die Momente $\mathfrak{f}$ konstant zu lassen.

In Worten lautet der Sinn der Formel 292):

Wenn in einem cyklischen Systeme eine von aussen auf die cyklische Koordinate $\mathfrak{p}_\eta$ ausgeübte, diese vergrössernde Kraft $\mathfrak{P}_\eta$ ein zeitliches Anwachsen der inneren Systemkraft P_a' nach dem Parameter p_a zur Folge hat, so ruft die adiabatische Vergrösserung des Parameters p_a eine Verminderung der cyklischen Intensität $\mathfrak{q}_\eta$ hervor und umgekehrt. Und zwar ist bei unendlich kleinen Änderungen das Grössenverhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

So ist für das Modell § 372 nach den Formeln am Ende von § 390:

$$\dot{P}_a = \frac{d\dot{P}_a}{d\mathfrak{f}} \cdot \frac{d\mathfrak{f}}{dt} = -\frac{2}{4mp^2} \cdot \frac{\mathfrak{f}}{p} \cdot \dot{\mathfrak{f}} = -P_a', \quad \mathfrak{P} = \dot{\mathfrak{f}},$$

also

$$\frac{\dot{P}_a}{\mathfrak{P}} = -\frac{2}{4mp^2} \cdot \frac{\mathfrak{f}}{p}$$

und

$$\partial \mathfrak{q} / \partial p = -\frac{2}{4mp^2} \cdot \frac{\mathfrak{f}}{p},$$

also in der That

$$\frac{\dot{P}_a'}{\mathfrak{P}} = -\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial p}.$$

b) Isocyklische Systeme. Differenziert man in der Formel 233 a) § 376 die Parameterkraft P_i' nach einem $\mathfrak{q}$, z. B. $\mathfrak{q}_\vartheta$, wobei man sich die Parameter konstant erhalten denkt, so findet man einen Ausdruck, der demjenigen entgegengesetzt gleich ist, den man erhält, wenn man in Formel 232 b) $\mathfrak{P}'_\vartheta$ nach q_i ableitet, wobei die $\mathfrak{q}$ als Konstanten zu betrachten sind, also eine isocyklische Zustandsänderung vornimmt; es ist also

$$\frac{\partial P_i'}{\partial \mathfrak{q}_\vartheta} = -\frac{\partial \mathfrak{P}'_\vartheta}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathfrak{P}_\vartheta}{\partial q_i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 293)$$

In Worten:

Wenn in einem cyklischen Systeme eine Vermehrung der cyklischen Intensität $\mathfrak{q}_\vartheta$ bei festgehaltenen Parametern p eine Steigerung der Kraft P_i' nach dem Parameter p_i zur Folge hat, so entspricht der isocyklischen Vergrösserung von q_i eine negative von dem System auf die cyklische Koordinate $\mathfrak{p}_\vartheta$ ausgeübte Kraft $\mathfrak{P}_\vartheta'$, die also diese Koordinate zu verkleinern strebt und umgekehrt. Bei unendlich kleiner Grösse der ins Spiel tretenden Faktoren ist das Verhältnis von Ursache und Wirkung in beiden Fällen ausserdem das gleiche.

q_i ist klein von erster Ordnung. Wir haben aber auch $\mathfrak{P}_\vartheta$ oder $\mathfrak{P}'_\vartheta$ als klein von derselben Ordnung anzusehen, vergl. § 376 a, so dass die beiden Verhältnisse rechts endliche Werte haben.

So ist für den Monocykel § 372 nach den Formeln in § 394:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \mathfrak{q}} = -2 \cdot 4\, m\, p \cdot \mathfrak{q} \text{ und da } \mathfrak{P} = \dot{\mathfrak{f}} = 2 \cdot 4\, m\, p\, \mathfrak{q} \cdot q + 4\, m\, p^2\, \dot{\mathfrak{q}},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial q} = 2 \cdot 4\, m\, p\, \mathfrak{q},$$

also in der That

$$\frac{\partial P_i'}{\partial \mathfrak{q}} = -\frac{\partial P_i}{\partial \mathfrak{q}} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial q} = -\frac{\partial \mathfrak{P}'}{\partial q}.$$

Die Formel 293) gilt für Mono-, Di- und Polycykel. Ihre Anwendung findet sie überall dort, wo, wie in der Elektrodynamik, ausser cyklischen Intensitäten (Stromesintensitäten) noch die auf sie wirkenden Kräfte (elektromotorische Kräfte) der Beobachtung zugänglich sind. Dann stellt sie eine Beziehung der Verhältnisse der ersteren zu den Parameterkräften und die Abhängigkeit der letzteren von den Änderungsgeschwindigkeiten der Feldparameter dar. Der Vorgang der Magnetoinduktion, wie wir ihn im 13. Kapitel betrachtet haben, ist ein besonders einfacher, hierher gehöriger Fall. Denken wir uns vor dem horizontal liegenden Stabmagneten der §§ 215 und 216, etwa vor seinem N-Pol, die in § 216 erwähnte Drahtspirale vertikal, frei nach vorwärts und rückwärts beweglich, aufgehängt und von einem Strome in solcher Richtung durchflossen, dass Abstossung stattfindet, so kann die Entfernung von der Spulenmitte bis zum Stabende als langsam veränderlicher Parameter betrachtet werden. Steigerung der Stromstärke $\mathfrak{q}$ ruft eine solche der Parameterkraft P' in dem Systeme Strom-Magnetfeld hervor, welche die Geschwindigkeit der Bewegung zu steigern strebt ($\partial P' / \partial \mathfrak{q}$ positiv). Ruht die stromlose Spirale vor dem Magnetpole, so wird bei einem Inbewegungsetzen eine E.M.K. $\mathfrak{P}'$ erzeugt, welche derjenigen, die ursprünglich den Strom unterhielt, entgegengesetzt gerichtet ist (Abnahme der umschlossenen Kraftlinienzahl von N aus gesehen). Jeder Steigerung der Bewegungsgeschwindigkeit etwa um ∂q entspricht eine (durch die pro Zeiteinheit mehr geschnittene Kraftlinienzahl bestimmte) Vergrösserung der E.M.K. $-\mathfrak{P}'$ etwa um $\partial \mathfrak{P}'$. Dem q entspricht das $-\mathfrak{P}'$, das ∂q dem $-\partial \mathfrak{P}'$; dem $\int q \cdot dt$ oder dp entspricht das $-\int \mathfrak{P} \cdot dt$, d. h. mit Rücksicht auf das Ohmsche Gesetz eine bei dem Übergange aus einer Lage (p) in eine andere ($p + dp$) im ganzen induzierte „Gesamtelektricitätsmenge", der „Integralstrom" der älteren Anschauungen, vergl. § 301 Versuch 110 und § 234 vorletzter Abschnitt.

Wollen wir die Beträge der beiden Verhältnisse $\partial P' / \partial q$ und $- \partial \mathfrak{P}' / \partial q$ miteinander vergleichen und auf sie die Formel 293) anwenden, so müssen wir dafür sorgen, dass das System, während wir die zweitgenannte Zustandsänderung vornehmen, im übrigen in identischen Zuständen verbleibt. Steigern wir die E.M.K. $-\mathfrak{P}'$, so wird nach dem Ohmschen Gesetze auch die Stromstärke, die cyklische Intensität q gesteigert, und damit die elektromagnetische Kraft, gegen die wir die Arbeit leisten, welche zur Bildung des Induktionsstromes führt. Wir müssen daher q konstant erhalten, d. h. die Zustandsänderung isocyklisch ausführen, da sonst die Bedingungen am Anfang und am Ende der Zeit, in welche die Zustandsänderung ∂q fällt, verschiedene sein würden, und wir eben nur die Abhängigkeit des $- \partial \mathfrak{P}'$ von dem ∂q kennen wollen (die Differentiation soll eine partielle sein). Wir wissen, wie wir uns diese Konstanz des q herbeigeführt denken können; wir „koppeln" das System mit einer äusseren Elektricitätsquelle, deren E.M.K. wir immer so einregulieren, dass während des ganzen betrachteten Prozesses ($- \partial \mathfrak{P}' / \partial q$) die etwa angestrebten Änderungen der Intensität q gerade kompensiert werden. Man sieht, dass diese Betrachtungen das vollkommene Analogon auf elektrischem Gebiete zu den hier angestellten allgemeinen Zustandsbetrachtungen bilden (vergl. u. a. auch § 393) und speziell unser Fall in den Bereich des allgemeinen Gesetzes 293) gehört.

Ebenso wie hier bilden alle elektrischen Vorgänge immer nur höchst spezielle Fälle der von der Cykeltheorie behandelten Probleme; diese ist so allgemein und umfassend, dass in ihr selbst die verwickeltsten Kombinationen von Strom- und Magnetsystemen, die nur denkbar sind, inbegriffen sein würden.

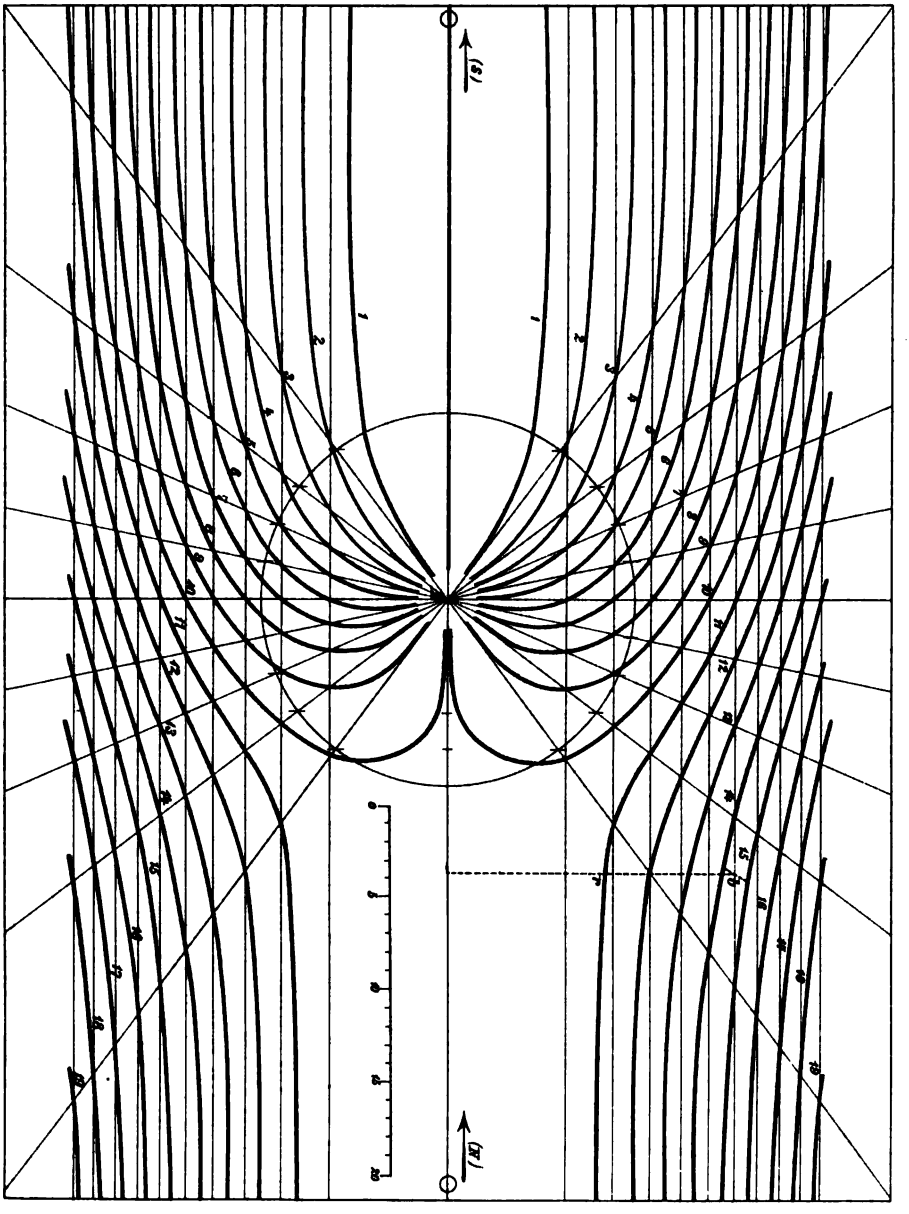


Fig. 30.

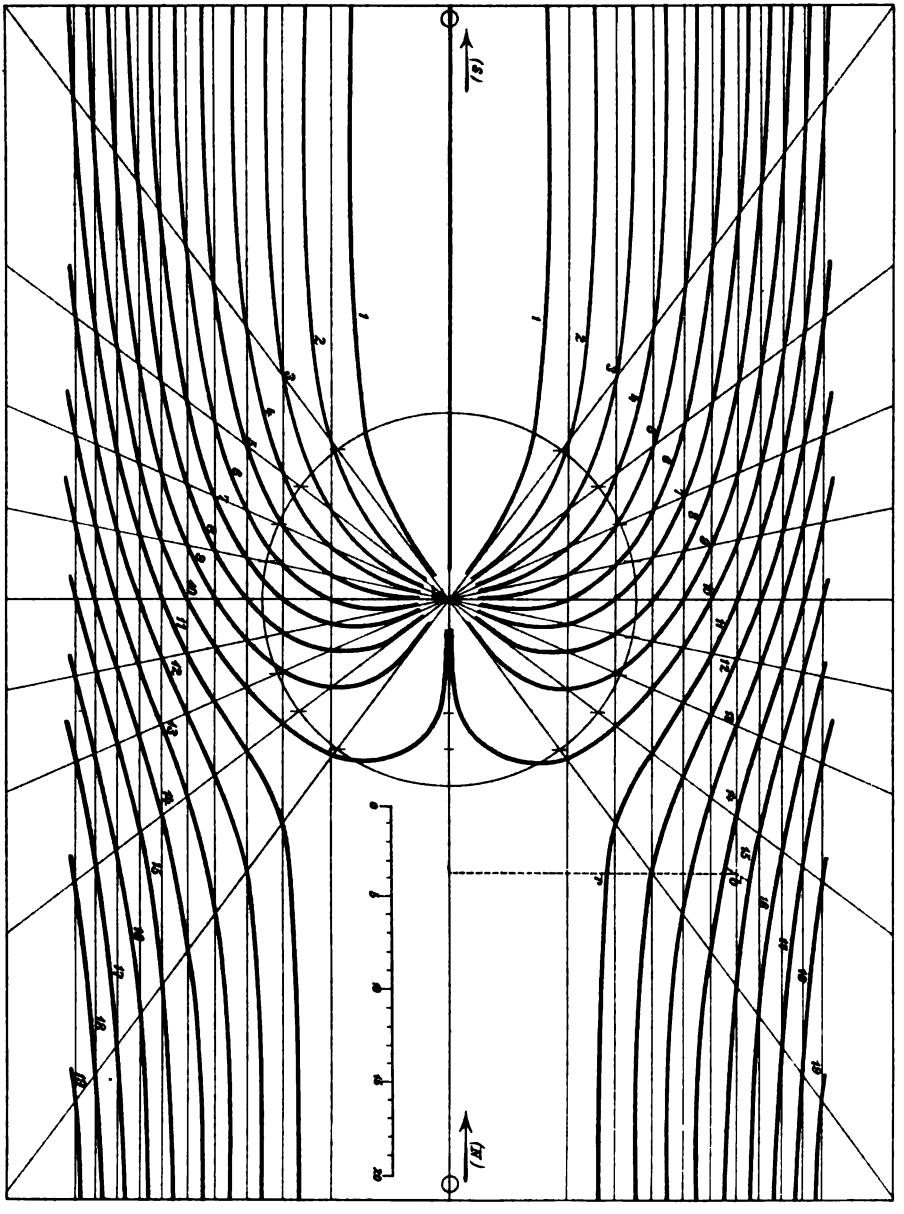
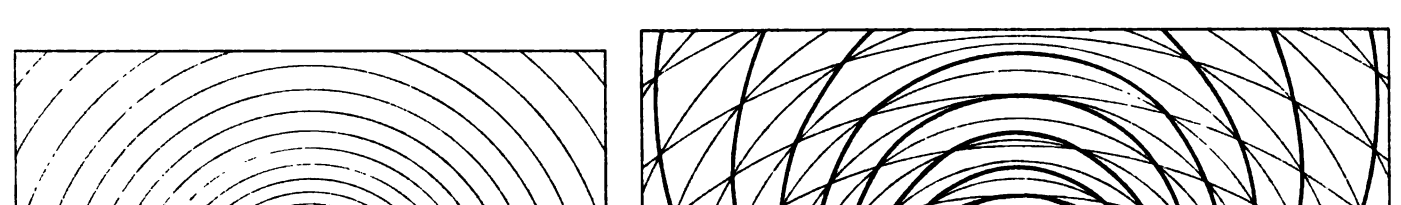



Fig. 30.